Integrali ellittici

INDICE

1. Integrale ellittico incompleto di prima specie. Si definisce tale l'integrale

$$\begin{cases} F_1(k,\phi) = \int_0^\phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} \\ k\sin\varphi \in]-1,1[\end{cases}$$

il quale non può essere risolto in forma esatta. Qui ne propongo la soluzione per mezzo di uno sviluppo in serie di potenze. A tale scopo si consideri il noto sviluppo

$$\begin{cases} (1+x)^\alpha = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\alpha}{h} x^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{h!\,(\alpha-h)!} x^h = 1 + \frac{\alpha!}{(\alpha-1)!} x + \frac{\alpha!}{2!\,(\alpha-2)!} x^2 + \frac{\alpha!}{3!\,(\alpha-3)!} x^3 + \cdots \\ \forall \alpha \epsilon R, \ \ \forall x \epsilon]-1,1[\end{cases}$$

Operando le sostituzioni $x = -k^2 sin^2\varphi$ e $\alpha = -1/2$ abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1/2)!}{h!\,(-1/2-h)!} (-k^2 sin^2\varphi)^k =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} k^2 sin^2\varphi + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2} k^4 sin^4\varphi - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{6} k^6 sin^6\varphi +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)}{24} k^8 sin^8\varphi + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} k^2 sin^2\varphi + \frac{3}{8} k^4 sin^4\varphi + \frac{15}{48} k^6 sin^6\varphi + \frac{105}{384} k^8 sin^8\varphi + \cdots$$

Dunque l'integrale $F_1(k,\phi)$ può essere scritto in modo equivalente come

$$F_1(k,\phi) = \int_0^\phi \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1/2)!}{h!\,(-1/2-h)!} (k^2 sin^2\varphi)^k \, d\varphi$$

Se in particolare ci limitiamo al quinto addendo dello sviluppo in serie, allora una scrittura approssimata di $F_1(k,\phi)$ è la seguente

$$F_1(k,\phi) \cong \int_0^\phi \left(1 + \frac{1}{2} k^2 sin^2\varphi + \frac{3}{8} k^4 sin^4\varphi + \frac{15}{48} k^6 sin^6\varphi + \frac{105}{384} k^8 sin^8\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \phi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^\phi sin^2\varphi \, d\varphi + \frac{3}{8} k^4 \int_0^\phi sin^4\varphi \, d\varphi + \frac{15}{48} k^6 \int_0^\phi sin^6\varphi \, d\varphi + \frac{105}{384} k^8 \int_0^\phi sin^8\varphi \, d\varphi$$

Per gli integrali trigonometrici si calcola poi

$$\int_0^\phi sin^2\varphi \, d\varphi = \left.\frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2}\right|_0^\phi = \frac{\phi - \sin\phi\cos\phi}{2}$$

$$\int_0^\phi sin^4\varphi \, d\varphi = \left.\frac{3\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin^3\varphi\cos\varphi}{8}\right|_0^\phi = \frac{3\phi - 3\sin\phi\cos\phi - 2\sin^3\phi\cos\phi}{8}$$

$$\int_0^{\phi} sin^6\varphi\, d\varphi = \left(-\frac{\sin^5\varphi\cos\varphi}{6} + \frac{15}{48}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) - \frac{5}{24}\sin^3\varphi\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{\phi} =$$
$$= -\frac{\sin^5\phi\cos\phi}{6} + \frac{15}{48}(\phi - \sin\phi\cos\phi) - \frac{5}{24}\sin^3\phi\cos\phi$$
$$\int_0^{\phi} sin^8\varphi\, d\varphi = \frac{7}{8}\int_0^{\phi} sin^6\varphi\, d\varphi - \frac{\sin^7\varphi\cos\varphi}{8}\Bigg|_0^{\phi} =$$
$$= -7\frac{\sin^5\phi\cos\phi}{48} + \frac{105}{384}(\phi - \sin\phi\cos\phi) - \frac{35}{192}\sin^3\phi\cos\phi - \frac{\sin^7\phi\cos\phi}{8}$$

