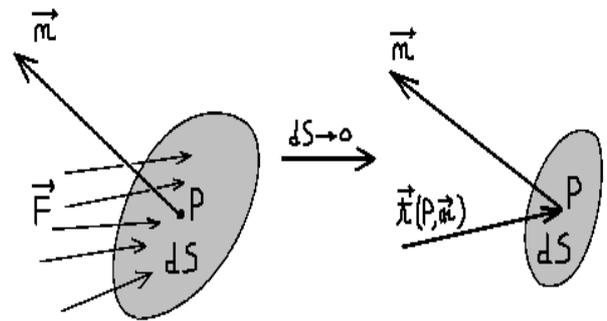


Capitolo 1. Sforzi

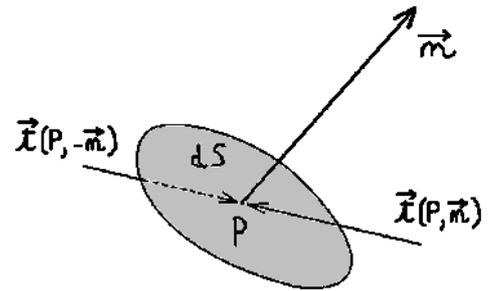
1.1. Sforzo. Sia data una superficie dS orientata dal versore normale \vec{n} e centrata nel punto P . Definisco sforzo agente in P secondo il versore \vec{n} , il limite

$$\vec{t}(P, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{dS}$$



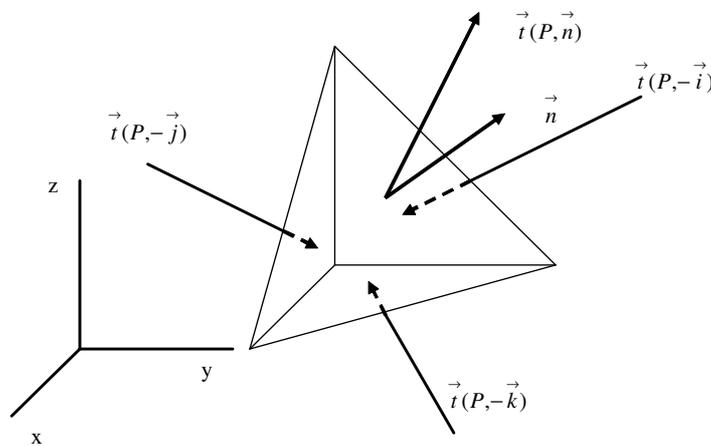
dove \vec{F} è la forza globalmente agente sulla superficie dS dalla parte di spazio verso cui punta il versore \vec{n} . La condizione di annullamento della risultante della sollecitazione agente su una superficie elementare, all'equilibrio, porge

$$1.1) \quad \vec{t}(P, \vec{n}) + \vec{t}(P, -\vec{n}) = 0 \Leftrightarrow \vec{t}(P, \vec{n}) = -\vec{t}(P, -\vec{n})$$



il che rappresenta la proprietà fondamentale degli sforzi.

1.2. Relazioni di Cauchy. Consideriamo una porzione tetraedrica di un corpo solido. Questo tetraedro sia intorno al punto P . Il tetraedro abbia anche gli spigoli orientati parallelamente



agli assi del sistema di riferimento. In caso di quiete la risultante delle forze agenti su questa porzione di corpo deve essere nulla, cioè deve aversi

$$\vec{t}(P, -\vec{i})\Delta S_x + \vec{t}(P, -\vec{j})\Delta S_y + \vec{t}(P, -\vec{k})\Delta S_z + \vec{t}(P, \vec{n})\Delta S + \vec{F}\Delta V = \vec{0}$$

Avendo indicato $\vec{F}(P)$ la risultante delle forze di volume agenti sul tetraedro. Dividendo per ΔS e osservando, con veloci valutazioni geometriche, che

$$\Delta S \cdot n_x = \Delta S_x \Rightarrow n_x = \Delta S_x / \Delta S$$

$$\Delta S \cdot n_y = \Delta S_y \Rightarrow n_y = \Delta S_y / \Delta S$$

$$\Delta S \cdot n_z = \Delta S_z \Rightarrow n_z = \Delta S_z / \Delta S$$

si ottiene

$$\vec{t}(P, -\vec{i})n_x + \vec{t}(P, -\vec{j})n_y + \vec{t}(P, -\vec{k})n_z + \vec{t}(P, \vec{n}) + F \frac{\Delta V}{\Delta S} = \vec{0}$$

Effettuando il limite per $\Delta S \rightarrow 0$ si annulla l'ultimo addendo a primo membro. Ricordando poi la **1.1** otteniamo

$$1.2) \quad \vec{t}(P, \vec{n}) = \vec{t}(P, \vec{i})n_x + \vec{t}(P, \vec{j})n_y + \vec{t}(P, \vec{k})n_z$$

Definendo poi le componenti dei vettori $\vec{t}(P, \vec{j}), \vec{t}(P, \vec{i}), \vec{t}(P, \vec{k})$ con la simbologia seguente¹

$$\vec{t}(P, \vec{i}) = \sigma_x(P)\vec{i} + \tau_{xy}(P)\vec{j} + \tau_{xz}(P)\vec{k}$$

$$1.3) \quad \vec{t}(P, \vec{j}) = \tau_{yx}(P)\vec{i} + \sigma_y(P)\vec{j} + \tau_{yz}(P)\vec{k}$$

$$\vec{t}(P, \vec{k}) = \tau_{zx}(P)\vec{i} + \tau_{zy}(P)\vec{j} + \sigma_z(P)\vec{k}$$

la **1.2** si può riscrivere

$$1.4) \quad \begin{cases} t_x(P, \vec{i}) = \sigma_x(P)n_x(P) + \tau_{xy}(P)n_y(P) + \tau_{xz}(P)n_z(P) \\ t_y(P, \vec{j}) = \tau_{yx}(P)n_x(P) + \sigma_y(P)n_y(P) + \tau_{yz}(P)n_z(P) \\ t_z(P, \vec{k}) = \tau_{zx}(P)n_x(P) + \tau_{zy}(P)n_y(P) + \sigma_z(P)n_z(P) \end{cases}$$

che sono appunto le relazioni di Cauchy.

1.3. Tensore degli sforzi. Si dice tensore degli sforzi la matrice² del terzo ordine

$$1.5) \quad T(P) = \begin{pmatrix} \sigma_x(P) & \tau_{xy}(P) & \tau_{xz}(P) \\ \tau_{yx}(P) & \sigma_y(P) & \tau_{yz}(P) \\ \tau_{zx}(P) & \tau_{zy}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix}$$

¹ Nei testi è possibile anche trovare τ_{xx} al posto di σ_x , τ_{yy} al posto di σ_y e τ_{zz} al posto di σ_z .

² Questa matrice è funzione di punto, essendolo i suoi elementi.

Con questa simbologia le relazioni di Cauchy **1.4** si possono scrivere

$$1.6) \quad \vec{t}(P, \vec{n}) = T(P) \vec{n}(P) = \begin{pmatrix} \sigma_x(P) & \tau_{xy}(P) & \tau_{xz}(P) \\ \tau_{yx}(P) & \sigma_y(P) & \tau_{yz}(P) \\ \tau_{zx}(P) & \tau_{zy}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x(P) \\ n_y(P) \\ n_z(P) \end{pmatrix}$$

Gli elementi del tensore degli sforzi sono detti **componenti speciali di tensione**. Conoscere il valore del tensore degli sforzi in un dato punto, vuol dire, come si vede, poter conoscere, per quel punto, la tensione relativa a qualsivoglia giacitura (cioè a qualsivoglia valore del versore normale).

1.4. Simmetria del tensore degli sforzi e operatore simmetrico. Vogliamo dimostrare qui che il tensore degli sforzi è una matrice simmetrica, ovvero che $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Per far ciò consideriamo una porzione Ω di un generico corpo in stato di quiete. Lo stato di quiete si realizza se e solo se si verificano contemporaneamente le due condizioni

- la risultante della sollecitazione agente su Ω deve essere nulla;
- il momento totale (rispetto a un punto comunque scelto) della sollecitazione agente su Ω sia nullo.

La prima condizione porge³

$$\int_{\partial\Omega} \vec{t}(P, \vec{n}) dS + \int_{\Omega} \vec{F}(P) dV = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\partial\Omega} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) dS + \int_{\Omega} F_x dV = 0 \\ \int_{\partial\Omega} (\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) dS + \int_{\Omega} F_y dV = 0 \\ \int_{\partial\Omega} (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z) dS + \int_{\Omega} F_z dV = 0 \end{cases}$$

Applicando il teorema della divergenza si hanno allora le tre condizioni

$$\begin{aligned} a) \quad & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x \right) dV = 0 \\ b) \quad & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y \right) dV = 0 \\ c) \quad & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z \right) dV = 0 \end{aligned}$$

Ora consideriamo la seconda condizione. Calcolando il momento totale rispetto all'origine O del sistema di riferimento, abbiamo

³ Si è introdotta la forza di volume $\vec{F}(P)$ che rappresenta forze gravitazionali o elettromagnetiche o centrifughe..., cioè forze non di contatto agenti a distanza sulla massa del corpo.

$$\int_{\partial\Omega} \left(\vec{t}(P, \vec{n}) \times \vec{PO} \right) dS + \int_{\Omega} \left(\vec{F}(P) \times \vec{PO} \right) dV = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\partial\Omega} (yt_{nz} - zt_{ny}) dS - \int_{\Omega} (zF_y - yF_z) dV = 0 \\ \int_{\partial\Omega} (zt_{nx} - xt_{nz}) dS - \int_{\Omega} (xF_z - zF_x) dV = 0 \\ \int_{\partial\Omega} (xt_{ny} - yt_{nx}) dS - \int_{\Omega} (yF_x - xF_y) dV = 0 \end{cases}$$

Considerando solo la prima relazione e sviluppando abbiamo

$$\int_{\partial\Omega} \left((y\tau_{zx}n_x + y\tau_{zy}n_y + y\sigma_zn_z) - (z\tau_{yx}n_x + z\sigma_y n_y + z\tau_{yz}n_z) \right) dS - \int_{\Omega} (zF_y - yF_z) dV = 0$$

Applicando il teorema della divergenza al primo integrale abbiamo

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial y\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial y\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial y\sigma_z}{\partial z} + yF_z \right) - \left(\frac{\partial z\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial z\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial z\tau_{yz}}{\partial z} + zF_y \right) \right) dV = 0 \Leftrightarrow \\ & \int_{\Omega} \left(\left(y \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \tau_{zy} + y \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + y \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + yF_z \right) - \left(z \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + z \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \tau_{yz} + z \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + zF_y \right) \right) dV = 0 \Leftrightarrow \\ & \int_{\Omega} \left(y \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \tau_{zy} + y \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + y \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + yF_z \right) dV = \int_{\Omega} \left(z \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + z \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \tau_{yz} + z \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + zF_y \right) dV \end{aligned}$$

Se adesso sostituisco in questa equazione le relazioni **b** e **c**, ricavate imponendo la condizione di annullamento della sollecitazione risultante, ottengo

$$\int_{\Omega} \tau_{zy}(P) dV = \int_{\Omega} \tau_{yz}(P) dV$$

che, per l'arbitrarietà di Ω , porta appunto alla identità $\tau_{zy}(P) = \tau_{yz}(P)$ in ogni punto del corpo. Procedendo allo stesso modo con ciascuna delle altre due condizioni scalari di annullamento del momento risultante si perviene alle altre due identità cercate.

Dalla simmetria del tensore degli sforzi deriva la considerazione che l'operatore lineare $\vec{t}(P, \hat{n}) = T(P) \cdot \hat{n}$ risulta essere un operatore simmetrico.

1.5. Generica componente lungo una direzione. Consideriamo lo sforzo nel punto P e rispetto alla giacitura individuata dal versore \vec{n} , ovvero il vettore $\vec{t}(P, \vec{n})$. Indichiamo la componente dello sforzo l'ungo l'asse orientato individuato dal generico vettore \vec{m} come

$$1.7) \quad \tau_{nm} = \vec{t}(P, \vec{n}) \cdot \vec{m}$$

Si vede che questa notazione è coerente con quella usata per le componenti speciali di tensione. Si trova che

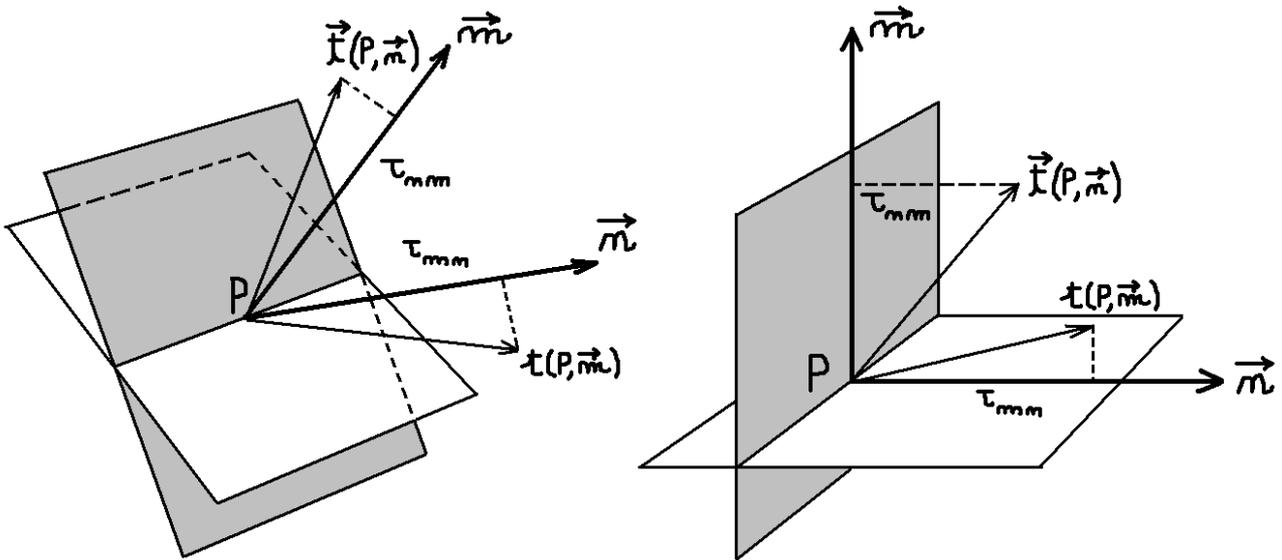
$$1.8) \quad \tau_{nm} = \sigma_x n_x m_x + \sigma_y n_y m_y + \sigma_z n_z m_z + \tau_{xy} (n_x n_y + m_x m_y) + \tau_{xz} (n_x n_z + m_x m_z) + \tau_{yz} (n_y n_z + m_y m_z)$$

infatti

$$\begin{aligned} \tau_{nm} &= \left(T(P) \vec{n} \right)^T \vec{m} = \left(\vec{n} \right)^T T(P) \vec{m} = \\ &= \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \sigma_x + m_y \tau_{xy} + m_z \tau_{xz} \\ m_x \tau_{yx} + m_y \sigma_y + m_z \tau_{yz} \\ m_x \tau_{zx} + m_y \tau_{zy} + m_z \sigma_z \end{pmatrix} = \\ &= n_x m_x \sigma_x + n_x m_y \tau_{xy} + n_x m_z \tau_{xz} + n_y m_x \tau_{yx} + n_y m_y \sigma_y + n_y m_z \tau_{yz} + n_z m_x \tau_{zx} + n_z m_y \tau_{zy} + n_z m_z \sigma_z = \\ &= \sigma_x n_x m_x + \sigma_y n_y m_y + \sigma_z n_z m_z + \tau_{xy} (n_x n_y + m_x m_y) + \tau_{xz} (n_x n_z + m_x m_z) + \tau_{yz} (n_y n_z + m_y m_z) \end{aligned}$$

1.6. Principio di reciprocità. Assegnati in P due versori \vec{n}, \vec{m} risulta che

$$1.9) \quad \vec{t}(P, \vec{n}) \cdot \vec{m} = \vec{t}(P, \vec{m}) \cdot \vec{n}^4$$



che si scrive anche

$$\tau_{nm}(P) = \tau_{mn}(P)$$

Questa relazione, detta **principio di reciprocità**, si dimostra sfruttando la simmetria del tensore degli sforzi. Infatti il primo membro della **1.9**, trasformando il prodotto scalare in un prodotto tra vettori grazie all'uso della trasposizione, si può scrivere

$$\left(T(P) \vec{n} \right)^T \vec{m} = \left(\vec{n} \right)^T \left(T(P) \right)^T \vec{m} = \left(\vec{n} \right)^T T(P) \vec{m}$$

dove si è considerato che la trasposta di una matrice simmetrica è la matrice stessa. D'altra parte per la proprietà commutativa del prodotto scalare, il secondo membro della **1.9** si scrive proprio

⁴ Si rileva che questa proprietà non è altro che la proprietà fondamentale degli operatori simmetrici (anzi la proprietà con la quale li si definisce). E in effetti la funzione $\vec{t}(P, \hat{n}) = T(P) \cdot \hat{n}$ altro non è se non un operatore simmetrico.

$$\vec{n} \cdot \vec{t}(P, \vec{m}) = \left(\vec{n} \right)^T T(P) \vec{m}$$

1.7. Tensione normale. Detta tensione normale la componente $\sigma_n = \tau_m = \vec{t}(P, \vec{n}) \cdot \vec{n}$ si dimostra che

$$1.10) \quad \sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{xz} n_x n_z + 2\tau_{yz} n_y n_z$$

infatti

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \left(T(P) \vec{n} \right)^T \vec{n} = \left(\vec{n} \right)^T T(P) = \\ &= \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{pmatrix} = \\ &= \sigma_x n_x^2 + \tau_{xy} n_x n_y + \tau_{xz} n_x n_z + \tau_{yx} n_x n_y + \sigma_y n_y^2 + \tau_{yz} n_y n_z + \tau_{zx} n_x n_z + \tau_{zy} n_y n_z + \sigma_z n_z^2 = \\ &= \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{xz} n_x n_z + 2\tau_{yz} n_y n_z \end{aligned}$$

1.8. Tensione tangenziale. Definisco tensione tangenziale la quantità

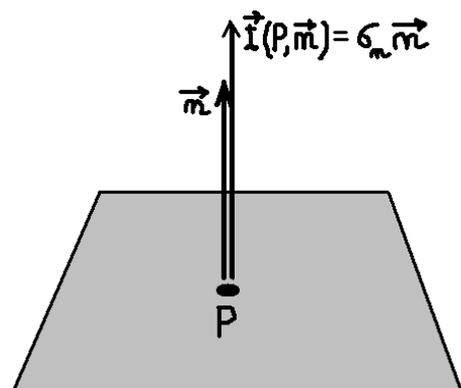
$$1.11) \quad \tau_n = \sqrt{\left| \vec{t}(P, \vec{n}) \right|^2 - \sigma_n^2}$$

Si osserva che questa quantità è definita positiva e dunque non è una componente, come invece lo è la tensione normale.

