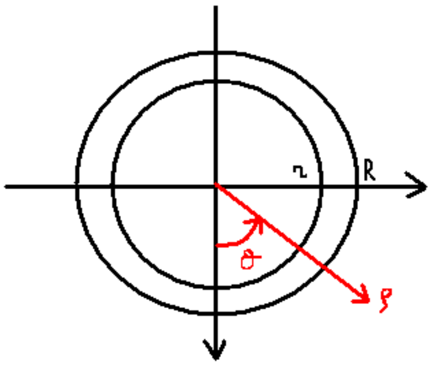
FLUSSO DI CARICHE ATTRAVERSO UN ASSONE E SUA RESISTIVITA'

Consideriamo un assone avente diametro esterno R e diametro interno r dati da

$$R = 479 \cdot 10^{-9} m$$
$$r = 470 \cdot 10^{-9} m$$



Introduciamo il sistema di coordinate polari indicato in figura e consideriamo una superficie cilindrica coassiale all'assone e con diametro ρ compreso fra r ed R.

In condizioni di ***riposo*** (di non eccitazione) si ha un esubero di cariche negative sulla superficie interna della membrana cellulare dell'assone. Diciamo σ_{riposo} la concentrazione superficiale di carica. Allora, per il teorema di Gauss, detta S una superficie cilindrica coassiale all'assone, si ha

$$\Phi_S\left(\vec{E}(\rho)\right) = \frac{\sigma_{riposo} \cdot 2\pi \cdot r \cdot l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(\rho) \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot l = \frac{\sigma_{riposo} \cdot 2\pi \cdot r \cdot l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(\rho) = \frac{\sigma_{riposo} \cdot r}{\varepsilon_0 \cdot \rho}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\rho) = \left(\frac{\sigma_{riposo} \cdot r}{\varepsilon_0 \cdot \rho} \cdot \cos(\vartheta) \quad \frac{\sigma_{riposo} \cdot r}{\varepsilon_0 \cdot \rho} \cdot sen(\vartheta) \right)$$

Ricordando poi che valgono le trasformazioni di coordinate seguenti

$$\begin{cases} \cos(\vartheta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ sen(\vartheta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

si può scrivere

$$\vec{E}(\rho) = \left(\frac{\sigma_{riposo} \cdot r}{\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\sigma_{riposo} \cdot r}{\varepsilon_0} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

da cui, ricordando che il potenziale è la primitiva, cambiata di segno, del campo elettrico, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\delta V}{\delta x} = -\dfrac{\sigma_{riposo} \cdot r}{\varepsilon_0} \cdot \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\delta V}{\delta y} = -\dfrac{\sigma_{riposo} \cdot r}{\varepsilon_0} \cdot \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow V = -\frac{\sigma_{riposo} \cdot r}{2\varepsilon_0} \cdot \ln\left(x^2 + y^2\right) + \cos t$$

Sapendo poi che la differenza di potenziale, in condizioni di riposo, fra la superficie esterna e quella interna della membrana risulta di 70 mV, allora, ponendo nullo il potenziale esterno si ha

$$\begin{cases} V(R)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{r\cdot\sigma_{riposo}}{\varepsilon_0}\cdot\ln(R)+\cos t=0 \Rightarrow \cos t=\dfrac{r\cdot\sigma_{riposo}}{\varepsilon_0}\cdot\ln(R) \\ V(r)=-70\cdot10^{-3}V \Leftrightarrow -\dfrac{r\cdot\sigma_{riposo}}{\varepsilon_0}\cdot\ln(r)+\cos t=-70\cdot10^{-3}V \end{cases} \Rightarrow \frac{r\cdot\sigma_{riposo}}{\varepsilon_0}\cdot\ln(\frac{R}{r})=-70\cdot10^{-3}V$$

cioè

$$\sigma_{riposo}=-70\cdot10^{-3}V\cdot\frac{\varepsilon_0}{r\cdot\ln(\frac{R}{r})}=-70\cdot10^{-3}\cdot\frac{8{,}85\cdot10^{-12}}{470\cdot10^{-9}}\cdot\frac{1}{\ln(\frac{479}{470})}\cdot\frac{C}{m^2}=-69.59\cdot10^{-6}\cdot\frac{C}{m^2}$$

Nel momento in cui viene stimolata la membrana, cariche positive passano dall'esterno all'interno portando il potenziale interno ad un valore di 40 mV, assunto per quello esterno il valore nullo. Allora, detta $\sigma_{eccitazione}$ la densità di carica superficiale della faccia interna della membrana, si ha

$$\begin{cases} V(R)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{r\cdot\sigma_{eccitazione}}{\varepsilon_0}\cdot\ln(R)+\cos t=0 \Rightarrow \cos t=\dfrac{r\cdot\sigma_{eccitazione}}{\varepsilon_0}\cdot\ln(R) \\ V(r)=40\cdot10^{-3}V \Leftrightarrow -\dfrac{r\cdot\sigma_{riposo}}{\varepsilon_0}\cdot\ln(r)+\cos t=-70\cdot10^{-3}V \end{cases} \Rightarrow \frac{r\cdot\sigma_{eccitazione}}{\varepsilon_0}\cdot\ln(\frac{R}{r})=40\cdot10^{-3}V$$

cioè

$$\sigma_{eccitazione}=40\cdot10^{-3}V\cdot\frac{\varepsilon_0}{r\cdot\ln(\frac{R}{r})}=40\cdot10^{-3}\cdot\frac{8{,}85\cdot10^{-12}}{470\cdot10^{-9}}\cdot\frac{1}{\ln(\frac{479}{470})}\cdot\frac{C}{m^2}=39.76\cdot10^{-6}\cdot\frac{C}{m^2}$$

Allora quanto vale la carica Q che transita da fuori a dentro l'assone quando viene generato un potenziale di azione? Detta l la lunghezza della sezione di assone interessata da un potenziale di azione (l=2 mm)**,** allora si ha

$$Q=\left(\sigma_{eccitazione}-\sigma_{riposo}\right)\cdot2\pi\cdot r\cdot l=687\cdot10^{-6}\cdot r\cdot l\cdot\frac{C}{m^2}=6.45\cdot10^{-13}\cdot C$$

Durante la propagazione dell'impulso nervoso lungo l'assone è come se si realizzasse uno spostamento di una siffatta carica lungo la faccia interna della membrana dell'assone (in realtà non è così, lo spostamento di tale carica avviene attraverso la membrana, ma l'effetto finale è quello). Considerando l'assone come un filo conduttore, quale ne risulta la resistività?
Se il potenziale di azione percorre 2 millimetri in un millisecondo, l'intensità di corrente vale

$$I=\frac{1000\cdot Q}{s}=6.45\cdot10^{-10}\cdot A\textbf{.}$$

Considerando una d.d.p. $\Delta V=110\cdot10^{-3}V$ fra gli estremi di questo tratto di assone, si ha

$$\begin{cases} R = \dfrac{\Delta V}{I} = \dfrac{110 \cdot 10^{-3}}{6.45 \cdot 10^{-10}}\,\Omega = 17 \cdot 10^{7}\,\Omega \\ R = \rho \cdot \dfrac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot r^{2}}\,m \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{17 \cdot 10^{7} \cdot \pi \cdot r^{2}}{2 \cdot 10^{-3}} \frac{\Omega}{m} = 5.9 \cdot 10^{-2}\,\Omega m\,.$$