Dunque l'integrale F_1 può scriversi in maniera approssimata come

$$F_1(k,\phi) \cong \phi + \frac{1}{2}k^2\frac{\phi - \sin\phi\cos\phi}{2} + \frac{3}{8}k^4\frac{3\phi - 3\sin\phi\cos\phi - 2\sin^3\phi\cos\phi}{8} +$$
$$+\frac{15}{48}k^6\left(-\frac{\sin^5\phi\cos\phi}{6} + \frac{15}{48}(\phi - \sin\phi\cos\phi) - \frac{5}{24}\sin^3\phi\cos\phi\right) +$$
$$+\frac{105}{384}k^8\left(-7\frac{\sin^5\phi\cos\phi}{48} + \frac{105}{384}(\phi - \sin\phi\cos\phi) - \frac{35}{192}\sin^3\phi\cos\phi - \frac{\sin^7\phi\cos\phi}{8}\right)$$

2. Integrale ellittico completo di prima specie. Quando si ponga $\phi = \pi/2$ nell'integrale ellittico incompleto di prima specie, allora si ottiene la forma completa, ovvero l'integrale

$$\begin{cases} K_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}} \\ k\sin\varphi \in \,]-1,1[\end{cases}$$

Operando la sostituzione $\phi = \pi/2$ nella espressione approssimata ottenuta per la forma incompleta abbiamo

$$K_1(k) \cong \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k^2 + \frac{9}{128}\pi k^4 + \frac{225}{4608}\pi k^6 + \frac{11025}{294912}\pi k^8 \cong$$
$$\cong 1.5707 + 0.3926k^2 + 0.2208k^4 + 0.1533k^6 + 0.1174k^8$$

Dunque possiamo scrivere

$$K_1(k) \cong 1.5707 + 0.3926k^2 + 0.2208k^4 + 0.1533k^6 + 0.1174k^8$$

3. Integrale trigonometrico riconducibile a integrale ellittico completo di prima specie. Si consideri l'integrale

$$\int_0^{\theta} \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}}, \qquad \theta\epsilon[0, \pm\pi]$$

Si operino le sostituzioni seguenti

$$\begin{cases}\sin\frac{\theta}{2}=k\\ \sin\frac{\gamma}{2}=k\sin\varphi\end{cases}$$

Allora abbiamo che

$$\begin{cases}\cos\gamma=\cos^2\frac{\gamma}{2}-sin^2\frac{\gamma}{2}=1-2\,sin^2\frac{\gamma}{2}\\ \cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-sin^2\frac{\theta}{2}=1-2\,sin^2\frac{\theta}{2}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\cos\gamma-\cos\theta}=\sqrt{2}\sqrt{sin^2\frac{\theta}{2}-sin^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$\begin{cases}\gamma=\theta\Rightarrow\begin{cases}\sin\frac{\theta}{2}=k\sin\phi\\ \sin\frac{\theta}{2}=k\end{cases}\Rightarrow\sin\phi=1\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{2}\\ \gamma=0\Rightarrow 0=k\sin\phi\Rightarrow\phi=0\end{cases}$$

$$d\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)=d(k\sin\varphi)\Rightarrow\frac{1}{2}\cos\frac{\gamma}{2}d\gamma=k\cos\varphi\,d\varphi\Rightarrow d\gamma=\frac{2k\cos\varphi}{\cos\frac{\gamma}{2}}d\varphi$$

Dunque la sostituzione proposta porge

$$\int_0^{\theta}\frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2k\cos\varphi}{\sqrt{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{sin^2\frac{\theta}{2}-sin^2\frac{\gamma}{2}}}d\varphi=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\cos\varphi}{\cos\frac{\gamma}{2}|k|\sqrt{1-\sin^2\varphi}}d\varphi$$

Si consideri ora che poiché $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ si ha $\cos\varphi\geq 0$ e dunque $\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\cos\varphi$, pertanto abbiamo ottenuto sin qui

$$\int_0^{\theta}\frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\theta}}=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k}{\cos\frac{\gamma}{2}|k|}d\varphi$$

A questo punto si deve specificare l’ambito di variabilità di θ. Si hanno solo i seguenti casi:

$$\theta\epsilon[0,\pi]\Rightarrow\begin{cases}k\geq 0\\ \cos\frac{\gamma}{2}\geq 0\end{cases}\Rightarrow\int_0^{\theta}\frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\theta}}=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}d\varphi$$
$$\theta\epsilon[0,-\pi]\Rightarrow\begin{cases}k\leq 0\\ \cos\frac{\gamma}{2}\geq 0\end{cases}\Rightarrow\int_0^{\theta}\frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\theta}}=-\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}d\varphi$$

Si riconosce a secondo membro l’integrale ellittico di prima specie in forma completa, dunque possiamo fornire la seguente soluzione approssimata:

$$\int_0^{\theta}\frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\theta}}=\pm\sqrt{2}K_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\cong$$

$$\cong \pm\sqrt{2}\left[1.5707 + 0.3926\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 0.2208\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4 + 0.1533\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^6 + 0.1174\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^8\right]$$

dove $\theta\epsilon[0, \pm\pi]$.