1.9. Direzione principale di tensione. Dato un punto P diciamo che il versore \vec{n} individua una direzione principale di tensione quando si verifica che

$$1.12) \quad \vec{t}(P, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n}$$

Cioè lo sforzo relativo a quella giacitura non ha componenti tangenziali. La componente normale prende il nome in questo caso di **componente principale di tensione**.



1.10. Ricerca delle direzioni principali di tensione. Poniamoci il problema di trovare la (una deve esserci per forza) o le direzioni principali di tensione per un dato punto P . Deve essere verificata la 1.12 la quale si può scrivere

$$1.13) \quad T(P) \vec{n} = \sigma_n \vec{n} \Leftrightarrow T(P) \vec{n} - \sigma_n \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (T(P) - \sigma_n I) \vec{n} = 0$$

Allora si deduce che

- le componenti principali di tensione sono gli autovalori di T , e si ricavano dunque risolvendo, rispetto σ_n , l'equazione di terzo grado

$$\det(T - \sigma_n I) = 0$$

- le relative direzioni principali di tensione sono individuate dai relativi autovettori di T e si ricavano sostituendo le soluzioni della equazione scalare in quella vettoriale

Si deve poi notare che, in base ai risultati dell'Algebra Lineare, essendo T una matrice simmetrica

- essa ammette sempre tre autovalori reali
- essa ammette sempre una base di autovettori ortonormali

Dunque le direzioni principali sono ortogonali fra loro. Tuttavia possono aversi tre casi:

- **3 autovalori distinti:** allora si hanno tre direzioni principali di tensione fra loro ortogonali;
- **2 autovalori distinti**⁵: allora si avrà una direzione principale di tensione in corrispondenza dell'autovalore singolo, e in corrispondenza dell'autovalore doppio un piano tale per cui tutte le sue direzioni passanti per P sono direzioni principali di tensione⁶;
- **1 autovalore distinto:** allora ogni direzione per P è una direzione principale di tensione, la cui componente principale è il solo autovalore trovato.

Orientando il sistema di riferimento in modo che gli assi si sovrappongano alle direzioni principali di tensione il tensore degli sforzi assume forma diagonale e si ha

$$\vec{t}(P, \vec{n}) = T^i(P) \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \vec{n}$$

1.11. Invarianti di tensione. Gli invarianti di tensione sono gli invarianti del tensore degli sforzi. Queste quantità sono così dette in quanto non cambiano al cambiare del sistema di riferimento. Si ha l'invariante lineare

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

l'invariante quadratico

$$I_2 = - \left(\begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \right) = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z)$$

e l'invariante cubico

⁵ Uno dei due avrà molteplicità algebrica due, come soluzione della equazione caratteristica del tensore, ovvero della equazione $\det(T - \sigma_n I) = 0$.

⁶ Questo piano è anche piano delle tensioni (cioè si avrà stato tensionale piano) se e solo se l'autovalore a molteplicità singola è nullo.

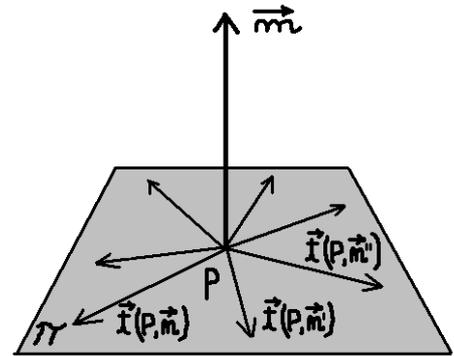
$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - (\sigma_x \sigma_{yz}^2 + \sigma_y \sigma_{xz}^2 + \sigma_z \sigma_{xy}^2)$$

Gli invarianti risultano utili al momento della soluzione della equazione caratteristica del tensore degli sforzi. Infatti risulta

$$\det(T - \sigma I) = \sigma^3 - \sigma^2 I_1 - \sigma I_2 - I_3$$

1.12. Stato tensionale piano. Si dice che in P si ha uno stato tensionale piano quando

$$1.14) \quad \exists \vec{m} \mid \vec{t}(P, \vec{n}) \cdot \vec{m} = 0, \forall \vec{n}$$



Il piano che contiene ogni sforzo relativo al punto P è detto **piano delle tensioni**. Dimostro alcune proprietà notevoli dello stato tensionale piano (si prenda come riferimento questa figura)

A) In P si ha stato tensionale piano, con piano ortogonale al versore \vec{m} , se e solo se

$$\exists \vec{m} \mid \vec{t}(P, \vec{m}) = 0$$

Infatti se si ha stato tensionale piano allora, per la **1.14**, risulta $\vec{t}(P, \vec{n}) \cdot \vec{m} = 0, \forall \vec{n}$ che, per il principio di reciprocità **1.9**, comporta $\vec{t}(P, \vec{m}) \cdot \vec{n} = 0, \forall \vec{n}$ ovvero necessariamente $\vec{t}(P, \vec{m}) = 0$; viceversa se vale la tesi allora, facendo il ragionamento inverso, si trova che deve essere $\vec{t}(P, \vec{n}) \cdot \vec{m} = 0, \forall \vec{n}$ e dunque il piano ortogonale al versore \vec{m} è piano delle tensioni.

B) Se π è piano delle tensioni relativamente al punto P , allora la direzione ortogonale a π è direzione principale di tensione e la sua componente principale vale zero. Viceversa se una direzione principale ha componente principale nulla, allora il piano a essa ortogonale è piano delle tensioni. Infatti se si fa l'ipotesi del piano delle tensioni si deve avere per la **1.14**

$$\vec{t}(P, \vec{n}) \cdot \vec{m} = 0, \forall \vec{n}$$

Mentre se si fa l'ipotesi della direzione principale con componente principale nulla, per la **1.12**, e applicando il principio di reciprocità si ha

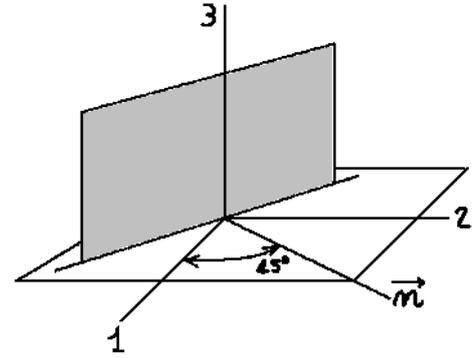
$$\vec{t}(P, \vec{m}) = 0 \Leftrightarrow \vec{t}(P, \vec{m}) \cdot \vec{n} = 0, \forall \vec{n} \Leftrightarrow \vec{t}(P, \vec{n}) \cdot \vec{m} = 0, \forall \vec{n}$$

C) In P si ha stato tensionale piano se e solo se il determinante del tensore delle tensioni vale zero. Infatti siano $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ le tre componenti principali. Allora il determinante del tensore delle tensioni si scrive

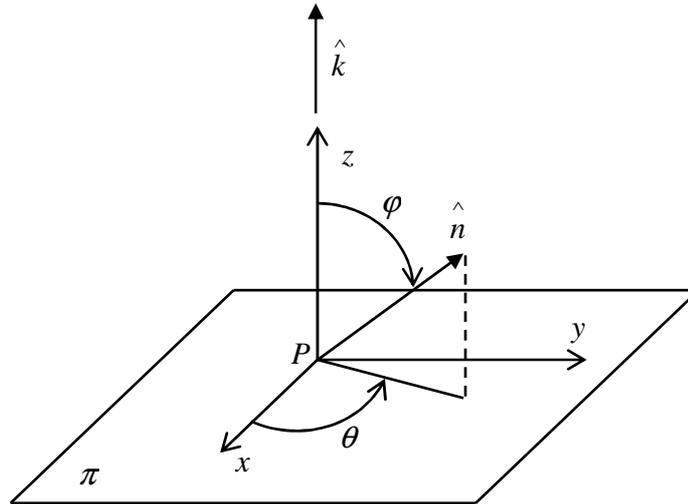
$$\det T = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Allora se vale zero, almeno una delle componenti principali è nulla e dunque, per la proprietà B, si ha stato tensionale piano. Viceversa, se sia ha stato tensionale piano, sempre per la B, almeno una delle componenti principali vale zero, e dunque il determinante è nullo.

D) La tensione tangenziale massima, per giaciture che siano ortogonali al piano di tensione, si ha quando \vec{n} forma un angolo di 45° con le due direzioni principali del piano di tensione (vedi figura). La dimostrazione la si rimanda alla parte sui circoli di Mohr.



Le proprietà dello stato tensionale piano possono essere dimostrate anche ricavando direttamente il tensore degli sforzi per uno stato tensionale piano. A tale scopo si consideri il sistema di riferimento in figura e si assuma che il piano delle tensioni rispetto al punto P sia il piano xy .



Allora -in base alla definizione 1.14 di stato tensionale piano- deve essere

$$\begin{aligned} \vec{t}(P, \vec{n}) \cdot \vec{k} = 0, \forall \vec{n} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x(P) & \tau_{xy}(P) & \tau_{xz}(P) \\ \tau_{yx}(P) & \sigma_y(P) & \tau_{yz}(P) \\ \tau_{zx}(P) & \tau_{zy}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \forall \vec{n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x(P) & \tau_{xy}(P) & \tau_{xz}(P) \\ \tau_{yx}(P) & \sigma_y(P) & \tau_{yz}(P) \\ \tau_{zx}(P) & \tau_{zy}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \forall \varphi \in [0, \pi], \forall \theta \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x(P) \sin \varphi \cos \theta + \tau_{xy}(P) \sin \varphi \sin \theta + \tau_{xz}(P) \cos \varphi \\ \tau_{yx}(P) \sin \varphi \cos \theta + \sigma_y(P) \sin \varphi \sin \theta + \tau_{yz}(P) \cos \varphi \\ \tau_{zx}(P) \sin \varphi \cos \theta + \tau_{zy}(P) \sin \varphi \sin \theta + \sigma_z(P) \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \forall \varphi \in [0, \pi], \forall \theta \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tau_{zx}(P) \sin \varphi \cos \theta + \tau_{zy}(P) \sin \varphi \sin \theta + \sigma_z(P) \cos \varphi = 0, \forall \varphi \in [0, \pi], \forall \theta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Ponendo nella condizione qui sopra in particolare $\varphi = 0$ si ricava

$$\sigma_z(P) = 0$$

Ponendo poi $\theta = 0$ si ricava

$$\Leftrightarrow \tau_{zx}(P) \sin \varphi = 0, \forall \varphi \in [0, \pi] \Leftrightarrow \tau_{zx}(P) = 0$$

Dunque si ha la condizione

$$\tau_{zy}(P) \sin \varphi \sin \theta = 0, \forall \varphi \in [0, \pi], \forall \theta \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \tau_{zy}(P) = 0$$

Con ciò possiamo concludere che il tensore delle tensioni relativo allo stato piano di piano xy si scrive

$$T(P) = \begin{pmatrix} \sigma_x(P) & \tau_{xy}(P) & 0 \\ \tau_{yx}(P) & \sigma_y(P) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando questo tensore si possono poi immediatamente dimostrare le proprietà A, B, C, D.

1.13. Equazioni indefinite di equilibrio. Nel paragrafo 1.4 si è visto come imporre che la risultante delle forze, agenti sulla generica porzione Ω di corpo, sia nulla, porta alla scrittura delle tre equazioni **a,b,c** le quali, vista appunto la genericità di Ω , si possono scrivere

$$1.15) \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases}$$

Dove si ricorda che il campo vettoriale $\vec{F} = \vec{F}(P)$ descrive le forze di volume, ovvero forze elettriche, forza gravitazionale, forze apparenti...

Diciamo ora che sia $\vec{p} = \vec{p}(P)$ il campo vettoriale che descrive le forze esterne che agiscono sulla superficie del corpo. Allora la condizione di equilibrio meccanico impone che tali forze debbano essere bilanciate, in ogni punto della superficie esterna, dagli sforzi interni del corpo. Se indico allora \vec{n} il campo normale alla superficie esterna, con verso che punta l'esterno, posso imporre la condizione al contorno

$$\vec{p}(P) + \vec{t}(P, -\vec{n}) = 0 \Leftrightarrow \vec{p}(P) = -\vec{t}(P, -\vec{n}) = \vec{t}(P, \vec{n}) = T(P, \vec{n})\vec{n}$$

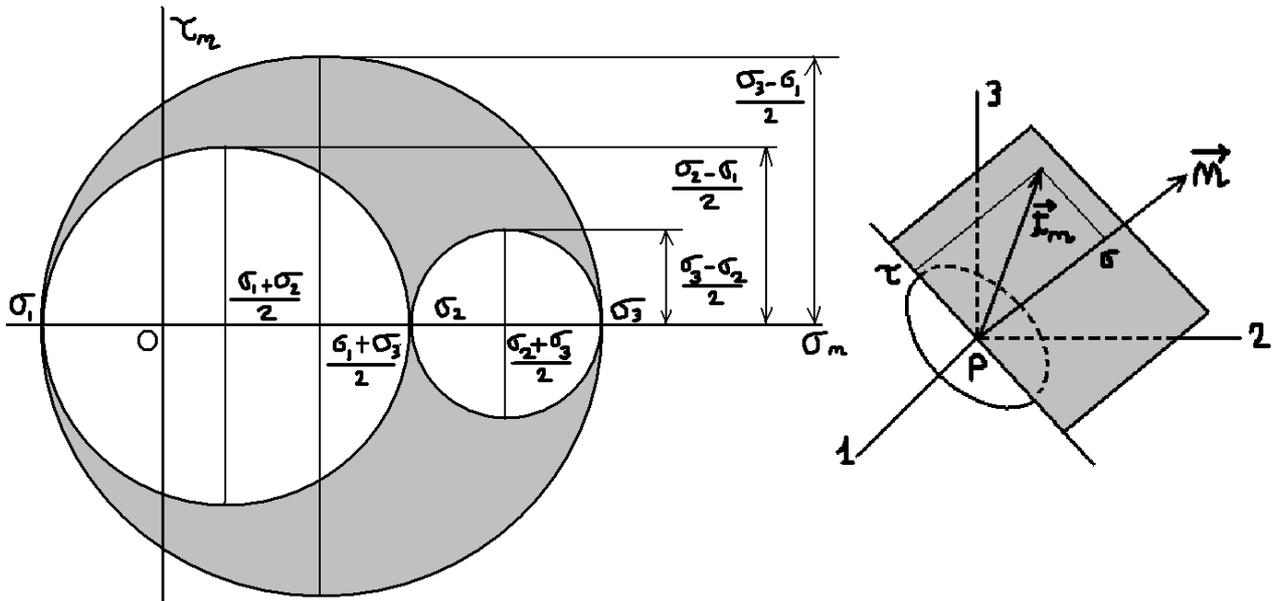
che si traduce nelle relazioni scalari

$$1.16) \begin{cases} p_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ p_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ p_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{cases}$$

Il sistema delle tre equazioni, con le relative condizioni al contorno, è detto indefinito in quanto le sei funzioni (considerando la simmetria del tensore degli sforzi) che vi compaiono non possono essere ricavate in base a esso (e questo non lo so dimostrare non sapendo nulla di equazioni differenziali alle derivate parziali). Occorrono cioè ulteriori indicazioni.

Capitolo 2. Sforzi e Circoli di Mohr

2.1. Stato tensionale generico. Gli assi 123 indichino le direzioni principali nel punto P



e il versore \vec{n} indichi la generica giacitura. Allora posso considerare le tre condizioni

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \tau_n^2 &= \vec{t}(P, \vec{n})^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1\end{aligned}$$

le quali costituiscono un sistema lineare in tre equazioni nelle tre incognite n_1^2, n_2^2, n_3^2 , la cui soluzione (il calcolo non l'ho mai fatto e il risultato l'ho preso da Capurso pag 106) risulta essere

$$2.1) \quad \begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + \sigma_n^2 - (\sigma_3 + \sigma_2)\sigma_n + \sigma_2\sigma_3}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \\ n_2^2 = -\frac{\tau_n^2 + \sigma_n^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma_n + \sigma_1\sigma_3}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + \sigma_n^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_n + \sigma_1\sigma_2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases}$$

Fissando, la cosa è arbitraria, che sia $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ e imponendo che i secondi membri delle tre relazioni di cui sopra, siano non negativi (come deve evidentemente essere) si trovano le tre condizioni

$$\begin{aligned}c.1) \quad & \tau_n^2 + \sigma_n^2 - (\sigma_3 + \sigma_2)\sigma_n + \sigma_2\sigma_3 \geq 0 \\ c.2) \quad & \tau_n^2 + \sigma_n^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma_n + \sigma_1\sigma_3 \leq 0 \\ c.3) \quad & \tau_n^2 + \sigma_n^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_n + \sigma_1\sigma_2 \geq 0\end{aligned}$$

Ma a primo membro abbiamo delle circonferenze del piano (σ_n, τ) aventi raggi e centri dati rispettivamente da

$$\text{c.1)} \quad R = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \quad C \equiv \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)$$

$$\text{c.2)} \quad R = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad C \equiv \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)$$

$$\text{c.3)} \quad R = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \quad C \equiv \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)$$

Considerando tali circonferenze e le condizioni **c.1**, **c.2**, **c.3** si costruisce il disegno riportato da cui è possibile leggere le seguenti proprietà del generico stato tensionale:

- i punti (σ_n, τ) , cioè il valore della tensione normale e della relativa tensione tangenziale secondo la generica giacitura, possono cadere solo nella porzione di spazio ombreggiata;
- la tensione tangenziale massima vale