4. Integrale irrazionale riconducibile a integrale ellittico completo di prima specie. Si consideri l'integrale

$$\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}}$$

Operando la sostituzione $\frac{x}{h} = \xi$, allora si ha $dx = hd\xi$ e quindi

$$\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}} = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^4}}$$

Si operi ora l'ulteriore sostituzione $\xi = \cos\theta$. Si ha $d\xi = -\sin\theta\, d\theta$, dunque

$$\frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} = -\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^4\theta}}d\theta = \frac{1}{h}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^4\theta}}d\theta =$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}}d\theta = \frac{1}{h}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}} = \frac{1}{h\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}$$

Riconosciamo adesso l'integrale ellittico completo di prima specie per $k = 1/\sqrt{2}$, ovvero $K_1\left(1/\sqrt{2}\right)$. Dunque abbiamo provato che

$$\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}} = \frac{1}{h\sqrt{2}}K_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Utilizzando il valore approssimato ricavato nel paragrafo due, abbiamo infine

$$\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}} \cong \frac{1}{h\sqrt{2}}\left[1.5707 + 0.3926\frac{1}{2} + 0.2208\frac{1}{4} + 0.1533\frac{1}{8} + 0.1174\frac{1}{16}\right] = \frac{1.3072}{h}$$

5. Altro integrale trigonometrico riconducibile a integrale ellittico completo di prima specie. Si consideri l'integrale

$$\int_\phi^{3\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin\phi - \sin\alpha}}, \qquad \phi\epsilon\left[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right]$$

Operando la sostituzione $\alpha = \gamma + 3\pi/2$ si ha

$$\int_{\phi-3\pi/2}^0 \frac{d\gamma}{\sqrt{\sin(\theta + 3\pi/2) - \sin(\gamma + 3\pi/2)}} = \int_{\phi-3\pi/2}^0 \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}}$$

Ponendo $\theta = \phi - 3\pi/2$ si ha $\theta \epsilon [-\pi, 0]$, dunque abbiamo trovato

$$\int_{\phi}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin\phi - \sin\alpha}} = -\int_{0}^{\theta} \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}}, \qquad \begin{cases} \theta \epsilon [-\pi, 0] \\ \phi \epsilon \left[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Analogamente si dimostra che

$$\int_{\phi}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin\phi - \sin\alpha}} = \int_{0}^{\theta} \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}}, \qquad \begin{cases} \theta \epsilon [0, \pi] \\ \phi \epsilon \left[3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Infatti se $\theta = \phi - 3\pi/2$ segue che per $\phi = 3\frac{\pi}{2}$ si ha $\theta = 0$, mentre per $\phi = 5\frac{\pi}{2}$ segue che $\theta = \pi$. Utilizzando allora il risultato del paragrafo 3 abbiamo che

$$\int_{\phi}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin\phi - \sin\alpha}} = \sqrt{2} K_1 \left(\sin\frac{\phi - 3\pi/2}{2}\right) \cong$$
$$\cong \sqrt{2}\left[1.5707 + 0.3926\left(\sin\frac{\phi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right)^2 + 0.2208\left(\sin\frac{\phi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right)^4 + 0.1533\left(\sin\frac{\phi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right)^6 + 0.1174\left(\sin\frac{\phi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right)^8\right]$$

con $\phi \epsilon \left[\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}\right]$.

6. Integrale ellittico incompleto di seconda specie. Si definisce tale l'integrale

$$\begin{cases} F_2(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}\, d\varphi \\ k \sin\varphi \in \,]-1,1[\end{cases}$$

il quale non può essere risolto in forma esatta. Qui ne propongo la soluzione per mezzo di uno sviluppo in serie di potenze. A tale scopo si consideri il noto sviluppo

$$\begin{cases} (1+x)^{\alpha} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\alpha}{h} x^h = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{h!\,(\alpha - h)!} x^h = 1 + \frac{\alpha!}{(\alpha-1)!} x + \frac{\alpha!}{2!\,(\alpha-2)!} x^2 + \frac{\alpha!}{3!\,(\alpha-3)!} x^3 + \cdots \\ \forall \alpha \epsilon R, \quad \forall x \epsilon]-1,1[\end{cases}$$

Operando le sostituzioni $x = -k^2 sin^2\varphi$ e $\alpha = 1/2$ abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(1/2)!}{h!\,(1/2 - h)!} (-k^2 sin^2\varphi)^k =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} k^2 sin^2\varphi - \frac{1}{8} k^4 sin^4\varphi - \frac{1}{16} k^6 sin^6\varphi - \frac{5}{128} k^8 sin^8\varphi + \cdots$$

Dunque l'integrale $F_1(k, \phi)$ può essere scritto in modo equivalente come

$$F_2(k,\phi)=\int_0^{\phi}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(1/2)!}{h!\,(1/2-h)!}(k^2 sin^2\varphi)^k\,d\varphi$$

Se in particolare ci limitiamo al quinto addendo dello sviluppo in serie, allora una scrittura approssimata di $F_1(k,\phi)$ è la seguente

$$F_2(k,\phi)\cong\int_0^{\phi}\left(1-\frac{1}{2}k^2 sin^2\varphi-\frac{1}{8}k^4 sin^4\varphi-\frac{1}{16}k^6 sin^6\varphi-\frac{5}{128}k^8 sin^8\varphi\right)d\varphi=$$
$$=\phi-\frac{1}{2}k^2\int_0^{\phi}sin^2\varphi\,d\varphi-\frac{1}{8}k^4\int_0^{\phi}sin^4\varphi\,d\varphi-\frac{1}{16}k^6\int_0^{\phi}sin^6\varphi\,d\varphi-\frac{5}{128}k^8\int_0^{\phi}sin^8\varphi\,d\varphi$$

Per gli integrali trigonometrici si calcola poi

$$\int_0^{\phi}sin^2\varphi\,d\varphi=\left.\frac{\varphi-\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right|_0^{\phi}=\frac{\phi-\sin\phi\cos\phi}{2}$$
$$\int_0^{\phi}sin^4\varphi\,d\varphi=\left.\frac{3\varphi-3\sin\varphi\cos\varphi-2\sin^3\varphi\cos\varphi}{8}\right|_0^{\phi}=\frac{3\phi-3\sin\phi\cos\phi-2\sin^3\phi\cos\phi}{8}$$
$$\int_0^{\phi}sin^6\varphi\,d\varphi=\left.\left(-\frac{\sin^5\varphi\cos\varphi}{6}+\frac{15}{48}(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)-\frac{5}{24}\sin^3\varphi\cos\varphi\right)\right|_0^{\phi}=$$
$$=-\frac{\sin^5\phi\cos\phi}{6}+\frac{15}{48}(\phi-\sin\phi\cos\phi)-\frac{5}{24}\sin^3\phi\cos\phi$$
$$\int_0^{\phi}sin^8\varphi\,d\varphi=\frac{7}{8}\int_0^{\phi}sin^6\varphi\,d\varphi-\left.\frac{\sin^7\varphi\cos\varphi}{8}\right|_0^{\phi}=$$
$$=-7\frac{\sin^5\phi\cos\phi}{48}+\frac{105}{384}(\phi-\sin\phi\cos\phi)-\frac{35}{192}\sin^3\phi\cos\phi-\frac{\sin^7\phi\cos\phi}{8}$$

Dunque l'integrale F_1 può scriversi in maniera approssimata come

$$F_2(k,\phi)\cong\phi-\frac{1}{2}k^2\frac{\phi-\sin\phi\cos\phi}{2}-\frac{1}{8}k^4\frac{3\phi-3\sin\phi\cos\phi-2\sin^3\phi\cos\phi}{8}-$$
$$-\frac{1}{16}k^6\left(-\frac{\sin^5\phi\cos\phi}{6}+\frac{15}{48}(\phi-\sin\phi\cos\phi)-\frac{5}{24}\sin^3\phi\cos\phi\right)+$$
$$-\frac{5}{128}k^8\left(-7\frac{\sin^5\phi\cos\phi}{48}+\frac{105}{384}(\phi-\sin\phi\cos\phi)-\frac{35}{192}\sin^3\phi\cos\phi-\frac{\sin^7\phi\cos\phi}{8}\right)$$