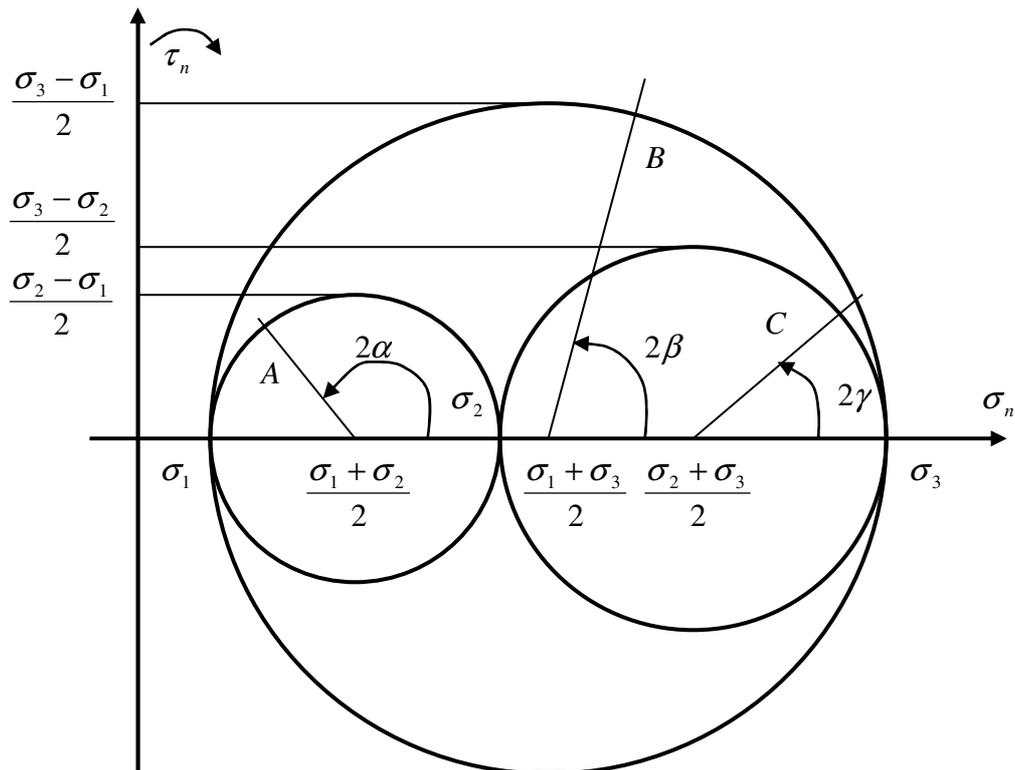
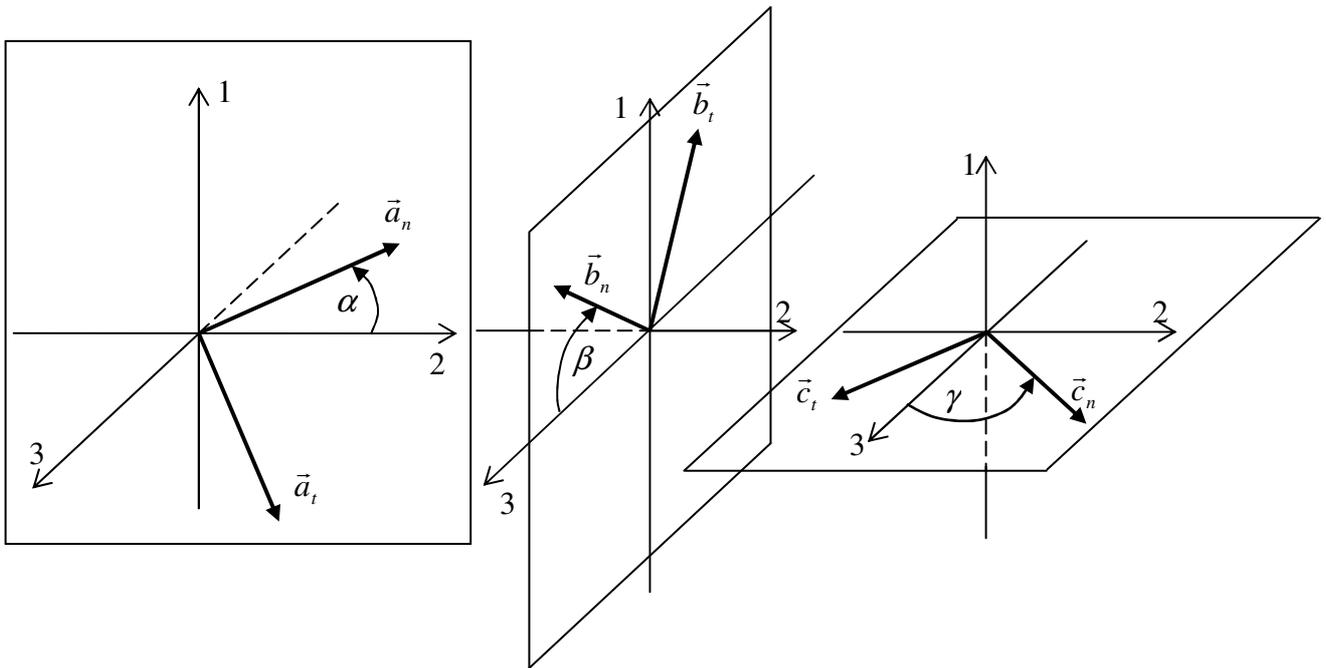
$$\tau_n = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

e si ha per $\sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Per cui, per ottenere la giacitura in cui essa si realizza basta sostituire tali valori nel sistema **2.1**.

Si deve precisare che, secondo la definizione **1.11**, τ_n sarebbe una quantità definita positiva, quindi a rigore la figura dovrebbe essere sprovvista della parte inferiore.

2.2. Stato tensionale generico: raffiniamo l'analisi. Adesso vediamo come si possano trarre ulteriori informazioni sullo stato tensionale del punto P attraverso i circoli di Mohr. Siano 123 gli assi di riferimento orientati secondo le direzioni principali e $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ le relative tensioni principali.

- Il versore \vec{a}_n indica la generica giacitura nel piano 12, \vec{a}_t è il versore ad esso ortogonale il cui verso è tale da indicare la rotazione **oraria**, rispetto all'asse 3, della materia che sta sotto la giacitura.
- Il versore \vec{b}_n indica la generica giacitura nel piano 13, \vec{b}_t è il versore ad esso ortogonale il cui verso è tale da indicare la rotazione **oraria**, rispetto all'asse 2, della materia che sta sotto la giacitura.
- Il versore \vec{c}_n indica la generica giacitura nel piano 23, \vec{c}_t è il versore ad esso ortogonale il cui verso è tale da indicare la rotazione **oraria**, rispetto all'asse 1, della materia che sta sotto la giacitura.



Affinché il procedimento che illustrerò funzioni, nel disegno del sistema di riferimento e dei versori si devono rispettare le seguenti regole:

- al primo asse cartesiano va associata la direzione principale con componente principale di maggior valore, al secondo la direzione principale relativa alla componente principale di valore intermedio, per finire con il terzo asse che dovrà avere la direzione uguale alla direzione principale associata alla componente principale di valore minore (quindi il primo asse è 3, il secondo è 2, il terzo è 1);

- gli angoli α, β, γ devono andare dalla direzione principale associata a componente principale di maggior valore a quella associata alla componente principale di valore immediatamente inferiore.

I cerchi di Mohr devono poi essere costruiti secondo lo schema indicato in figura. Con queste premesse si dimostra che

- il punto A in figura indica la coppia di valori σ_n, τ_n che si ha in corrispondenza della giacitura individuata dal versore \vec{a}_n , intendendo qui τ_n come la componente dello sforzo $\vec{t}(P, \vec{a}_n)$ rispetto al versore \vec{a}_t , cioè come una quantità algebrica, positiva o negativa, e non come un valore definito positivo, come si è fatto in precedenza;
- il punto B indica la coppia σ_n, τ_n relativa alla giacitura individuata da \vec{b}_n , con τ_n la componente dello sforzo valutata rispetto al versore \vec{b}_t ;
- il punto C indica la coppia σ_n, τ_n relativa alla giacitura individuata da \vec{c}_n , con τ_n la componente dello sforzo valutata rispetto al versore \vec{c}_t .

Mi limito a dimostrare la prima affermazione. Basta valutare direttamente σ_n, τ_n . Per σ_n si ha

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \vec{t}(P, \vec{a}_n) \cdot \vec{a}_n = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} (0 \cos \alpha \sin \alpha) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \cos \alpha \\ \sigma_1 \sin \alpha \end{pmatrix} (0 \cos \alpha \sin \alpha) = \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha = \\ &= \sigma_2 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_1 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cos 2\alpha\end{aligned}$$

Per la relativa tensione tangenziale, valutata rispetto \vec{a}_t , si ha

$$\begin{aligned}\tau_n &= \vec{t}(P, \vec{a}_n) \cdot \vec{a}_t = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} (0 \sin \alpha - \cos \alpha) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \cos \alpha \\ \sigma_1 \sin \alpha \end{pmatrix} (0 \sin \alpha - \cos \alpha) = \sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \sigma_2 \frac{\sin 2\alpha}{2} - \sigma_1 \frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\alpha\end{aligned}$$

Allora dai cerchi così costruiti si deduce la seguente proprietà notevole del generico stato di tensione:

- il valore massimo della componente tangenziale della tensione si realizza in corrispondenza del versore normale che giace nel piano individuato dalla direzione della componente

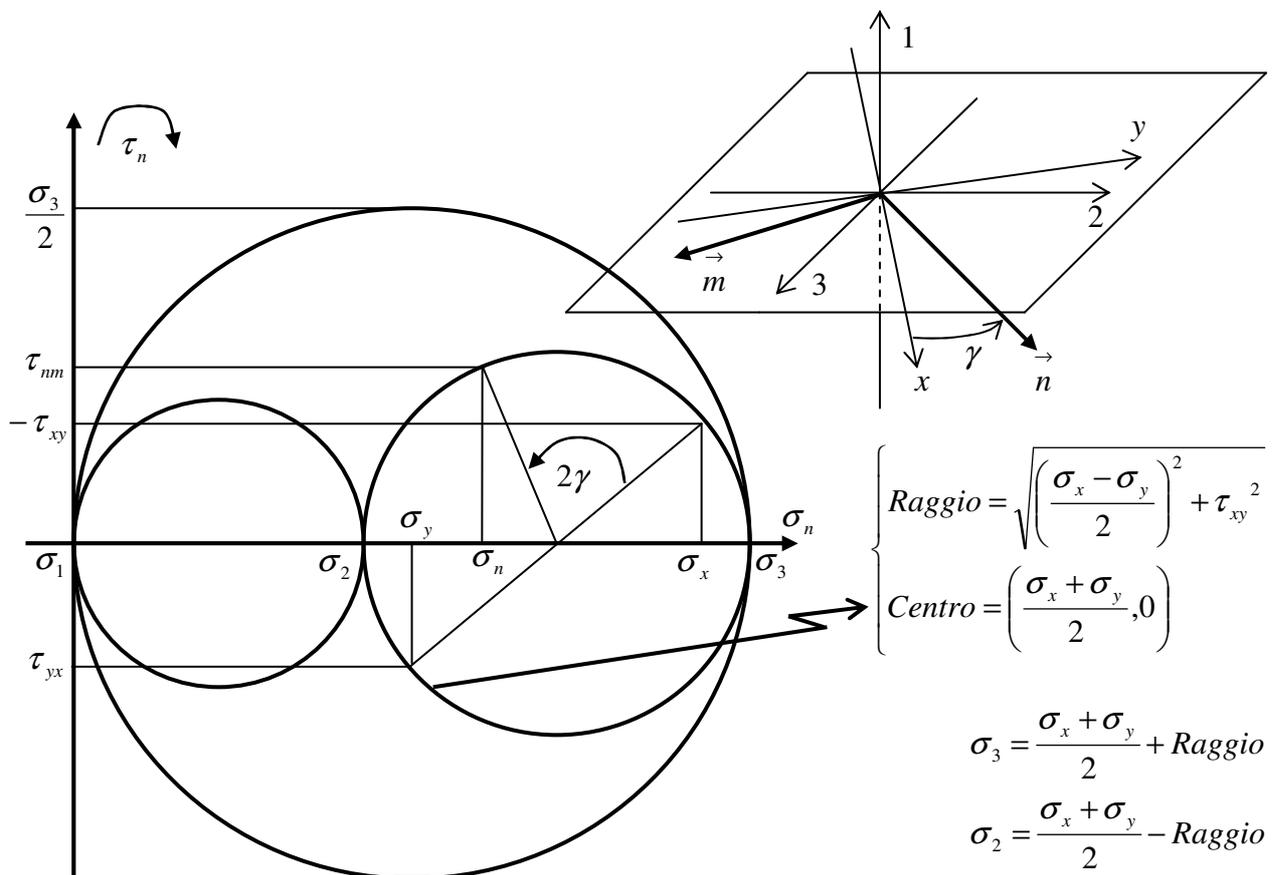
principale massima e dalla direzione della componente principale minima, e che forma con tali assi un angolo di 45° .

Nella nostra figura la giacitura di massima tensione tangenziale è infatti quella individuata dal vettore \vec{b}_n che forma un angolo $\beta = 45^\circ$ con l'asse 3.

2.3. Stato tensionale piano. Nel caso di stato tensionale piano la direzione perpendicolare al piano delle tensioni è direzione principale con componente principale nulla (punto B del paragrafo 1.11). Dunque in questo caso quanto visto nei paragrafi precedenti si particolarizza semplicemente tenendo presente che due dei cerchi di Mohr dovranno passare necessariamente per l'origine del piano σ_n, τ_n . La cosa importante è però che in questo caso i cerchi di Mohr, in particolare il cerchio relativo al piano delle tensioni, permette di determinare

- le due direzioni principali incognite
- i relativi valori delle componenti principali.

Per dimostrarlo riprendiamo la figura del caso generale e diciamo che sia 23 il piano delle tensioni.



Allora $\sigma_1 = 0$ e la figura è quella indicata. Si proceda allora secondo i punti seguenti.

- Introduciamo sul piano delle tensioni la generica coppia di assi xy e la coppia di vettori ortogonali \vec{n}, \vec{m} con il secondo orientato secondo la regola già ricordata di avere il verso tale da indicare (all'asse 1) la rotazione oraria della materia sottostante la giacitura individuata dal primo.

- Noti i valori $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ li riportiamo sul piano σ_n, τ_n tenendo presente che τ_{xy} deve essere preceduta da segno meno nel caso in cui l'asse y indichi all'asse 1 la rotazione antioraria della materia sottostante la giacitura individuata da x. Nel caso in figura l'asse y indica il verso antiorario, quindi τ_{xy} deve essere riportata preceduta da segno meno; supponendo che sia ad esempio $\tau_{xy} < 0$ allora avremo $-\tau_{xy} > 0$ e dunque tale valore si troverà sul semiasse positivo delle τ_n ¹.
- Riportati i due punti $(\sigma_x, \tau_{xy}), (\sigma_y, \tau_{yx})$ sul piano, si traccia la circonferenza di Mohr relativa alle componenti principali σ_2, σ_3 .

Ciò posto si dimostra immediatamente -osservando la figura- che la circonferenza relativa al piano delle tensioni ha centro e raggio dati da

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Raggio} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \text{Centro} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) \end{array} \right.$$

Sono anche immediatamente deducibili dalla figura le relazioni

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \text{Raggio} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \text{Raggio} \end{aligned}$$

Ebbene, tutto ciò posto, i valori di γ i quali individuano le due direzioni principali incognite σ_2, σ_3 sono dati rispettivamente da

$$\gamma_2 = \frac{\pi}{2} + \gamma_3 \quad \gamma_3 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

Le espressioni di γ_2, γ_3 qui riportate si ricavano dalle proprietà già dimostrate per i cerchi di Mohr nel paragrafo 2.2; tuttavia possiamo dimostrarle nuovamente diagonalizzando il tensore degli sforzi, poiché -si ricorda- le direzioni principali coincidono con quelle individuate dagli autovettori del tensore. Effettuo la ricerca degli autovalori e degli autovettori del tensore delle tensioni:

$$T(P) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

¹ Si può notare che se y indica la rotazione antioraria (rispetto 1) della materia sottostante la giacitura individuata da x (come nel caso in figura) allora accade che x indica la rotazione oraria (rispetto 1) della materia sottostante la giacitura individuata da y e dunque τ_{yx} può essere riportata sull'asse τ_n senza dover essere cambiato di segno.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\lambda((\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau_{xy}^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Abbiamo trovato così le due componenti principali di tensione:

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R$$

Troviamo ora la direzione principale relativa a σ_3 :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - R & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - R & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - R\right)x + \tau_{xy}y = 0 \\ \tau_{yx}x - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + R\right)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - R\right)x + \tau_{xy}y = 0 \\ \tau_{xy}x - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + R\right)y = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha rango unitario, infatti il determinante della sua matrice dei coefficienti vale zero:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - R\right) & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + R\right) \end{vmatrix} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + R^2 - \tau_{xy}^2 =$$

$$= -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 - \tau_{xy}^2 = 0$$

dunque il sistema ammette soluzioni non nulle (ne ammette ∞^1) definite da

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - R\right)x + \tau_{xy}y = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \tan \gamma_3 = -\frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) - R}{\tau_{xy}}$$

Pertanto, considerando una nota formula trigonometrica, abbiamo

$$\begin{aligned} \tan 2\gamma_3 &= \frac{2 \tan \gamma_3}{1 - \tan^2 \gamma_3} = \frac{-2 \frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) - R}{\tau_{xy}}}{1 - \left(\frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) - R}{\tau_{xy}}\right)^2} = \frac{-2\tau_{xy} \left(\frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) - R}{\tau_{xy}}\right)}{\tau_{xy}^2 - \left(\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) - R\right)^2} = \\ &= \frac{-\tau_{xy} \left(\frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) - R}{\tau_{xy}}\right)}{-\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + R \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)} = \frac{\tau_{xy} \left(\frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) - R}{\tau_{xy}}\right)}{\left(\frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) - R}{\tau_{xy}}\right) \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)} = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \end{aligned}$$

Esplicitando rispetto a γ_3 troviamo la formula che volevamo dimostrare:

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

2.4. Studio di uno stato tensionale. Diciamo che nel punto P di un corpo sia stato misurato lo stato tensionale

$$T(P) = \begin{pmatrix} \sigma_x(P) & \tau_{xy}(P) & 0 \\ \tau_{yx}(P) & \sigma_y(P) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80MPa & 80MPa & 0 \\ 80MPa & -40MPa & 0 \\ 0 & 0 & 20MPa \end{pmatrix}$$

Voglio inizialmente studiare questo stato tensionale calcolando analiticamente componenti principali e tensioni principali. In un secondo momento invece lo studio attraverso i cerchi di Mohr. Poiché il determinante del tensore delle tensioni è non nullo (vale $-11.200MPa^3$) possiamo già anticipare -per la proprietà C del paragrafo 1.12- che lo stato tensionale non è piano. Calcolo allora le componenti principali di tensione cercando gli autovalori del tensore delle tensioni: σ è un autovalore se e solo se soddisfa la condizione

$$\begin{pmatrix} 80MPa & 80MPa & 0 \\ 80MPa & -40MPa & 0 \\ 0 & 0 & 20MPa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 80MPa & 80MPa & 0 \\ 80MPa & -40MPa & 0 \\ 0 & 0 & 20MPa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 80MPa - \sigma & 80MPa & 0 \\ 80Mpa & -40MPa - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 20MPa - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Affinché questa condizione sia soddisfatta per valori non nulli del vettore $(x \ y \ z)$ deve aversi

$$\begin{vmatrix} 80MPa - \sigma & 80MPa & 0 \\ 80Mpa & -40MPa - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 20MPa - \sigma \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (20MPa - \sigma) \begin{vmatrix} 80MPa - \sigma & 80MPa \\ 80Mpa & -40MPa - \sigma \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (20MPa - \sigma) \begin{vmatrix} 80MPa - \sigma & 80MPa \\ 80Mpa & -40MPa - \sigma \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (20MPa - \sigma)((80MPa - \sigma)(-40MPa - \sigma) - 80Mpa80Mpa) = 0$$

Risolvendo l'equazione di terzo grado in σ si trovano le tre componenti principali

$$\sigma_1 = 20MPa \quad \sigma_2 = -80MPa \quad \sigma_3 = 120MPa$$

Per ciascuna di esse procedo al calcolo della direzione principale. Per la prima si ha

$$\begin{pmatrix} 60MPa & 80MPa & 0 \\ 80Mpa & -60MPa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x60MPa + y80MPa = 0 \\ x80Mpa - y60MPa = 0 \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v}_1 = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R$$

Per la seconda abbiamo

$$\begin{pmatrix} 160MPa & 80MPa & 0 \\ 80Mpa & 40MPa & 0 \\ 0 & 0 & 100MPa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k/2 \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v}_2 = k \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in R$$

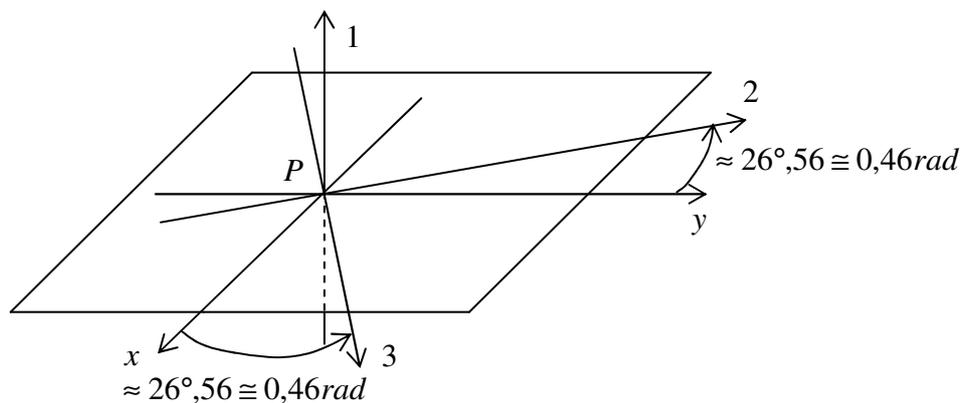
Per la terza abbiamo

$$\begin{pmatrix} -40MPa & 80MPa & 0 \\ 80Mpa & -160MPa & 0 \\ 0 & 0 & -100MPa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v}_3 = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in R$$

Ora normalizzo gli autovettori in modo da avere i coseni direttori delle direzioni principali:

$$|\vec{v}_1| = 1 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow \hat{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\vec{v}_2| = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \hat{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\vec{v}_3| = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \hat{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considerando poi che $\cos^{-1}(2/\sqrt{5}) \cong 0,46rad \cong 26^{\circ},56$ possiamo rappresentare le direzioni principali rispetto al sistema di riferimento originario.