7. Integrale ellittico completo di seconda specie. Quando si ponga $\phi=\pi/2$ nell'integrale ellittico incompleto di seconda specie, allora si ottiene la forma completa, ovvero l'integrale

$$\begin{cases}K_2(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}\,d\varphi\\ k\sin\varphi\in\,]-1,1[\end{cases}$$

Operando la sostituzione $\phi=\pi/2$ nella espressione approssimata ottenuta per la forma incompleta abbiamo

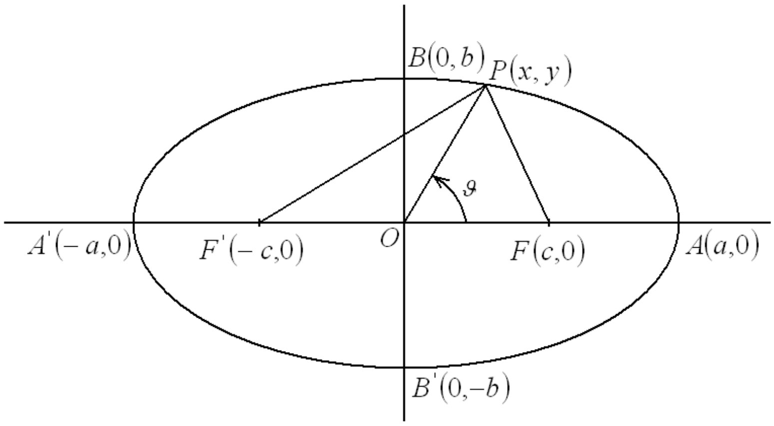
$$K_2(k) \cong 1.5707 - 0.3926k^2 - 7.3631 \cdot 10^{-2}k^4 - 3.0679 \cdot 10^{-2}k^6 - 1.6777 \cdot 10^{-2}k^8$$

8. Tabella riassuntiva sugli integrali ellittici. Riassumo i principali risultati.

$K_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}} \cong 1.5707 + 0.3926k^2 + 0.2208k^4 + 0.1533k^6 + 0.1174k^8$ $k \sin\varphi \in]-1,1[$
$K_2(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi d\varphi} \cong$ $\cong 1.5707 - 0.3926k^2 - 7.3631 \cdot 10^{-2}k^4 - 3.0679 \cdot 10^{-2}k^6 - 1.6777 \cdot 10^{-2}k^8$ $k \sin\varphi \in]-1,1[$
$\int_0^{\theta} \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}} = \sqrt{2}K_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) \cong$ $\cong \sqrt{2}\left[1.5707 + 0.3926\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 0.2208\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4 + 0.1533\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^6 + 0.1174\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^8\right]$ $\theta \epsilon [0, \pi]$
$\int_0^{\theta} \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}} = -\sqrt{2}K_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) \cong$ $\cong -\sqrt{2}\left[1.5707 + 0.3926\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 0.2208\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4 + 0.1533\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^6 + 0.1174\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^8\right]$ $\theta \epsilon [-\pi, 0]$
$\int_0^{h} \frac{dx}{\sqrt{h^4 - x^4}} = \frac{1}{h\sqrt{2}} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cong$ $\cong \frac{1}{h\sqrt{2}}\left[1.5707 + 0.3926\frac{1}{2} + 0.2208\frac{1}{4} + 0.1533\frac{1}{8} + 0.1174\frac{1}{16}\right] = \frac{1.3072}{h}$
$\int_{\phi}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin\phi - \sin\alpha}} = \sqrt{2}K_1\left(\sin\frac{\phi - 3\pi/2}{2}\right) \cong$ $\cong \sqrt{2}\left[1.5707 + 0.3926\left(\sin\frac{\phi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right)^2 + 0.2208\left(\sin\frac{\phi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right)^4 + 0.1533\left(\sin\frac{\phi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right)^6 + 0.1174\left(\sin\frac{\phi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right)^8\right]$ $\phi \epsilon \left[\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}\right]$

9. Origine degli integrali ellittici. Si voglia calcolare la lunghezza di un ramo di ellisse. Consideriamo allora le equazioni parametriche della ellisse canonica:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$
$$\theta \in [0,2\pi]$$



Allora la lunghezza del generico arco $\widehat{AP}$di ellisse si scrive

$$\widehat{AP} = \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

D'altra parte si calcola che

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta \Rightarrow \left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 = a^2\sin^2\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} = b\cos\theta \Rightarrow \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = b^2\cos^2\theta \end{cases}$$

Dunque si ha

$$\widehat{AP} = \int_0^\theta \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\varphi = \int_0^\theta \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2\theta}\, d\varphi$$

dove si suppone $b > a$. Ponendo $k^2 \triangleq (b^2 - a^2)/b^2$ abbiamo allora

$$\widehat{AP} = b\int_0^\theta \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

Si osservi inoltre che se $b > a$, allora si ha

$$\frac{(b^2 - a^2)}{b^2} < 1 \Longrightarrow -1 < \sqrt{\frac{(b^2 - a^2)}{b^2}} < 1 \Longrightarrow -1 < k\sin\varphi < 1$$

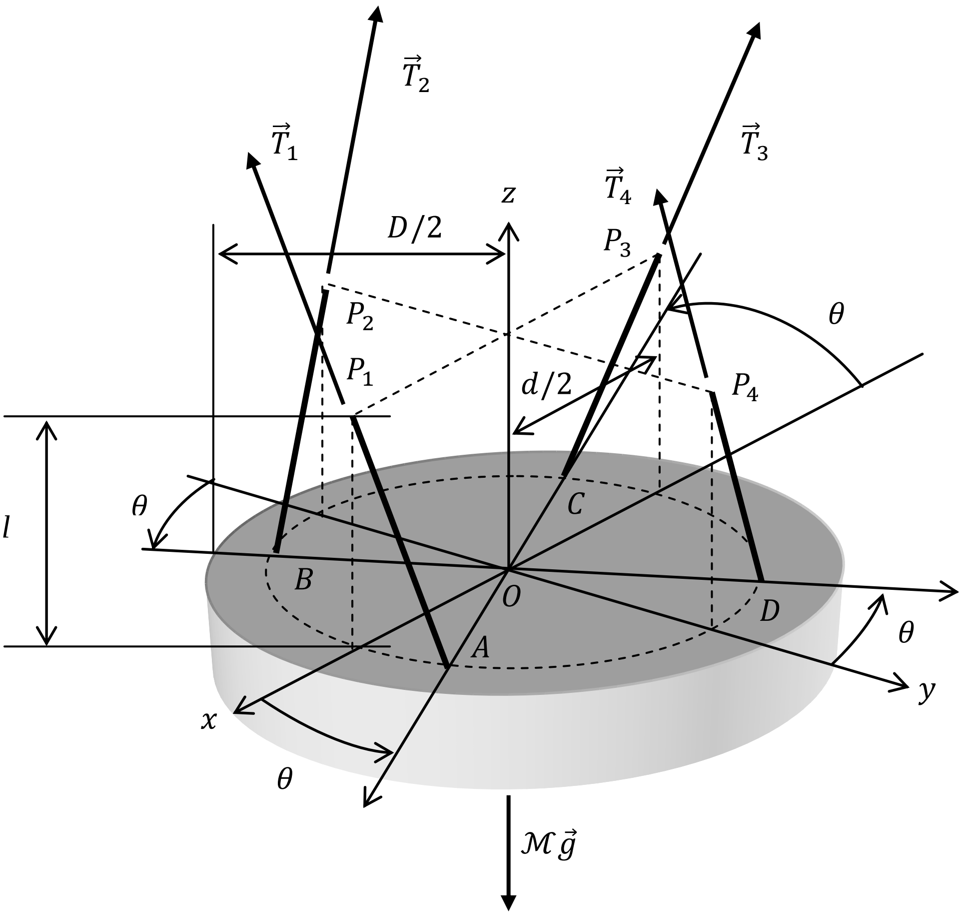
Dunque possiamo concludere che $\widehat{AP} = bF_2(k,\phi)$, ovvero l'integrale ellittico incompleto di seconda specie nasce dal problema del calcolo della lunghezza di un ramo di ellisse.