Riportando ora le tensioni principali sul piano di Mhor si hanno i cerchi seguenti.

Capitolo 3. Deformazioni

3.1. Campo degli spostamenti. Sotto l'azione di una sollecitazione esterna un corpo passa da una configurazione iniziale C_0 a una configurazione C . Resta allora definito un campo di spostamenti il quale ad ogni punto del corpo associa lo spostamento dalla posizione iniziale alla posizione finale. Tale campo sia

$$\vec{S} : C_0 \rightarrow C, P \mapsto \vec{S}(P) = \begin{pmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{pmatrix}$$

Preso un punto P_0 si ha che

$$\vec{S}(P) = \vec{S}(P_0) + d\vec{S}[P_0, \Delta x, \Delta y, \Delta z] + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right)$$

dove si deve intendere che $\vec{P_0P} = (\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z)^T$. Esplicitando il differenziale abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{S}(P) &= \begin{pmatrix} u(P_0) \\ v(P_0) \\ w(P_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u(P_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(P_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u(P_0)}{\partial z} \Delta z \\ \frac{\partial v(P_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v(P_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v(P_0)}{\partial z} \Delta z \\ \frac{\partial w(P_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w(P_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w(P_0)}{\partial z} \Delta z \end{pmatrix} + o(\overline{P_0P}) = \\ &= \begin{pmatrix} u(P_0) \\ v(P_0) \\ w(P_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u(P_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(P_0)}{\partial y} & \frac{\partial u(P_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial v(P_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(P_0)}{\partial y} & \frac{\partial v(P_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial w(P_0)}{\partial x} & \frac{\partial w(P_0)}{\partial y} & \frac{\partial w(P_0)}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + o(\overline{P_0P}) = \\ &= \begin{pmatrix} u(P_0) \\ v(P_0) \\ w(P_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u(P_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(P_0)}{\partial y} & \frac{\partial u(P_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial v(P_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(P_0)}{\partial y} & \frac{\partial v(P_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial w(P_0)}{\partial x} & \frac{\partial w(P_0)}{\partial y} & \frac{\partial w(P_0)}{\partial z} \end{pmatrix} \vec{P_0P} + o(\overline{P_0P}) \end{aligned}$$

Scomponendo la matrice nella somma della parte simmetrica e di quella antisimmetrica (come è possibile fare per qualsiasi matrice) si ha

$$\vec{S}(P) = \begin{pmatrix} u(P_0) \\ v(P_0) \\ w(P_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u(P_0)}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(P_0)}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial z} + \frac{\partial w(P_0)}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(P_0)}{\partial x} \right) & \frac{\partial v(P_0)}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(P_0)}{\partial z} + \frac{\partial w(P_0)}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial z} + \frac{\partial w(P_0)}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(P_0)}{\partial z} + \frac{\partial w(P_0)}{\partial y} \right) & \frac{\partial w(P_0)}{\partial z} \end{pmatrix} \vec{P_0 P} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial y} - \frac{\partial v(P_0)}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial z} - \frac{\partial w(P_0)}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial y} - \frac{\partial v(P_0)}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(P_0)}{\partial z} - \frac{\partial w(P_0)}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial z} - \frac{\partial w(P_0)}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(P_0)}{\partial z} - \frac{\partial w(P_0)}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} \vec{P_0 P} + o(\overline{P_0 P})$$

Rimaneggiando il terzo addendo si ha in fine

$$\vec{S}(P) = \begin{pmatrix} u(P_0) \\ v(P_0) \\ w(P_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u(P_0)}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(P_0)}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial z} + \frac{\partial w(P_0)}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(P_0)}{\partial x} \right) & \frac{\partial v(P_0)}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(P_0)}{\partial z} + \frac{\partial w(P_0)}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial z} + \frac{\partial w(P_0)}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(P_0)}{\partial z} + \frac{\partial w(P_0)}{\partial y} \right) & \frac{\partial w(P_0)}{\partial z} \end{pmatrix} \vec{P_0 P} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(P_0)}{\partial z} - \frac{\partial w(P_0)}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial z} - \frac{\partial w(P_0)}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial y} - \frac{\partial v(P_0)}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \times \vec{P_0 P} + o(\overline{P_0 P})$$

Chiamando $\Sigma(P_0)$ la matrice e $\vec{\omega}(P_0)$ il vettore otteniamo la formula

$$3.1) \quad \vec{S}(P) = \vec{S}(P_0) + \Sigma(P_0) \vec{P_0 P} + \vec{\omega}(P_0) \times \vec{P_0 P} + o(\overline{P_0 P})$$

3.2. Ipotesi dei piccoli spostamenti. Alla base della trattazione che segue si trova una ipotesi iniziale, detta **ipotesi dei piccoli spostamenti**, la quale impone che gli spostamenti dei punti, ovvero i valori della funzione 3.1, siano piccoli appunto. Altrimenti detto: la trattazione che segue sarà tanto più attendibile quanto più gli spostamenti subiti dai punti del corpo sono piccoli.

Adesso consideriamo l'espressione della sola componente rigida dello spostamento. Dalla Meccanica Razionale sappiamo che il generico spostamento rigido si scrive

$$3.2) \quad \vec{S}(P) = \vec{S}(P_0) + \vec{Q}P(\cos \alpha - 1) + \left(\hat{a} \times \vec{P_0 P} \right) \sin \alpha$$

dove Q è la proiezione di P sull'asse intorno alla quale avviene la componente di rotazione dello spostamento complessivo e α è l'angolo di tale rotazione. Ma in ipotesi di piccoli spostamenti possiamo approssimare le funzioni trigonometriche della 3.2 usando solo il primo addendo del loro sviluppo in serie di Taylor:

$$3.3) \quad \vec{S}(P) = \vec{S}(P_0) + \hat{a}\alpha \times \vec{P}_0 P$$

la quale costituisce appunto una approssimazione dello spostamento rigido, tanto più fedele quanto più piccolo è lo spostamento. La cosa importante adesso è che dal confronto della 3.1 con la 3.3 emerge la possibilità di interpretare gli addendi della 3.1 e di concludere che

$\Sigma(P_0) \vec{P}_0 P$ è la componente di **deformazione pura**

$\vec{S}(P_0)$ è la componente di **traslazione rigida**

$\vec{\omega}(P_0) \times \vec{P}_0 P$ è la componente di **rotazione rigida**

3.3. Tensore delle deformazioni. La matrice che permette di descrivere gli spostamenti dovuti alla deformazione si dice tensore delle deformazioni e i suoi elementi si chiamano **componenti di deformazione**. Chiamando Σ tale tensore e ponendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(P_0) &= \frac{\Delta \partial u(P_0)}{\partial x} & \varepsilon_y(P_0) &= \frac{\Delta \partial v(P_0)}{\partial y} & \varepsilon_z(P_0) &= \frac{\Delta \partial w(P_0)}{\partial z} \\ \gamma_{xy}(P_0) &= \left(\frac{\Delta \partial u(P_0)}{\partial y} + \frac{\Delta \partial v(P_0)}{\partial x} \right) & \gamma_{xz}(P_0) &= \left(\frac{\Delta \partial u(P_0)}{\partial z} + \frac{\Delta \partial w(P_0)}{\partial x} \right) & \gamma_{yz}(P_0) &= \left(\frac{\Delta \partial v(P_0)}{\partial z} + \frac{\Delta \partial w(P_0)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

si ha

$$3.4) \quad \Sigma(P_0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(P_0) & \frac{1}{2} \gamma_{xy}(P_0) & \frac{1}{2} \gamma_{xz}(P_0) \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy}(P_0) & \varepsilon_y(P_0) & \frac{1}{2} \gamma_{yz}(P_0) \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz}(P_0) & \frac{1}{2} \gamma_{yz}(P_0) & \varepsilon_z(P_0) \end{pmatrix}$$

Quindi lo spostamento dovuto a deformazione, nel punto P , che indico $\vec{D}(P)$, è dato da

$$3.5) \quad \vec{D}(P) = \Sigma(P_0) \vec{P}_0 P = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(P_0) & \frac{1}{2} \gamma_{xy}(P_0) & \frac{1}{2} \gamma_{xz}(P_0) \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy}(P_0) & \varepsilon_y(P_0) & \frac{1}{2} \gamma_{yz}(P_0) \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz}(P_0) & \frac{1}{2} \gamma_{yz}(P_0) & \varepsilon_z(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \Delta x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \Delta y + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \Delta z \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \Delta x + \varepsilon_y \Delta y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \Delta z \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} \Delta x + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \Delta y + \varepsilon_z \Delta z \end{pmatrix}$$

Si osserva che la funzione definita nella 3.5 risulta essere un operatore simmetrico, essendo la sua matrice una matrice simmetrica.

3.4. Ipotesi delle piccole deformazioni. Abbiamo visto come il vettore $\Sigma(P_0)\vec{P_0P}$ rappresenti la componente di deformazione dello spostamento di P . Adesso voglio dimostrare come l'ipotesi di piccoli spostamenti comporti che anche le componenti di deformazione (il cui significato preciso è illustrato nei paragrafi successivi) siano tendenti a zero. Consideriamo allora la prima componente di spostamento e rendiamola sempre più piccola, cioè consideriamo una successione di funzioni

$$\{u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), \dots, u_k(x, y, z), \dots\}$$

la quale converga uniformemente allo spostamento nullo per $k \rightarrow \infty$. Prendiamo poi la successione di funzioni ottenuta dalla prima per derivazione, ad esempio, rispetto y :

$$\left\{ \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial u_2(x, y, z)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u_k(x, y, z)}{\partial y}, \dots \right\}$$

Supponendo che anche questa converga uniformemente. Allora (vedi per esempio Marcellini Sbordone a pag. 23) abbiamo che il limite della seconda serie è uguale alla derivata, rispetto y , del limite della prima, ovvero

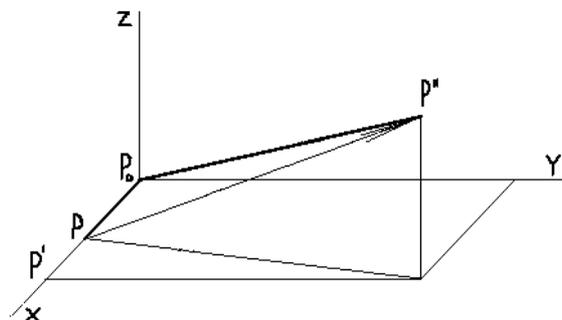
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial u_k(P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(P))}{\partial y} = \frac{\partial(0)}{\partial y} = 0$$

Questo ragionamento si può ripetere per tutte le derivate parziali di $u(P), v(P), w(P)$. Dunque le componenti di deformazione tendono a zero quando tendono a zero gli spostamenti. Poiché porre per assunto che le componenti di deformazione siano piccole si dice fare la **ipotesi delle piccole deformazioni**, abbiamo provato che

Ipotesi dei piccoli spostamenti \Rightarrow Ipotesi delle piccole deformazioni

Il contrario in generale non è vero: si pensi come caso estremo al moto rigido in cui le deformazioni sono nulle ma gli spostamenti possono essere di ogni entità.

3.5. Componenti di dilatazione. Le componenti di dilatazione sono gli elementi sulla diagonale principale del tensore delle deformazioni. Esaminiamo la componente ϵ_x e deduciamone il significato fisico. A tale scopo fissiamo l'origine del sistema di riferimento in P_0 e consideriamo un punto P dell'asse x . Se indico con P'' la posizione di P dopo la deformazione, e con P' la proiezione di P'' sull'asse x , allora posso scrivere



$$\vec{PP''} = \Sigma(P_0)\vec{P_0P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\epsilon_x(P_0)\overline{P_0P} \\ \gamma_{xy}(P_0)\overline{P_0P} \\ \gamma_{xz}(P_0)\overline{P_0P} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{PP'} = \begin{pmatrix} \epsilon_x(P_0)\overline{P_0P} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P_0P'} = \begin{pmatrix} \overline{P_0P} + \epsilon_x(P_0)\overline{P_0P} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque si ha in definitiva

$$3.6) \quad \overline{P_0P'} = \overline{P_0P} + \varepsilon_x \overline{P_0P} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\overline{P_0P'} - \overline{P_0P}}{\overline{P_0P}}$$

3.6. Componenti di scorrimento. Le componenti di scorrimento sono i restanti tre elementi distinti del tensore degli sforzi. Considerando la componente $\gamma_{yz}(P_0)$ e con riferimento alla figura, si può dimostrare che

$$3.7) \quad \gamma_{yz}(P_0) = \frac{\pi}{2} - \vartheta$$

Partiamo cercando di trovare una espressione di ϑ in funzione dei parametri in gioco. Intanto è immediato rilevare dalla figura che

$$3.8) \quad \vec{P_0Q'} \cdot \vec{P_0R'} = \overline{P_0Q'} \cdot \overline{P_0R'} \cdot \cos \vartheta$$

Consideriamo poi l'approssimazione polinomiale di $\cos \vartheta$ centrata in $\vartheta = \pi/2$

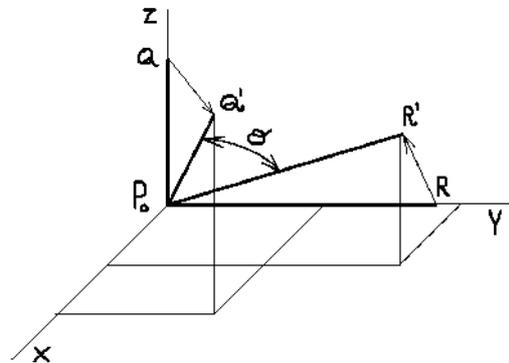
$$3.9) \quad \cos \vartheta = \cos \frac{\pi}{2} + \frac{d(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) + o \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) = 0 - \sin \vartheta \Big|_{\vartheta=\pi/2} \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) + o \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \vartheta + o \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \approx \frac{\pi}{2} - \vartheta$$

dove abbiamo trascurato l'infinitesimo di ordine superiore in quanto, se le deformazioni sono piccole, come si suppone in tutta questa trattazione, allora ϑ non si discosta molto da $\pi/2$, cioè dal suo valore iniziale.

Sostituendo allora la 3.9 nella 3.8 abbiamo

$$3.10) \quad \vec{P_0Q'} \cdot \vec{P_0R'} = \overline{P_0Q'} \cdot \overline{P_0R'} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \Leftrightarrow \frac{\vec{P_0Q'} \cdot \vec{P_0R'}}{\overline{P_0Q'} \cdot \overline{P_0R'}} = \frac{\pi}{2} - \vartheta$$



Adesso non faccio altro che valutare tutti gli elementi a primo membro in questa relazione. Parto dal numeratore:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{QQ'} = \Sigma(P_0) \vec{P_0Q} = \begin{pmatrix} 1/2 \gamma_{xz} \\ 1/2 \gamma_{yz} \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} \overline{P_0Q} \Rightarrow \vec{P_0Q'} = \vec{P_0Q} + \vec{QQ'} = \begin{pmatrix} 1/2 \gamma_{xz} \\ 1/2 \gamma_{yz} \\ 1 + \varepsilon_z \end{pmatrix} \overline{P_0Q} \\ \vec{RR'} = \Sigma(P_0) \vec{P_0R} = \begin{pmatrix} 1/2 \gamma_{yz} \\ \varepsilon_y \\ 1/2 \gamma_{zy} \end{pmatrix} \overline{P_0R} \Rightarrow \vec{P_0R'} = \vec{P_0R} + \vec{RR'} = \begin{pmatrix} 1/2 \gamma_{yz} \\ 1 + \varepsilon_y \\ 1/2 \gamma_{zy} \end{pmatrix} \overline{P_0R} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\vec{P_0Q'} \cdot \vec{P_0R'} = \begin{pmatrix} 1/2 \gamma_{xz} \\ 1/2 \gamma_{yz} \\ 1 + \varepsilon_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \gamma_{yz} \\ 1 + \varepsilon_y \\ 1/2 \gamma_{zy} \end{pmatrix} \overline{P_0Q} \cdot \overline{P_0R} = \left(\frac{\gamma_{xz}\gamma_{yz}}{4} + \frac{\gamma_{yz}}{2} + \frac{\gamma_{yz}\varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{zy}}{2} + \frac{\gamma_{zy}\varepsilon_z}{2} \right) \overline{P_0Q} \cdot \overline{P_0R}$$

Trascurando, sempre per l'ipotesi delle piccole deformazioni, i termini di secondo grado rispetto alle componenti di deformazione abbiamo

$$3.11) \quad \vec{P_0Q'} \cdot \vec{P_0R'} = \gamma_{yz} \overline{P_0Q} \cdot \overline{P_0R}$$

Per il denominatore della **3.10** considero direttamente l'approssimazione

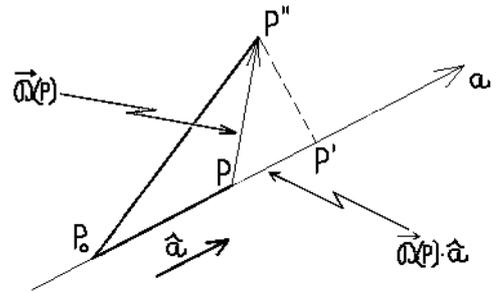
$$3.12) \quad \overline{P_0Q'} \approx \overline{P_0Q} \quad \overline{P_0R'} \approx \overline{P_0R}$$

Dunque, sostituendo le **3.11** e **3.12** nella **3.10** ottengo la tesi

$$\gamma_{yz} \frac{\overline{P_0Q'} \cdot \overline{P_0R'}}{\overline{P_0Q} \cdot \overline{P_0R}} = \frac{\pi}{2} - \vartheta \Leftrightarrow \gamma_{yz} = \frac{\pi}{2} - \vartheta$$

Si rileva che una componente di scorrimento positiva sta ad indicare una riduzione dell'angolo fra i due assi; in caso contrario i due assi finiscono per formare un angolo maggiore di un angolo retto.

3.7. Dilatazione lungo una generica direzione. Voglio calcolare la dilatazione lungo una direzione arbitraria passante per P_0 , ovvero, con riferimento alla figura, voglio calcolare la lunghezza del segmento PP' . In base alla trattazione fatta si ha

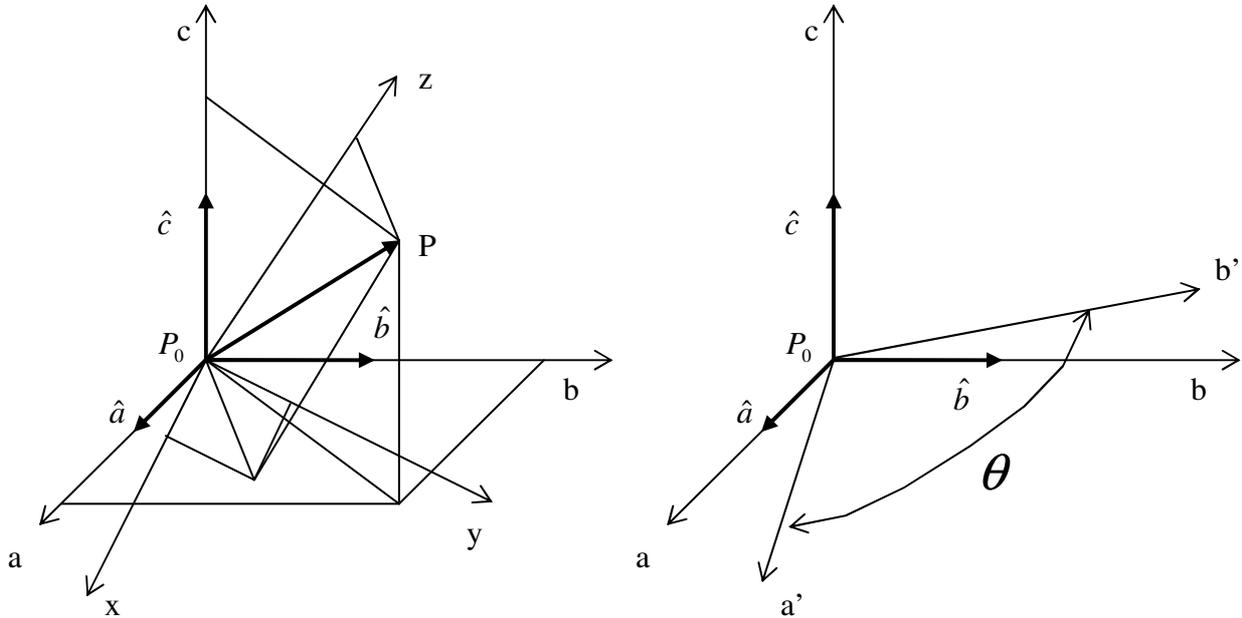


$$\begin{aligned} \overline{PP'} &= D(P) \cdot \hat{a} = \Sigma(P_0) \vec{P_0P} \cdot \hat{a} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & 2\varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & 2\varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \overline{P_0P} \cdot (a_x \ a_y \ a_z) = \\ &= \frac{\overline{P_0P}}{2} \begin{pmatrix} 2\varepsilon_x a_x + \gamma_{xy} a_y + \gamma_{xz} a_z \\ \gamma_{yx} a_x + 2\varepsilon_y a_y + \gamma_{yz} a_z \\ \gamma_{zx} a_x + \gamma_{zy} a_y + 2\varepsilon_z a_z \end{pmatrix} \cdot (a_x \ a_y \ a_z) = \frac{\overline{P_0P}}{2} (2\varepsilon_x a_x^2 + \gamma_{xy} a_x a_y + \gamma_{xz} a_x a_z) + \\ &+ \frac{\overline{P_0P}}{2} (\gamma_{yx} a_x a_y + 2\varepsilon_y a_y^2 + \gamma_{yz} a_y a_z) + \frac{\overline{P_0P}}{2} (\gamma_{zx} a_x a_z + \gamma_{zy} a_y a_z + 2\varepsilon_z a_z^2) = \\ &= (\varepsilon_x a_x^2 + \varepsilon_y a_y^2 + \varepsilon_z a_z^2 + \gamma_{xy} a_x a_y + \gamma_{xz} a_x a_z + \gamma_{yz} a_y a_z) \overline{P_0P} \end{aligned}$$

Se poi vogliamo una dilatazione relativa, cioè rapportata alla lunghezza del segmento di partenza, possiamo parlare di **componente di dilatazione rispetto al generico asse**, chiamarla ε_a e scrivere

$$3.13) \quad \varepsilon_a = \frac{\overline{P_0P'} - \overline{P_0P}}{\overline{P_0P}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{P_0P}} = \varepsilon_x a_x^2 + \varepsilon_y a_y^2 + \varepsilon_z a_z^2 + \gamma_{xy} a_x a_y + \gamma_{xz} a_x a_z + \gamma_{yz} a_y a_z$$

3.8. Componente di scorrimento relativa a due direzioni ortogonali generiche. Vogliamo calcolare la componente di scorrimento fra due direzioni ortogonali



generiche, ma passanti per P_0 naturalmente. Consideriamo allora gli assi ortogonali a, b indicati in figura: il nostro scopo qui è quello di avere una misura dell'angolo $\pi/2 - \theta$, essendo θ l'angolo che i due assi formano a deformazione avvenuta. In pratica vogliamo calcolare

$$\gamma_{ab} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

in funzione delle componenti di deformazione relative al sistema di riferimento $RC(P_0; x, y, z)$. Quello che viene subito in mente di fare è di considerare il sistema di riferimento $R\Gamma(P_0; a, b, c)$ e calcolare il tensore delle deformazioni Σ' a esso relativo, in funzione di Σ , ovvero di quello relativo a RC . A tale scopo ricaviamo la matrice per il cambio di coordinate: considerato il generico punto P di coordinate x, y, z rispetto RC e a, b, c rispetto $R\Gamma$, e detta M la matrice le cui colonne sono le coordinate, rispetto RC dei versori di $R\Gamma$, si ha

$$\begin{aligned} \vec{P_0P} &= a\hat{a} + b\hat{b} + c\hat{c} = a(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) + b(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) + c(c_x\hat{i} + c_y\hat{j} + c_z\hat{k}) = \\ &= (aa_x + bb_x + cc_x)\hat{i} + (aa_y + bb_y + cc_y)\hat{j} + (aa_z + bb_z + cc_z)\hat{k} \Rightarrow \\ \begin{cases} x = aa_x + bb_x + cc_x \\ y = aa_y + bb_y + cc_y \\ z = aa_z + bb_z + cc_z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Adesso osserviamo che lo spostamento di deformazione di P rispetto a RC e quello rispetto $R\Gamma$ si scrivono rispettivamente

$$\Sigma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Sigma' \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

e dunque, dovendo essere i due spostamenti uguali, se espressi nelle coordinate dello stesso sistema di riferimento, deve risultare

$$\Sigma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \left(\Sigma' \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

dove si è usata la matrice del cambio di variabili. Riusandola nuovamente abbiamo

$$\Sigma M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M \Sigma' \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\Sigma M - M \Sigma') \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dovendo questa relazione vera comunque si scelga il punto P , cioè per qualunque terna a, b, c , non può che essere nulla la matrice $\Sigma M - M \Sigma'$. Per cui si trova

$$\Sigma M - M \Sigma' = 0 \Leftrightarrow M \Sigma' = \Sigma M \Leftrightarrow \Sigma' = M^{-1} \Sigma M$$

Considerando poi che la matrice M è una matrice di cambio di coordinate fra due sistemi ortogonali, essa deve essere una matrice ortogonale, cioè la sua inversa è uguale alla sua trasposta, per cui

$$\Sigma' = M^T \Sigma M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_a & \frac{1}{2} \gamma_{ab} & \frac{1}{2} \gamma_{ac} \\ \frac{1}{2} \gamma_{ab} & \varepsilon_b & \frac{1}{2} \gamma_{bc} \\ \frac{1}{2} \gamma_{ac} & \frac{1}{2} \gamma_{bc} & \varepsilon_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}$$

Adesso si devono fare i calcoli. Ci provo:

$$M^T \Sigma = \begin{pmatrix} \left(a_x \varepsilon_x + \frac{a_y \gamma_{xy}}{2} + \frac{a_z \gamma_{xz}}{2} \right) & \left(\frac{a_x \gamma_{xy}}{2} + a_y \varepsilon_y + \frac{a_z \gamma_{xz}}{2} \right) & \left(\frac{a_x \gamma_{xz}}{2} + \frac{a_y \gamma_{yz}}{2} + a_z \varepsilon_z \right) \\ \left(b_x \varepsilon_x + \frac{b_y \gamma_{xy}}{2} + \frac{b_z \gamma_{xz}}{2} \right) & \left(\frac{b_x \gamma_{xy}}{2} + b_y \varepsilon_y + \frac{b_z \gamma_{xz}}{2} \right) & \left(\frac{b_x \gamma_{xz}}{2} + \frac{b_y \gamma_{yz}}{2} + b_z \varepsilon_z \right) \\ \left(c_x \varepsilon_x + \frac{c_y \gamma_{xy}}{2} + \frac{c_z \gamma_{xz}}{2} \right) & \left(\frac{c_x \gamma_{xy}}{2} + c_y \varepsilon_y + \frac{c_z \gamma_{xz}}{2} \right) & \left(\frac{c_x \gamma_{xz}}{2} + \frac{c_y \gamma_{yz}}{2} + c_z \varepsilon_z \right) \end{pmatrix}$$

Adesso, siccome il nostro scopo era quello di calcolare γ_{ab} , mi limito a moltiplicare la prima riga della matrice qui sopra, per la seconda riga della matrice M :

$$\frac{1}{2}\gamma_{ab} = \left(\left(a_x \boldsymbol{\varepsilon}_x + \frac{a_y \gamma_{xy}}{2} + \frac{a_z \gamma_{xz}}{2} \right) \left(\frac{a_x \gamma_{xy}}{2} + a_y \boldsymbol{\varepsilon}_y + \frac{a_z \gamma_{xz}}{2} \right) \left(\frac{a_x \gamma_{xz}}{2} + \frac{a_y \gamma_{yz}}{2} + a_z \boldsymbol{\varepsilon}_z \right) \right) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} =$$

$$= a_x b_x \boldsymbol{\varepsilon}_x + \frac{a_y b_x \gamma_{xy}}{2} + \frac{a_z b_x \gamma_{xz}}{2} + \frac{a_x b_y \gamma_{xy}}{2} + a_y b_y \boldsymbol{\varepsilon}_y + \frac{a_z b_y \gamma_{xz}}{2} + \frac{a_x b_z \gamma_{xz}}{2} + \frac{a_y b_z \gamma_{yz}}{2} + a_z b_z \boldsymbol{\varepsilon}_z$$

e dunque si conclude

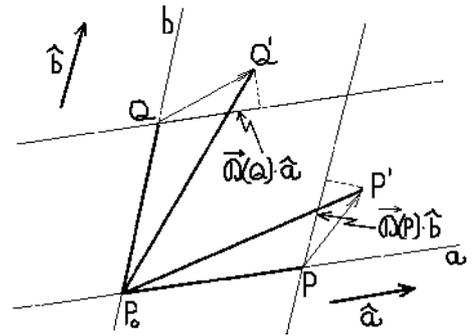
$$3.14) \quad \gamma_{ab} = 2a_x b_x \boldsymbol{\varepsilon}_x + 2a_y b_y \boldsymbol{\varepsilon}_y + 2a_z b_z \boldsymbol{\varepsilon}_z + \gamma_{xy}(a_x b_y + a_y b_x) + \gamma_{xz}(a_x b_z + a_z b_x) + \gamma_{yz}(a_y b_z + a_z b_y)$$

3.9. Principio di reciprocità. Considerati i due punti Q, P e i due versori \hat{a}, \hat{b} tali che

$$\vec{P_0 P} = \hat{a} \overline{P_0 P}, \quad \vec{P_0 Q} = \hat{b} \overline{P_0 Q}, \quad \overline{P_0 P} = \overline{P_0 Q}^1$$

si dimostra il **principio di reciprocità**²:

$$3.15) \quad \vec{D}(P) \cdot \hat{b} = \vec{D}(Q) \cdot \hat{a} \Leftrightarrow \left(\Sigma(P_0) \vec{P_0 P} \right) \cdot \hat{b} = \left(\Sigma(P_0) \vec{P_0 Q} \right) \cdot \hat{a}$$



Verifichiamo questa formula:

$$\vec{D}(P) \cdot \hat{b} = \left(\Sigma(P_0) \vec{P_0 P} \right) \cdot \hat{b} = \left(\Sigma(P_0) \hat{a} \overline{P_0 P} \right) \cdot \hat{b} = \overline{P_0 P} (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \left(\Sigma(P_0) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \overline{P_0 P} \left((b_1 \quad b_2 \quad b_3) \Sigma(P_0) \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Ora, ricordando che la trasposta di un prodotto di matrici è uguale al prodotto delle trasposte delle matrici, scambiate di posto, si ha

$$\vec{D}(P) \cdot \hat{b} = \overline{P_0 P} \left({}^t \Sigma(P_0) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Ma il tensore delle deformazioni è simmetrico, dunque trasponendolo non varia e concludiamo:

¹ Si faccia attenzione a questa condizione: i due punti devono essere equidistanti da P_0

² Si fa osservare che il principio di reciprocità non è altro che la proprietà con la quale si definisce un operatore simmetrico. E infatti la funzione $\hat{D}(P) = \Sigma(P_0) \overline{P_0 P}$ altro non è se non un operatore simmetrico.

$$\vec{D}(P) \cdot \hat{b} = \overline{P_0P} \left(\Sigma(P_0) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \left(\Sigma(P_0) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \overline{P_0Q} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{D}(Q) \cdot \hat{a}$$

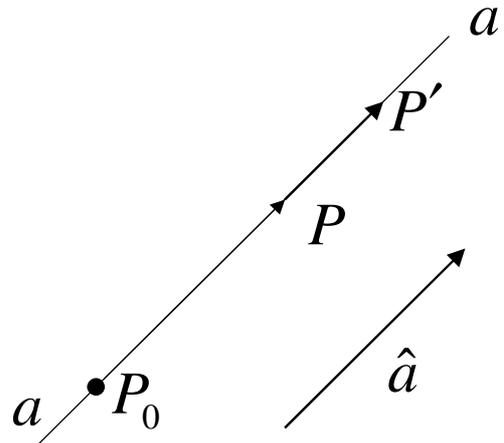
3.10. Direzione principale di deformazione. Dato un punto P_0 diciamo che il versore \hat{a} individua una direzione principale di deformazione se risulta

$$3.16) \quad \Sigma(P_0)\hat{a} = \varepsilon_a \hat{a} \Leftrightarrow (\Sigma(P_0) - \varepsilon_a I)\hat{a} = 0$$

cioè se lo spostamento di deformazione avviene tutto nella direzione del versore \hat{a} . Da notare che la 3.16 si riscrive in maniera più espressiva come

$$3.17) \quad \Sigma(P_0)\overline{P_0P} = \varepsilon_a \overline{P_0P} \Leftrightarrow (\Sigma(P_0) - \varepsilon_a I)\overline{P_0P} = 0$$

comunque si scelga il punto P sulla retta a . La ε_a prende il nome di **componente principale di deformazione**. Viene allora naturale pensare che una direzione principale di tensione sia anche una direzione principale di deformazione. Ma questo sarà poi vero sempre? O è vero solo per certi tipi di corpi? La questione sarà esaminata nella parte sulla elasticità.



3.11. Ricerca delle direzioni principali di deformazione. Poniamoci il problema di trovare la (una deve esserci per forza essendo la matrice delle deformazioni simmetrica) o le direzioni principali di deformazione per un dato punto P_0 . Deve essere verificata la 3.17 dunque si deduce che

- le componenti principali di deformazione sono gli autovalori di $\Sigma(P_0)$, e si ricavano dunque risolvendo, rispetto ε_a , l'equazione di terzo grado

$$\det(\Sigma(P_0) - \varepsilon_a I) = 0$$

- le relative direzioni principali di tensione sono individuate dai relativi autovettori di $\Sigma(P_0)$ e si ricavano sostituendo le soluzioni della equazione scalare in quella vettoriale

Si deve poi notare che, in base ai risultati dell'Algebra Lineare, essendo $\Sigma(P_0)$ una matrice simmetrica

- essa ammette sempre tre autovalori reali
- essa ammette sempre una base di autovettori ortonormali

Dunque le direzioni principali sono ortogonali fra loro. Tuttavia possono aversi tre casi:

- **3 autovalori distinti:** allora si hanno tre direzioni principali di deformazione fra loro ortogonali;

- **2 autovalori distinti**³: allora si avrà una direzione principale in corrispondenza dell'autovalore singolo, e in corrispondenza dell'autovalore doppio un piano tale per cui tutte le sue direzioni passanti per P_0 sono direzioni principali di deformazione⁴;
- **1 autovalore distinto**: allora ogni direzione per P_0 è una direzione principale di deformazione, la cui componente principale è il solo autovalore trovato.