10. Integrali ellittici nelle oscillazioni. Gli integrali ellittici si incontrano nella soluzione di problemi oscillatori. Come esempio si consideri il caso in figura, dove abbiamo un pendolo torsionale a quattro fili costituito da un disco di diametro D e massa $\mathcal{M}$ sospeso con quattro cavi inestensibili di lunghezza l; i cavi siano collegati al disco ad una distanza $d/2$ dal centro dello stesso.
Allora -con semplici considerazioni geometriche- è possibile calcolare per le tensioni le espressioni seguenti, dove si assume che θ sia l'anomalia che fornisce la rotazione del disco intorno all'asse z; l'anomalia si intende positiva per rotazioni antiorarie.

$$
\begin{cases}
\vec{T}_1 = \dfrac{\mathcal{M}g}{4l}\left[\dfrac{d}{2}(1-\cos\theta)\vec{e}_1 - \dfrac{d}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2 + l\vec{e}_3\right] \\
\vec{T}_2 = \dfrac{\mathcal{M}g}{4l}\left[-\dfrac{d}{2}\sin\theta\,\vec{e}_1 - \dfrac{d}{2}(1-\cos\theta)\vec{e}_2 + l\vec{e}_3\right] \\
\vec{T}_3 = \dfrac{\mathcal{M}g}{4l}\left[-\dfrac{d}{2}(1-\cos\theta)\vec{e}_1 + \dfrac{d}{2}\sin\theta\,\vec{e}_2 + l\vec{e}_3\right] \\
\vec{T}_4 = \dfrac{\mathcal{M}g}{4l}\left[\dfrac{d}{2}\sin\theta\,\vec{e}_1 + \dfrac{d}{2}(1-\cos\theta)\vec{e}_2 + l\vec{e}_3\right]
\end{cases}
$$

Ne segue che il momento delle tensioni rispetto al polo O -che coincide con il baricentro del disco- è dato da

$$\vec{M}_G = \vec{T}_1 \times \overrightarrow{AO} + \vec{T}_2 \times \overrightarrow{BO} + \vec{T}_3 \times \overrightarrow{CO} + \vec{T}_4 \times \overrightarrow{DO} = -\sin\theta\,\frac{\mathcal{M}gd^2}{4l}\,\hat{e}_3$$



Ma allora la seconda equazione della dinamica per il disco porge

$$I_z\ddot{\theta} = -\sin\theta\,\frac{\mathcal{M}gd^2}{4l}$$

Si consideri ora la sostituzione $\dot{\theta} = z(\theta)$, allora si ha:

$$\ddot{\theta} = \frac{dz(\theta)}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dz(\theta)}{d\theta}z(\theta)$$

Dunque l'equazione differenziale si riscrive

$$I_z \frac{dz(\theta)}{d\theta} z(\theta) = -\sin\theta \frac{\mathcal{M}gd^2}{4l} \Rightarrow z(\theta)dz(\theta) = -\sin\theta\, d\theta \frac{\mathcal{M}gd^2}{4lI_z}$$

Integrando abbiamo

$$z^2 = \cos\theta \frac{\mathcal{M}gd^2}{2lI_z} + C \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{M}gd^2}{2lI_z}\cos\theta + C$$

Considerando poi che $I_z = \mathcal{M}(D/2)^2/2$, si ha l'equazione differenziale

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4gd^2}{lD^2}\cos\theta + C$$

Supponiamo ora che al disco venga attribuita una rotazione iniziale θ_0 e venga poi lasciato libero, con una velocità iniziale nulla, allora si ha

$$C = -\frac{4gd^2}{lD^2}\cos\theta_0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{4gd^2}{lD^2}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Supponendo $\theta_0 > 0$ allora si ha $\dot{\theta} < 0$ per $\theta\epsilon[\theta_0, 0]$. Se ci limitiamo allo studio di questa fase di moto allora si ha l'equazione

$$\dot{\theta} = -2\frac{d}{D}\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} \Rightarrow dt = -\frac{D}{2d}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Il periodo della rotazione si scrive dunque

$$T = -4\frac{D}{2d}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta_0}} = 2\frac{D}{d}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\theta_0}\frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Si riconosce allora a secondo membro l'integrale trattato nel paragrafo 3, il quale è stato a sua volta ricondotto all'integrale ellittico completo di prima specie, secondo la relazione

$$\int_0^{\theta_0}\frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\theta}} = \sqrt{2}K_1\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$$

Si è preso il secondo membro positivo poiché $\theta_0 > 0$. Allora -utilizzando lo sviluppo in serie dell'integrale completo di prima specie- possiamo concludere

$$T \cong 2\frac{D}{d}\sqrt{2\frac{l}{g}}\left[1.5707 + 0.3926\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^2 + 0.2208\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^4 + 0.1533\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^6 + 0.1174\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^8\right]$$