Orientando il sistema di riferimento in modo che gli assi si sovrappongano alle direzioni principali di deformazione il tensore delle deformazioni assume forma diagonale e si ha

$$3.18) \quad \vec{P}\vec{P}' = \Sigma(P_0)P_0\vec{P} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} P_0\vec{P}$$

3.12. Invarianti di deformazione. Gli invarianti di deformazione sono gli invarianti del tensore delle deformazioni. Queste quantità sono così dette in quanto non cambiano al cambiare del sistema di riferimento. Si ha l'invariante lineare

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

l'invariante quadratico

$$I_2 = - \left(\begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) - (\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z)$$

e l'invariante cubico

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{xz}\gamma_{yz} - \frac{1}{4}(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{xz}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2)$$

Gli invarianti risultano utili al momento della soluzione della equazione caratteristica del tensore delle deformazioni. Infatti risulta

$$\det(\Sigma - \varepsilon I) = \varepsilon^3 - \varepsilon^2 I_1 - \varepsilon I_2 - I_3$$

3.13. Stato di deformazione piana. Si dice che in P_0 si ha uno stato di deformazione piana quando

³ Uno dei due avrà molteplicità algebrica due, come soluzione della equazione caratteristica del tensore, ovvero della equazione $\det(\Sigma - \varepsilon_a I) = 0$.

⁴ Questo piano è anche piano delle deformazioni (cioè si avrà stato di deformazione piana) se e solo se l'autovalore a molteplicità singola è nullo.

$$3.19) \quad \exists \hat{m} \mid \left(\Sigma(P_0) \vec{P_0 P} \right) \cdot \hat{m} = 0, \forall P$$

Dunque il piano passante per P_0 e ortogonale a \hat{m} , detto piano delle deformazioni, è tale che comunque si scelga il punto P nello spazio, il relativo spostamento è parallelo a tale piano. Dimostro alcune proprietà dello stato di deformazione piana.

A) In P_0 si ha stato di deformazione piana, con piano ortogonale al vettore \hat{m} , se e solo se

$$3.20) \quad \exists \hat{m} \mid \Sigma(P_0) \hat{m} = 0$$

Infatti se si ha stato di deformazione piana con vettore ortogonale al vettore \hat{m} allora la 3.19 dice in particolare che

$$\exists \hat{m} \mid (\Sigma(P_0) \hat{n}) \cdot \hat{m}, \forall \hat{n} = 0 \Leftrightarrow \exists \hat{m} \mid (\Sigma(P_0) \hat{m}) \cdot \hat{n} = 0, \forall \hat{n}$$

dove si è applicato il principio di reciprocità. Ma allora, data l'arbitrarietà di \hat{n} , segue la tesi. Viceversa se ammettiamo che $\exists \hat{m} \mid \Sigma(P_0) \hat{m} = 0$ e moltiplichiamo scalarmente per \hat{n} abbiamo, sempre usando il principio di reciprocità, che

$$\exists \hat{m} \mid (\Sigma(P_0) \hat{n}) \cdot \hat{m} = 0, \forall \hat{n}$$

che appunto ci dice che \hat{m} individua nel piano a lui ortogonale il piano delle deformazioni.

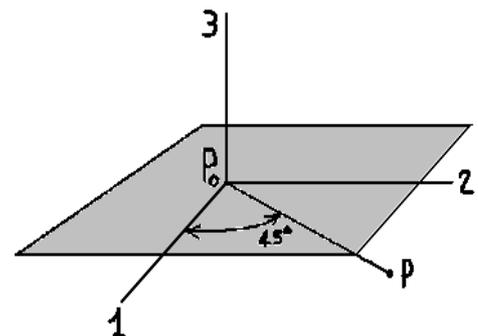
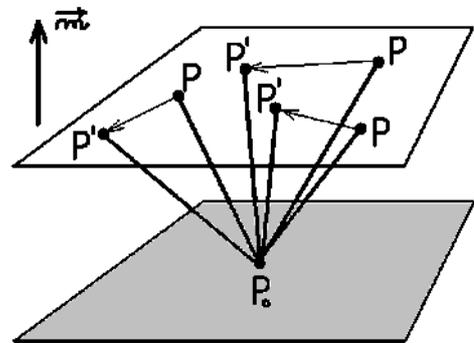
B) Se π è piano delle deformazioni relativamente al punto P_0 , allora la direzione ortogonale a π è direzione principale di deformazione e la sua componente principale vale zero. Viceversa se una direzione principale ha componente principale nulla, allora il piano a essa ortogonale è piano delle deformazioni. Infatti se si fa l'ipotesi del piano delle deformazioni, come conseguenza della 3.20, possiamo dire che lungo \hat{m} le deformazioni sono tutte assiali (e dunque \hat{m} individua un asse principale di deformazione) e che in oltre tali deformazioni sono nulle (e dunque la componente principale di deformazione lungo \hat{m} vale zero).

Mentre se si fa l'ipotesi della direzione principale con componente principale nulla, per la 3.17, e applicando il principio di reciprocità, si ha $\Sigma(P_0) \hat{m} = 0$, che è la 3.20, per cui il piano ortogonale a \hat{m} è piano delle deformazioni.

C) In P_0 si ha stato di deformazione piana se e solo se il determinante del tensore delle deformazioni vale zero. Infatti siano $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ le tre componenti principali: allora il determinante del tensore delle deformazioni si scrive

$$\det \Sigma = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

Allora se vale zero, almeno una delle componenti principali è nulla e dunque, per la proprietà B, si ha stato di deformazione piana. Viceversa, se sia ha stato di deformazione piana, sempre per la B, almeno una delle componenti principali vale



zero, e dunque il determinante è nullo.

D) La componente di scorrimento massima, per giaciture che siano ortogonali al piano di deformazione, si ha quando $\overline{P_0P}$ forma un angolo di 45° con le due direzioni principali del piano stesso (vedi figura). La dimostrazione la si rimanda alla parte sui circoli di Mohr.

3.14. Componente sferica e componente deviatorica. Dilatazione volumica e superficiale. Adesso scrivo il tensore delle deformazioni in un modo particolare:

$$3.21) \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon'_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon'_z \end{pmatrix}$$

dove si è posto

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}, \quad \varepsilon'_x = \varepsilon_x - \varepsilon, \quad \varepsilon'_y = \varepsilon_y - \varepsilon, \quad \varepsilon'_z = \varepsilon_z - \varepsilon$$

Il primo tensore è detto **componente sferica**; il secondo invece **componente deviatorica**. Ora voglio dimostrare come la variazione di volume nel punto P_0 sia descritta della componente sferica. Con riferimento alla figura la **variazione volumica (relativa)** nell'intorno di P_0 si può scrivere

$$3.22.a) \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{(a + a\varepsilon_x)(a + a\varepsilon_y)(a + a\varepsilon_z) - a^3}{a^3} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

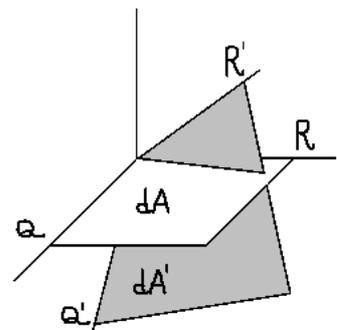
Per cui la componente volumica del tensore si scrive

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \Delta V/V_0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta V/V_0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta V/V_0 \end{pmatrix}$$

Si può allora dedurre che la componente deviatorica descriva la variazione di forma nell'intorno del punto considerato e **rispetto al sistema di riferimento considerato**. In effetti infatti si vede come **la deformazione diventa tutta solo volumica quando ci si metta nel sistema di riferimento individuato dalle direzioni principali di deformazione**.

Approfitto anche per indicare la **variazione superficiale relativa** per la quale, con riferimento alla figura, si ha

$$3.22.b) \frac{dA}{dA} = \frac{dA' - dA}{dA} = \frac{(a + a\varepsilon_x)(a + a\varepsilon_y) - a^2}{a^2} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y) - 1 \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y$$



3.15. Condizioni di congruenza interna. Sia dato un corpo deformabile occupante il dominio Ω . Dato uno stato di deformazione descritto dal tensore delle deformazioni

$$\Sigma = \Sigma(P), \forall P \in \Omega$$

ci si chiede se il campo di spostamenti

$$3.23) \quad \vec{S}(Q) = \vec{S}(P) + \Sigma(P)PQ + \vec{\omega} \times PQ$$

corrispondente sia una funzione differenziabile (e dunque in particolare continua). In caso affermativo si dice che la **congruenza interna** è verificata. Si evidenzia che la continuità del campo di spostamento garantisce che, a deformazione avvenuta, non vi siano lacerazioni nel corpo.

Si dimostra che se Ω è semplicemente connesso, allora si ha congruenza interna se e solo se sono soddisfatte le sei equazioni (le **condizioni di congruenza interna** appunto) seguenti

$$3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} \end{array} \right.$$

Ponendo $\vec{PQ} = (dx \quad dy \quad dz)$ la **3.23** si scrive come

$$\begin{aligned} d\vec{S}(P) = \Sigma(P) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + \vec{\omega} \times \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_y dz - \omega_z dy \\ -\omega_x dz + \omega_z dx \\ \omega_x dy - \omega_y dx \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_x dx + \gamma_{xy} dy/2 + \gamma_{xz} dz/2 \\ \gamma_{xy} dx/2 + \varepsilon_y dy + \gamma_{yz} dz/2 \\ \gamma_{xz} dx/2 + \gamma_{yz} dy/2 + \varepsilon_z dz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_y dz - \omega_z dy \\ -\omega_x dz + \omega_z dx \\ \omega_x dy - \omega_y dx \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} du = \varepsilon_x dx + (\gamma_{xy}/2 - \omega_z) dy + \gamma_{xz}/2 dz + \omega_y dz \\ dv = (\gamma_{xy}/2 + \omega_z) dx + \varepsilon_y dy + (\gamma_{yz}/2 - \omega_x) dz \\ dw = (\gamma_{xz}/2 - \omega_y) dx + (\gamma_{yz}/2 + \omega_x) dy + \varepsilon_z dz \end{cases} \end{aligned}$$

Allora se la funzione vettoriale $\vec{S}(P)$ è differenziabile abbiamo a secondo membro delle forme differenziali esatte. Viceversa se a secondo membro abbiamo delle forme differenziali esatte, allora il campo degli spostamenti è differenziabile. Pertanto **si ha congruenza interna se e solo se le forme differenziali a secondo membro sono esatte.**

Ma trovandoci, per ipotesi, in un aperto semplicemente connesso, la condizione di esattezza coincide con quella di chiusura. Dunque **si ha congruenza interna se e solo se le forme differenziali a secondo membro sono chiuse**, ovvero se e solo se sono valide le 9 relazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} &= \frac{\partial(\gamma_{xy}/2 - \omega_z)}{\partial x}, & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} &= \frac{\partial(\gamma_{xz}/2 + \omega_y)}{\partial x}, & \frac{\partial(\gamma_{xy}/2 - \omega_z)}{\partial z} &= \frac{\partial(\gamma_{xz}/2 + \omega_y)}{\partial y}, \\ \frac{\partial(\gamma_{xy}/2 + \omega_z)}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}, & \frac{\partial(\gamma_{xy}/2 + \omega_z)}{\partial z} &= \frac{\partial(\gamma_{yz}/2 - \omega_x)}{\partial x}, & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} &= \frac{\partial(\gamma_{yz}/2 - \omega_x)}{\partial y}, \\ \frac{\partial(\gamma_{xz}/2 - \omega_y)}{\partial y} &= \frac{\partial(\gamma_{yz}/2 + \omega_x)}{\partial x}, & \frac{\partial(\gamma_{xz}/2 - \omega_y)}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}, & \frac{\partial(\gamma_{yz}/2 + \omega_x)}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \end{aligned}$$

Se esplicito ciascuna equazione rispetto le derivate parziali del vettore rotazione si ha il sistema

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= -\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma_{xy}/2)}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial(\gamma_{xz}/2)}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= \frac{\partial(\gamma_{xy}/2)}{\partial z} - \frac{\partial(\gamma_{xz}/2)}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial(\gamma_{xy}/2)}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= \frac{\partial(\gamma_{yz}/2)}{\partial x} - \frac{\partial(\gamma_{xy}/2)}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial y} &= \frac{\partial(\gamma_{yz}/2)}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} &= -\frac{\partial(\gamma_{yz}/2)}{\partial x} + \frac{\partial(\gamma_{xz}/2)}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial z} &= -\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} + \frac{\partial(\gamma_{xz}/2)}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial(\gamma_{yz}/2)}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

Si vede che manca l'espressione esplicita di 3 delle 9 derivate, ma mettendo a sistema la 3°, la 5° e la 7° abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = -\frac{\partial(\gamma_{xz}/2)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma_{xy}/2)}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial(\gamma_{yz}/2)}{\partial x} - \frac{\partial(\gamma_{xy}/2)}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = -\frac{\partial(\gamma_{yz}/2)}{\partial x} + \frac{\partial(\gamma_{xz}/2)}{\partial y} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{\partial(\gamma_{xz}/2)}{\partial y} - \frac{\partial(\gamma_{xy}/2)}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = -\frac{\partial(\gamma_{yz}/2)}{\partial x} + \frac{\partial(\gamma_{xy}/2)}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial(\gamma_{yz}/2)}{\partial x} - \frac{\partial(\gamma_{xz}/2)}{\partial y} \end{array} \right.$$

E così otteniamo tutte e 9 le derivate parziali delle componenti di $\vec{\omega}$. Allora adesso la condizione necessaria e sufficiente per la congruenza interna si può tradurre nella condizione che le componenti di $\vec{\omega}$ siano derivabili, ovvero le 3 seguenti forme differenziali siano esatte (e basta che siano chiusi, visto che ci troviamo in un aperto semplicemente connesso):

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega_x = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right) dy + \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) dz \\ d\omega_y = \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} \right) dx + \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) dy + \left(-\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} \right) dz \\ d\omega_z = \left(-\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) dz \end{array} \right.$$

Imponendo la chiusura abbiamo le 9 equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

Le equazioni 1 e 9 sono uguali, così come le equazioni 2 e 6, 4 e 8. Riordinando le 6 equazioni che restano, portando cioè a primo membro le derivate delle componenti di dilatazione, si conclude che condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia congruenza interna è che siano soddisfatte le 6 equazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

che sono proprio le **3.24**.

3.16. Condizioni di congruenza esterna. Supponiamo che il corpo deformabile sia vincolato a dover trovarsi al di sopra di una superficie Ψ di equazione esplicita

$$\Psi : z = f(x, y)$$

Se allora consideriamo il generico punto $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ del corpo deformabile, abbiamo che deve essere soddisfatta la condizione

$$\begin{aligned}z_0 + w(P_0) &\geq f(x_0 + u(P_0), y_0 + v(P_0)) = \\ &= df[x_0, y_0; u(P_0), v(P_0)] + o\left(\sqrt{u^2(P_0) + v^2(P_0)}\right) = \\ &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} u(P_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} v(P_0) + o\left(\sqrt{u^2(P_0) + v^2(P_0)}\right)\end{aligned}$$

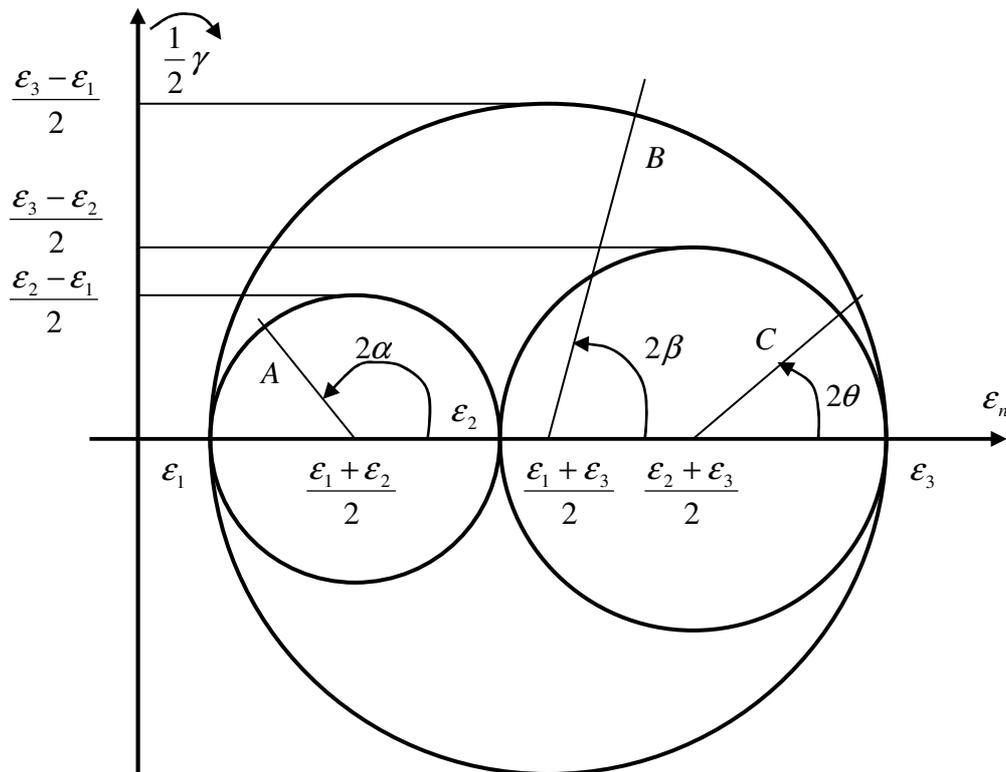
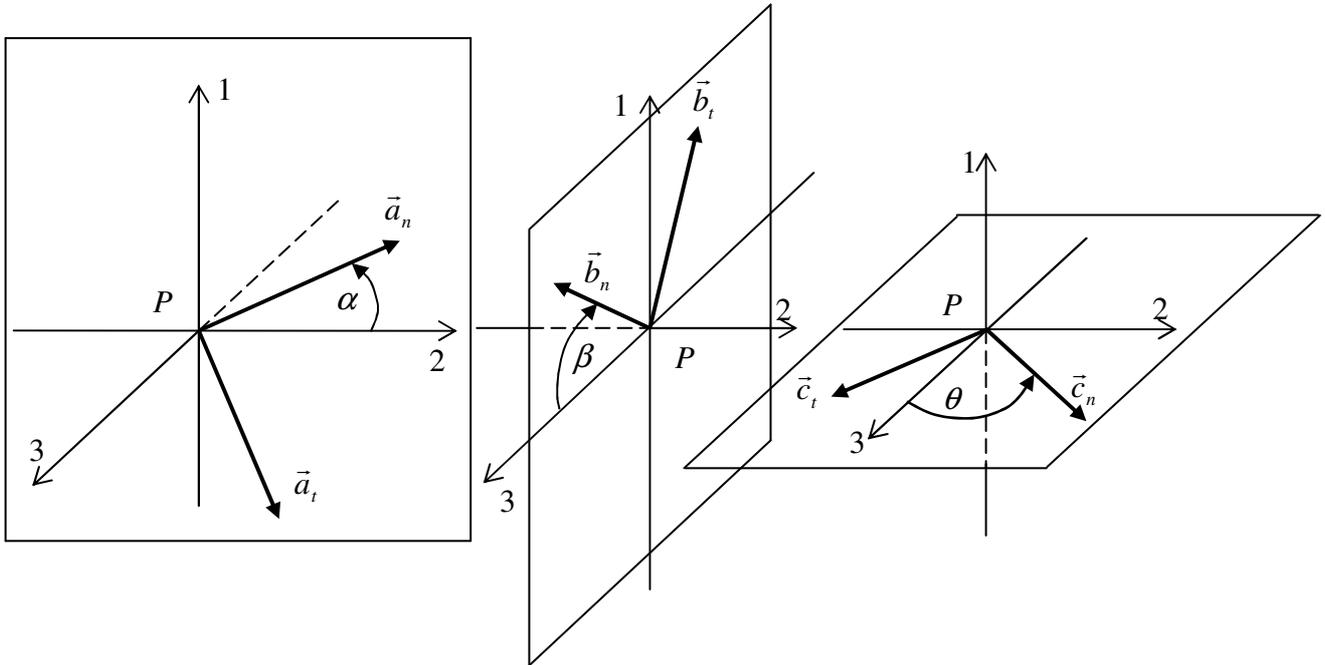
dove si intende che il vettore $(u(P_0), v(P_0), w(P_0))$ rappresenta lo spostamento che subisce P_0 a seguito della deformazione. Si vede che la equazione della superficie si è espressa attraverso il suo differenziale e il relativo infinitesimo di ordine superiore rispetto allo spostamento di P_0 . La condizione di cui sopra si scriverà poi semplicemente

$$3.25) \quad w(P_0) \geq \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} u(P_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} v(P_0) - z_0$$

con approssimazione tanto maggiore quanto più piccoli sono gli spostamenti. Da notare che questa condizione equivale a imporre che il punto P_0 resti, a deformazione avvenuta, al di sopra del piano tangente a Ψ in (x_0, y_0, z_0) . La **3.25** è un esempio di condizione di **congruenza esterna**.

Capitolo 4. Deformazioni e Circoli di Mohr

4.1. Stato di deformazione generico. Per i cerchi di Mohr relativi alle deformazioni



valgono tutte le considerazioni fatte per gli sforzi, basta sostituire σ con ε e τ con $\gamma/2$. L'unica questione da capire è quale convenzione assumere per definire uno scorrimento positivo. Perché l'analogia funzioni si deve assumere positivo quello scorrimento angolare causato da una tensione tangenziale assunta positiva secondo la convenzione nota (vedi cerchi di Mohr per stati tensionali). Per intenderci, con riferimento alla figura, $\gamma_{c_n c_t}$ è positiva se l'asse c_n e l'asse c_t si avvicinano a

seguito della deformazione. Infatti se avessimo una $\tau_{c_n c_t}$ positiva, questa dovrebbe essere tale da imprimere una rotazione oraria (rispetto all'asse 1) della materia sottostante la giacitura individuata da c_n ; ma in questo caso l'asse c_n tenderebbe a ruotare in senso orario (rispetto l'asse 1) mentre l'asse c_t tenderebbe a ruotare in senso antiorario (si pensi infatti all'azione di $\tau_{c_n c_t}$). Dunque appunto i due assi si avvicinano.

Ciò posto valgono (sempre con riferimento alla figura) le seguenti considerazioni:

1) Considerati tre assi ortogonali ξ, η, ζ centrati in P si ha che l'insieme dei valori assumibili dalla coppia $(\varepsilon_\xi, \gamma_{\xi\eta}/2)$ è dato dal luogo dei punti dell'area evidenziata in figura. Il punto $(\varepsilon_\xi, \gamma_{\xi\eta}/2)$ va sopra quando l'asse ξ ruota in senso orario, rispetto all'asse ζ . Altrimenti va sotto.

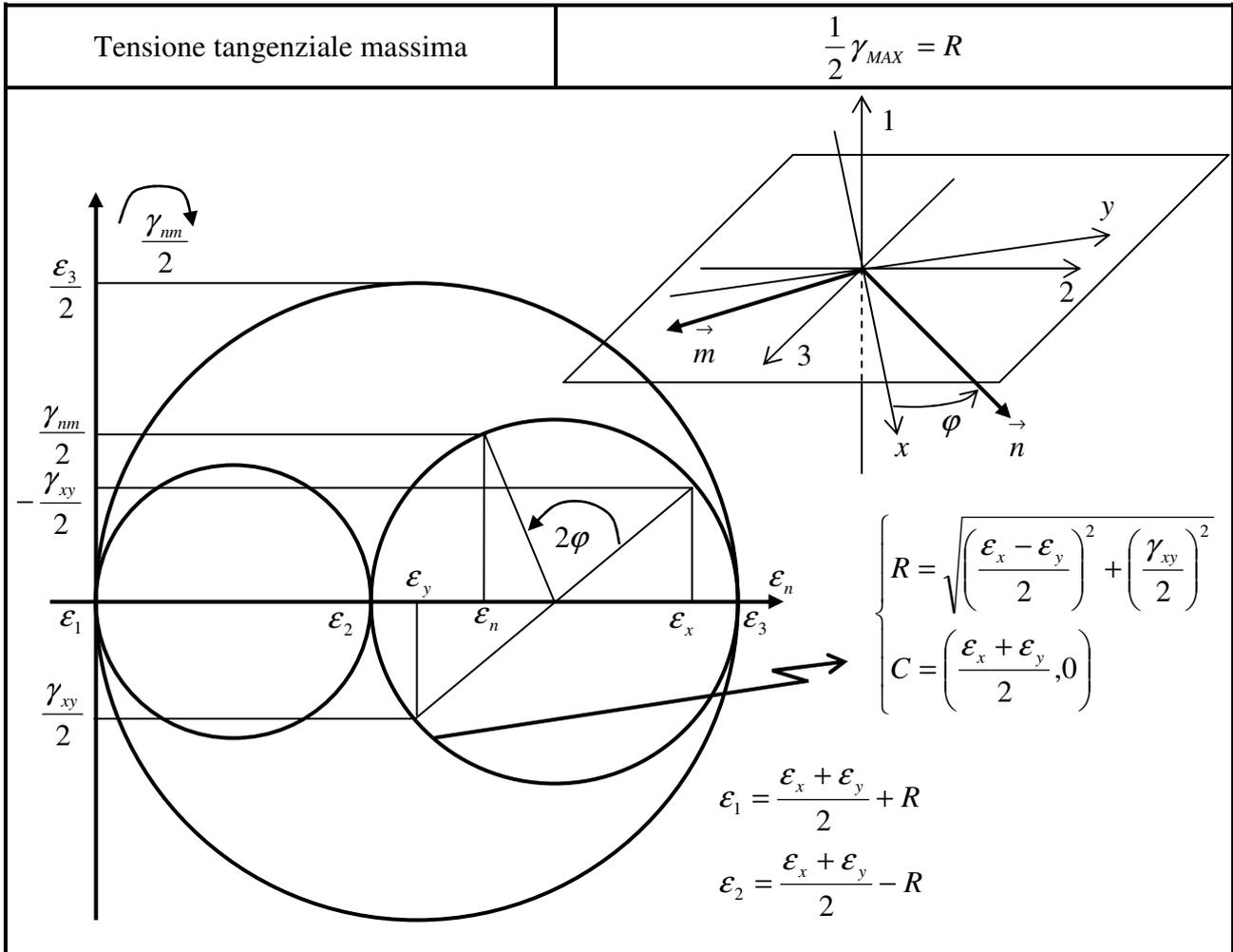
2) Il valore massimo dello scorrimento lo si ottiene nelle direzioni ortogonali b_n, b_t , quando sono a 45° rispetto agli assi 1,3.

3) Il circolo fra $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ consente di descrivere lo stato di deformazione sul piano 1,2. Il circolo fra $\varepsilon_3, \varepsilon_1$ permette di descrivere lo stato di deformazione sul piano 1,3. Il circolo fra $\varepsilon_3, \varepsilon_2$ permette di descrivere lo stato di deformazione sul piano 2,3.

4.2. Stato di deformazione piana. Diciamo che il piano delle deformazioni sia il piano x, y . Su tale piano fissiamo i due assi orientati ortogonali n, m , come in figura. Allora a partire dai tre valori $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}/2$ è possibile costruire il cerchio di Mohr rappresentato in figura il quale permette di avere $\varepsilon_n, \gamma_{nm}/2$ al variare dell'angolo φ . I parametri del circolo di Mohr sono elencati in tabella¹. Si consideri che il punto $\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2$ va posto sopra o sotto seguendo la regola illustrata nel precedente paragrafo. Tale regola la si applica anche agli altri assi.

Raggio	$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$
Centro	$C = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, 0\right)$
Componenti principali	$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + R$ $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - R$
Direzioni principali	$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right)$ $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$

¹ L'angolo φ_1 è quello che individua la direzione principale di componente principale ε_1 . Discorso analogo per l'angolo φ_2 .



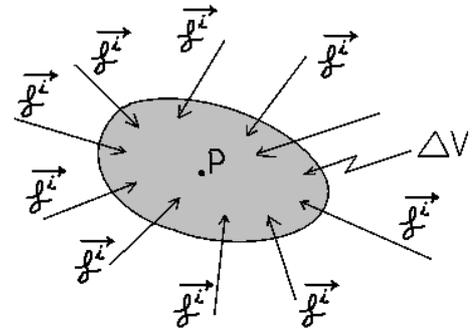
Inoltre si aggiunge che anche per lo stato di deformazione piana valgono le considerazioni fatte per i cerchi di Mohr del generico stato di deformazione. Cioè si avranno anche in questo caso i tre cerchi con il campo di valori assumibili da $\epsilon, \gamma/2$ con due cerchi passanti sempre per l'origine degli assi.

Capitolo 5. Lavoro di deformazione delle forze interne e Teorema del Lavoro Virtuale

5.1. Lavoro di deformazione delle forze interne per unità di volume. Il lavoro di deformazione delle forze interne per unità di volume, relativo al punto P , si definisce come il limite

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta V}$$

dove ΔL è il lavoro fatto dalle forze interne nella deformazione del volume ΔV . Si intende che ΔV tende a zero contenendo sempre il punto P . Si dimostra che il lavoro **per unità di volume**, relativo al punto P , che le forze interne realizzano durante la generica deformazione è dato da



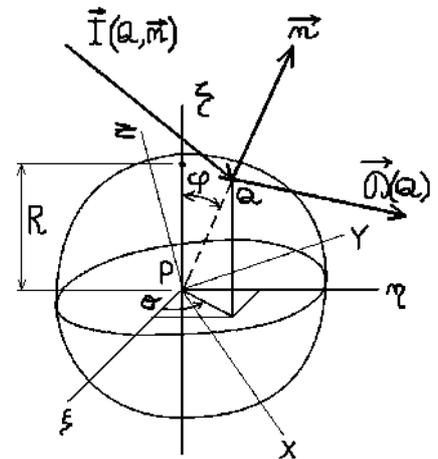
$$5.1) \quad dL(P) = \int_{\gamma} (\sigma_x(P)d\epsilon_x(P) + \sigma_y(P)d\epsilon_y(P) + \sigma_z(P)d\epsilon_z(P) + \sigma_{xy}(P)d\gamma_{xy}(P) + \sigma_{xz}(P)d\epsilon_{xz}(P) + \sigma_{yz}(P)d\epsilon_{yz}(P))$$

dove si intende che γ è una curva a 6 dimensioni le cui coordinate sono le 6 componenti di deformazione. Essa indica il variare delle componenti di deformazione in P nel corso della deformazione. La deformazione la si intende come una sequenza qualunque di piccole deformazioni.

Infatti si consideri un punto P del solido e il volume sferico di raggio R intorno a esso. Allora il lavoro che le forze del corpo stesso, agenti sulla superficie della sfera, fanno nella deformazione della sfera, è dato da

$$5.2) \quad L^i(P) = \int_0^{\Delta t} \int_S \vec{t}(Q, \vec{n}) \cdot \vec{v}(Q) dS dt$$

essendo $\vec{v}(Q)$ il valore del campo di velocità in Q , S la superficie della sfera e Δt il tempo nel quale si realizza la deformazione. D'altra parte si ha



$$\vec{v}(Q) = \frac{d\vec{D}(Q)}{dt} = \frac{d(\Sigma(P)\overrightarrow{PQ})}{dt} = \frac{d(\Sigma(P)R(Q)\hat{n}(Q))}{dt}$$

Portare fuori dalla derivazione il tensore delle deformazioni può non essere giustificato in generale, perché qui sto tentando di calcolare il lavoro fatto durante un percorso di deformazioni, cioè durante una sequenza di piccole deformazioni, **non una singola piccola deformazione**. In questo caso allora devo considerare la possibilità che varino le componenti di deformazione in P , al passare del tempo (adesso aggiungerò, anche simbolicamente, la dipendenza delle componenti di deformazione dal tempo).

Per rendere più facile la trattazione dico che il sistema di riferimento $R\Gamma(\xi, \eta, \zeta)$ in cui ci troviamo, è orientato secondo le direzioni principali di deformazione. In questo caso infatti, secondo quanto visto nel paragrafo 3.14, la deformazione è esclusivamente volumica e la derivata nel tempo di \hat{n} è nulla (il vettore \overrightarrow{PQ} cioè si allunga o si accorcia, ma non ruota rispetto gli assi). Dunque si ha

$$\vec{v}(Q) = \frac{d(\Sigma(P,t))}{dt} R(Q) \hat{n}(Q) + \Sigma(P,t) \frac{d(R(Q))}{dt} \hat{n}(Q)$$

ma anche $dR(Q) = \varepsilon_n(P,t)R(Q)$, essendo n la retta orientata dall'omonimo versore, dunque

$$\vec{v}(Q) = \frac{d(\Sigma(P,t))}{dt} R(Q) \hat{n}(Q) + \Sigma(P,t) \frac{\varepsilon_n(P,t)R(Q)}{dt} \hat{n}(Q)$$

Sostituendo nella 5.2 si ha

$$\begin{aligned} L^i(P) &= \int_0^{\Delta t} \int_S \vec{i}(Q, \vec{n}) \cdot \left(\frac{d(\Sigma(P,t))}{dt} R(Q) \hat{n}(Q) + \Sigma(P,t) \frac{\varepsilon_n(P,t)R(Q)}{dt} \hat{n}(Q) \right) dS dt = \\ &= \int_0^{\Delta t} \int_S \vec{i}(Q, \vec{n}) \cdot \left(\frac{d(\Sigma(P,t))}{dt} R(Q) \hat{n}(Q) \right) dS dt + \int_0^{\Delta t} \int_S \vec{i}(Q, \vec{n}) \cdot \left(\Sigma(P,t) \frac{\varepsilon_n(P,t)R(Q)}{dt} \hat{n}(Q) \right) dS dt \end{aligned}$$

Adesso osservo che, per la ipotesi delle piccole deformazioni, il secondo integrale può essere considerato trascurabile¹ rispetto al primo in quanto in esso compaiono termini di secondo grado rispetto alle componenti $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta$, (si ricordi che per la 3.13 si ha $\varepsilon_n = \varepsilon_\xi n_\xi^2 + \varepsilon_\eta n_\eta^2 + \varepsilon_\zeta n_\zeta^2$).

Dunque

$$L^i(P) \approx \int_0^{\Delta t} \int_S \vec{i}(Q, \vec{n}) \cdot \left(\frac{d(\Sigma(P,t))}{dt} R(Q) \hat{n}(Q) \right) dS dt = \int_0^{\Delta t} \int_S (T(Q) \hat{n}(Q)) \cdot \left(\frac{d(\Sigma(P,t))}{dt} R(Q) \hat{n}(Q) \right) dS dt$$

Esplicitando tutto ho

$$L^i(P) = \int_0^{\Delta t} \int_S \begin{pmatrix} \sigma_\xi(Q) & \sigma_{\xi\eta}(Q) & \sigma_{\xi\zeta}(Q) \\ \sigma_{\xi\eta}(Q) & \sigma_\eta(Q) & \sigma_{\eta\zeta}(Q) \\ \sigma_{\xi\zeta}(Q) & \sigma_{\eta\zeta}(Q) & \sigma_\zeta(Q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_\xi(Q) \\ n_\eta(Q) \\ n_\zeta(Q) \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varepsilon_\xi(P,t) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\eta(P,t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\zeta(P,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_\xi(Q) \\ n_\eta(Q) \\ n_\zeta(Q) \end{pmatrix} R(Q) dS dt$$

Si osservi che non ho ammesso che le direzioni principali di deformazioni siano anche direzioni principali di tensione, perché voglio che questa dimostrazione valga per il generico corpo deformabile (e non sotto le ipotesi restrittive di elasticità, che vedremo in seguito).

Adesso, siccome l'espressione che devo ottenere si deve riferire al sistema di riferimento generico $RC(x, y, z)$ ho bisogno di esprimere il lavoro in funzione dei tensori delle deformazioni e delle tensioni relativi a tale sistema di riferimento. Ebbene, se chiamo M la matrice le cui colonne sono le coordinate della base di $R\Gamma$ rispetto RC ho

$$M \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_Q \\ \eta_Q \\ \zeta_Q \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix}, \forall Q \Leftrightarrow$$

¹ Non sono convinto di questo perché nell'altro integrale abbiamo le derivate nel tempo delle componenti di deformazione, e non le componenti di deformazione. Ma se non faccio così non so come fare!

$$M \begin{pmatrix} \varepsilon_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\zeta \end{pmatrix} M^T \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix}, \forall Q \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\zeta \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} M$$

Dove ho considerato che l'inversa di una matrice ortogonale (e M è una matrice ortogonale, in quanto è la matrice di passaggio da un sistema ortogonale a un altro) è uguale alla sua trasposta. Lo stesso risultato vale per il tensore delle tensioni e dunque (tralasciando di scrivere le dipendenze da P, Q, t) abbiamo

$$\begin{aligned} L^i(P) &= \int_0^{\Delta t} \int_S \left(M^T \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} \right) \cdot \left(M^T \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} \right) R dS dt = \\ &= \int_0^{\Delta t} \int_S \left(M^T \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} R(Q) dS dt = \\ &= \int_0^{\Delta t} \int_S \left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} \right)^T M M^T \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} R(Q) dS dt = \\ &= \int_0^{\Delta t} \int_S \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix}^T M^T \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} R(Q) dS dt = \\ &= \int_0^{\Delta t} \int_S \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix}^T M^T \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{1j} \sigma_{j1} & \dot{\varepsilon}_{1j} \sigma_{j2} & \dot{\varepsilon}_{1j} \sigma_{j3} \\ \dot{\varepsilon}_{2j} \sigma_{j1} & \dot{\varepsilon}_{2j} \sigma_{j2} & \dot{\varepsilon}_{2j} \sigma_{j3} \\ \dot{\varepsilon}_{3j} \sigma_{j1} & \dot{\varepsilon}_{3j} \sigma_{j2} & \dot{\varepsilon}_{3j} \sigma_{j3} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} R(Q) dS dt \\ &= \int_0^{\Delta t} \int_S \begin{pmatrix} n_k m_{1k} & n_k m_{2k} & n_k m_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{1j} \sigma_{j1} & \dot{\varepsilon}_{1j} \sigma_{j2} & \dot{\varepsilon}_{1j} \sigma_{j3} \\ \dot{\varepsilon}_{2j} \sigma_{j1} & \dot{\varepsilon}_{2j} \sigma_{j2} & \dot{\varepsilon}_{2j} \sigma_{j3} \\ \dot{\varepsilon}_{3j} \sigma_{j1} & \dot{\varepsilon}_{3j} \sigma_{j2} & \dot{\varepsilon}_{3j} \sigma_{j3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1h} n_h \\ m_{2h} n_h \\ m_{3h} n_h \end{pmatrix} R(Q) dS dt = \\ &= \int_0^{\Delta t} \int_S \begin{pmatrix} n_k m_{1k} & n_k m_{2k} & n_k m_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{1j} \sigma_{ji} m_{ih} n_h \\ \dot{\varepsilon}_{2j} \sigma_{ji} m_{ih} n_h \\ \dot{\varepsilon}_{3j} \sigma_{ji} m_{ih} n_h \end{pmatrix} R(Q) dS dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\Delta t} \int_S n_k(Q) m_{lk} \dot{\varepsilon}_{lj}(P, t) \sigma_{ji}(Q) m_{ih} n_h(Q) R(Q) dS dt$$

Adesso introduciamo le consuete coordinate polari rispetto al sistema di riferimento x, y, z . Considerando che $dS = R^2(Q) \sin(\varphi) d\varphi d\theta$ si ha

$$L^i(P) = \int_0^{\Delta t} \int_S n_k(Q) m_{lk} \dot{\varepsilon}_{lj}(P, t) \sigma_{ji}(Q) m_{ih} n_h(Q) R(Q) R^2(Q) \sin(\varphi) d\varphi d\theta dt$$

Adesso divido per il volume della sfera e effettuo il limite per $\Delta V \rightarrow 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} dL^i(P) &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\Delta t} \int_S n_k(Q) m_{lk} \dot{\varepsilon}_{lj}(P, t) \sigma_{ji}(Q) m_{ih} n_h(Q) R(Q) R^2(Q) \sin(\varphi) d\varphi d\theta dt}{\frac{4\pi}{3} R^3(Q)} = \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_0^{\Delta t} \int_S n_k(Q) m_{lk} \dot{\varepsilon}_{lj}(P, t) \sigma_{ji}(P) m_{ih} n_h(Q) \sin(\varphi) d\varphi d\theta dt \end{aligned}$$

Adesso scriviamo l'integrale di cui sopra come l'integrale di una forma differenziale nelle 6 variabili definite dalle componenti di deformazione, in modo da eliminare l'integrazione sul tempo:

$$dL^i(P) = \frac{3}{4\pi} \int_{\gamma} \int_S n_k(Q) m_{lk} x d\varepsilon_{lj}(P) \sigma_{ji}(P) m_{ih} n_h(Q) \sin(\varphi) d\varphi d\theta$$

Otteniamo cioè l'integrale di una forma differenziale con γ che rappresenta una curva di 6 dimensioni la quale descrive i valori assunti in P dalle sei componenti di deformazione mentre avviene la deformazione. Riscrivendo:

$$dL^i(P) = \frac{3}{4\pi} \int_{\gamma} \left(\begin{aligned} & m_{lk} d\varepsilon_{l1}(P) \sigma_{li}(P) m_{ih} \int_S n_k(Q) n_h(Q) \sin(\varphi) d\varphi d\theta + \\ & + m_{lk} d\varepsilon_{l2}(P) \sigma_{2i}(P) m_{ih} \int_S n_k(Q) n_h(Q) \sin(\varphi) d\varphi d\theta + \\ & + m_{lk} d\varepsilon_{l3}(P) \sigma_{3i}(P) m_{ih} \int_S n_k(Q) n_h(Q) \sin(\varphi) d\varphi d\theta \end{aligned} \right) \Leftrightarrow$$

$$5.3) \quad dL^i(P) = \frac{3}{4\pi} \int_{\gamma} (m_{lk} d\varepsilon_{l1}(P) \sigma_{li}(P) m_{ih} I_{kh} + m_{lk} d\varepsilon_{l2}(P) \sigma_{2i}(P) m_{ih} I_{kh} + m_{lk} d\varepsilon_{l3}(P) \sigma_{3i}(P) m_{ih} I_{kh})$$

Adesso calcolo i 9 integrali I_{kh} al variare degli indici:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (n_1(Q) n_1(Q)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (\sin(\varphi) \cos(\theta) \sin(\varphi) \cos(\theta)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2(\theta) \sin^3(\varphi) d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2(\theta) \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3(\varphi) d\varphi \right) d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2(\theta) \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} (1 - \cos^2(\varphi)) d \cos(\varphi) \right) d\theta = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2(\theta) \left(-2 - \left(\frac{\cos^3(\varphi)}{3} \right)_0^{\pi} \right) d\theta = \\
&= - \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2(\theta) \left(-2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \right) d\theta = \frac{4}{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \\
&= \frac{4}{3} \frac{\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \frac{2\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (n_1(Q)n_2(Q)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (\sin(\varphi)\cos(\theta)\sin(\varphi)\sin(\theta)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin(\theta)\cos(\theta)\sin^3(\varphi) d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta) \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3(\varphi) d\varphi \right) d\theta = \\
&= \frac{4}{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta) d\theta = \frac{4}{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta) d \sin(\theta) = \frac{4}{3} \frac{\sin^2(\theta)}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \left(\frac{\sin^2(2\pi)}{2} - \frac{\sin^2(0)}{2} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{13} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (n_1(Q)n_3(Q)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (\sin(\varphi)\cos(\theta)\cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta) \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2(\varphi)\cos(\varphi) d\varphi \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta) \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2(\varphi) d \sin(\varphi) \right) d\theta = \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta) \left(\frac{\sin^3(\varphi)}{3} \right)_0^{\pi} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta) \left(\frac{\sin^3(\varphi)}{3} \right)_0^{\pi} d\theta = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (n_2(Q)n_1(Q)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (\sin(\varphi)\sin(\theta)\sin(\varphi)\cos(\theta)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin(\theta)\cos(\theta)\sin^3(\varphi) d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta) d\theta \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3(\varphi) d\varphi = \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta) d \sin(\theta) \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3(\varphi) d\varphi = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (n_2(Q)n_2(Q)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (\sin(\varphi)\sin(\theta)\sin(\varphi)\sin(\theta)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2(\theta)\sin^3(\varphi) d\varphi d\theta = \left(\frac{\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3(\varphi) d\varphi = \frac{2\pi - 0}{2} \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{23} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (n_2(Q)n_3(Q)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (\sin(\varphi)\sin(\theta)\cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\varphi d\theta = \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin(\theta)\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta) d\theta \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos(\varphi)\sin^2(\varphi) d\varphi = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{31} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (n_3(Q)n_1(Q))\sin(\varphi)d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (\cos(\varphi)\sin(\varphi)\cos(\theta))\sin(\varphi)d\varphi d\theta = \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta)d\theta \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)d\varphi = 0 \\
I_{32} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (n_3(Q)n_2(Q))\sin(\varphi)d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (\cos(\varphi)\sin(\varphi)\sin(\theta))\sin(\varphi)d\varphi d\theta = \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin(\theta)d\theta \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)d\varphi = 0 \\
I_{33} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (n_3(Q)n_3(Q))\sin(\varphi)d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (\cos(\varphi)\cos(\varphi))\sin(\varphi)d\varphi d\theta = \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi = -2\pi \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2(\varphi)d\cos(\varphi) = \\
&= -2\pi \left(\frac{\cos^3(\varphi)}{3} \right) \Big|_0^{\pi} = -2\pi \left(\frac{\cos^3 \pi}{3} - \frac{\cos^3 0}{3} \right) = -2\pi \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

Sostituendo nella **5.3** abbiamo

$$5.4) \quad dL^i(P) = \int^{\gamma} \left(\begin{aligned} &m_{11}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{1i}(P)m_{i1} + m_{12}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{1i}(P)m_{i2} + m_{13}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{1i}(P)m_{i3} + \\ &+ m_{11}d\varepsilon_{12}(P)\sigma_{2i}(P)m_{i1} + m_{12}d\varepsilon_{12}(P)\sigma_{2i}(P)m_{i2} + m_{13}d\varepsilon_{12}(P)\sigma_{2i}(P)m_{i3} + \\ &+ m_{11}d\varepsilon_{13}(P)\sigma_{3i}(P)m_{i1} + m_{12}d\varepsilon_{13}(P)\sigma_{3i}(P)m_{i2} + m_{13}d\varepsilon_{13}(P)\sigma_{3i}(P)m_{i3} \end{aligned} \right)$$

Sviluppando la prima riga dentro l'integrale abbiamo

$$\begin{aligned}
&m_{11}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{1i}(P)m_{i1} + m_{12}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{1i}(P)m_{i2} + m_{13}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{1i}(P)m_{i3} = \\
&= m_{11}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{11}(P)m_{11} + m_{11}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{12}(P)m_{21} + m_{11}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{13}(P)m_{31} + \\
&+ m_{21}d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{11}(P)m_{11} + m_{21}d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{12}(P)m_{21} + m_{21}d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{13}(P)m_{31} + \\
&+ m_{31}d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{11}(P)m_{11} + m_{31}d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{12}(P)m_{21} + m_{31}d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{13}(P)m_{31} + \\
&+ m_{12}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{11}(P)m_{12} + m_{12}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{12}(P)m_{22} + m_{12}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{13}(P)m_{32} + \\
&+ m_{22}d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{11}(P)m_{12} + m_{22}d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{12}(P)m_{22} + m_{22}d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{13}(P)m_{32} + \\
&+ m_{32}d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{11}(P)m_{12} + m_{32}d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{12}(P)m_{22} + m_{32}d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{13}(P)m_{32} + \\
&+ m_{13}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{11}(P)m_{13} + m_{13}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{12}(P)m_{23} + m_{13}d\varepsilon_{11}(P)\sigma_{13}(P)m_{33} + \\
&+ m_{23}d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{11}(P)m_{13} + m_{23}d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{12}(P)m_{23} + m_{23}d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{13}(P)m_{33} + \\
&+ m_{33}d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{11}(P)m_{13} + m_{33}d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{12}(P)m_{23} + m_{33}d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{13}(P)m_{33}
\end{aligned}$$

E raccogliendo opportunamente troviamo

$$\begin{aligned}
& m_{i1}d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i1}(P)m_{i1} + m_{i2}d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i1}(P)m_{i2} + m_{i3}d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i1}(P)m_{i3} = \\
& = d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i1}(P)(m_{i1}m_{i1} + m_{i2}m_{i2} + m_{i3}m_{i3}) + \\
& + d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i2}(P)(m_{i1}m_{21} + m_{i2}m_{22} + m_{i3}m_{23}) + \\
& + d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i3}(P)(m_{i1}m_{31} + m_{i2}m_{32} + m_{i3}m_{33}) + \\
& + d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{i1}(P)(m_{21}m_{i1} + m_{22}m_{i2} + m_{23}m_{i3}) + \\
& + d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{i2}(P)(m_{21}m_{21} + m_{22}m_{22} + m_{23}m_{23}) + \\
& + d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{i3}(P)(m_{21}m_{31} + m_{22}m_{32} + m_{23}m_{33}) + \\
& + d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{i1}(P)(m_{31}m_{i1} + m_{32}m_{i2} + m_{33}m_{i3}) + \\
& + d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{i2}(P)(m_{31}m_{21} + m_{32}m_{22} + m_{33}m_{23}) + \\
& + d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{i3}(P)(m_{31}m_{31} + m_{32}m_{32} + m_{33}m_{33})
\end{aligned}$$

Adesso ricordiamo che la matrice M ha come colonne (e dunque come righe) versori fra loro ortogonali. Pertanto quanto sopra si riduce a

$$\begin{aligned}
& m_{i1}d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i1}(P)m_{i1} + m_{i2}d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i1}(P)m_{i2} + m_{i3}d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i1}(P)m_{i3} = \\
& = d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i1}(P) + d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{i2}(P) + d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{i3}(P)
\end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo per la 2° e la 3° riga dell'integrale in 5.4 si ha

$$\begin{aligned}
& m_{i1}d\varepsilon_{i2}(P)\sigma_{2i}(P)m_{i1} + m_{i2}d\varepsilon_{i2}(P)\sigma_{2i}(P)m_{i2} + m_{i3}d\varepsilon_{i2}(P)\sigma_{2i}(P)m_{i3} = \\
& = d\varepsilon_{i2}(P)\sigma_{21}(P) + d\varepsilon_{22}(P)\sigma_{22}(P) + d\varepsilon_{32}(P)\sigma_{23}(P)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_{i1}d\varepsilon_{i3}(P)\sigma_{3i}(P)m_{i1} + m_{i2}d\varepsilon_{i3}(P)\sigma_{3i}(P)m_{i2} + m_{i3}d\varepsilon_{i3}(P)\sigma_{3i}(P)m_{i3} = \\
& = d\varepsilon_{i3}(P)\sigma_{31}(P) + d\varepsilon_{23}(P)\sigma_{32}(P) + d\varepsilon_{33}(P)\sigma_{33}(P)
\end{aligned}$$

Ricomponendo tutto nella 5.4 si ha la tesi:

$$\begin{aligned}
dL^i(P) &= \int_{\gamma} \left(\begin{aligned} & d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i1}(P) + d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{i2}(P) + d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{i3}(P) + \\ & + d\varepsilon_{i2}(P)\sigma_{21}(P) + d\varepsilon_{22}(P)\sigma_{22}(P) + d\varepsilon_{32}(P)\sigma_{23}(P) + \\ & + d\varepsilon_{i3}(P)\sigma_{31}(P) + d\varepsilon_{23}(P)\sigma_{32}(P) + d\varepsilon_{33}(P)\sigma_{33}(P) \end{aligned} \right) = \\
&= \int_{\gamma} \left(\begin{aligned} & d\varepsilon_{i1}(P)\sigma_{i1}(P) + d\varepsilon_{22}(P)\sigma_{22}(P) + d\varepsilon_{33}(P)\sigma_{33}(P) + 2d\varepsilon_{21}(P)\sigma_{i2}(P) + 2d\varepsilon_{31}(P)\sigma_{i3}(P) + \\ & + 2d\varepsilon_{32}(P)\sigma_{23}(P) \end{aligned} \right) = \\
&= \int_{\gamma} \left(\begin{aligned} & \sigma_x(P)d\varepsilon_x(P) + \sigma_y(P)d\varepsilon_y(P) + \sigma_z(P)d\varepsilon_z(P) + \sigma_{xy}(P)d\gamma_{xy}(P) + \sigma_{xz}(P)d\varepsilon_{xz}(P) + \sigma_{yz}(P)d\varepsilon_{yz}(P) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

Si sottolinea che **questa formula vale per il generico corpo deformabile**, senza ipotesi particolari. Si vedrà nel capitolo successivo come sia possibile calcolare questo integrale sotto certe ipotesi sulla natura del corpo.

5.2. Teorema del lavoro virtuale. Dato un corpo continuo e deformabile, dico **sistema di spostamenti virtuali** qualunque campo di spostamenti congruenti (cioè tali da non lacerare il corpo, ovvero tali da generare deformazioni che soddisfino le 3.24). Il relativo sistema di deformazioni è definito come un **sistema di deformazioni virtuali**.

Dato la generica sollecitazione $\vec{F}(P), \vec{p}(P)$ (forze di volume e forze di superficie rispettivamente) agente sul corpo e il generico sistema di spostamenti virtuali $\vec{S}(P)$, definisco **lavoro virtuale esterno** relativo alla sollecitazione data la grandezza

$$5.5) \quad L_{ve} \stackrel{\Delta}{=} \int_{\Omega} \vec{F}(P) \cdot \vec{S}(P) dV + \int_{\Psi} \vec{p}(P) \cdot \vec{S}(P) d\Psi$$

dove si intende che il corpo occupa il dominio Ω di frontiera $\partial\Omega = \Psi$. Si sottolinea che **il lavoro virtuale esterno non è, in generale, coincidente con il lavoro che le forze esterne realizzerebbero in corrispondenza a un sistema di spostamenti $\vec{S}(P)$** (vedi in merito il Teorema di Clapeyron).

Nelle condizioni di cui sopra, assegnato un sistema di deformazioni virtuali ε_{ij} , diremo lavoro virtuale interno relativo a ε_{ij} , la quantità

$$5.6) \quad L_{vi} \stackrel{\Delta}{=} \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV$$

Si sottolinea che questo **non è il lavoro che le tensioni realizzerebbero in corrispondenza a un sistema di deformazioni pari a quello virtuale**.

Il **teorema dei lavori virtuali** asserisce che, se il corpo è in **equilibrio con la sollecitazione esterna**, allora sussiste la eguaglianza

$$5.7) \quad L_{ve} \stackrel{\Delta}{=} \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{S} dV + \int_{\partial\Omega} \vec{p} \cdot \vec{S} dS = \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \stackrel{\Delta}{=} L_{vi}$$

per qualunque sistema di spostamenti virtuali (con relativo sistema di deformazioni virtuali).

La dimostrazione consiste nello sviluppare l'espressione del lavoro virtuale esterno. Sappiamo che, con la sollecitazione data, il corpo è in equilibrio, allora devono valere le equazioni indefinite dell'equilibrio (**1.15, 1.16**) che riscrivo esplicitando le forze:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \\ F_y = -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} \\ F_z = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} p_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = \sigma_{1j} n_j \\ p_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = \sigma_{2j} n_j \\ p_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = \sigma_{3j} n_j \end{array} \right.$$

L'espressione del lavoro virtuale esterno in forma indiciale si scrive

$$L_{ve} = \int_{\Omega} (F_x u + F_y v + F_z w) dV + \int_{\Psi} (p_x u + p_y v + p_z w) d\Psi = \int_{\Omega} F_i u_i dV + \int_{\Psi} p_i u_i d\Psi$$

Sostituendovi le condizioni di equilibrio abbiamo

$$L_{ve} = -\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i dV + \int_{\Psi} \sigma_{ij} n_j u_i d\Psi$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo integrale ottengo

$$\begin{aligned} L_{ve} &= -\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i dV + \int_{\Omega} \frac{\partial (\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} dV = \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV \end{aligned}$$

Ma se il corpo è in equilibrio allora il tensore delle tensioni è simmetrico e dunque

$$L_{ve} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = L_{vi}$$

Sottolineo ancora che **questo teorema è stato dimostrato per il generico corpo deformabile in equilibrio, senza particolari ipotesi** (elasticità o altro).

5.3. Teorema del lavoro virtuale per corpi rigidi. Il corpo rigido si può pensare come un tipo di corpo deformabile in cui le deformazioni sono talmente piccole da essere nulle; dunque il teorema dimostrato deve valere anche per i corpi rigidi. Ma con deformazioni nulle si ha che **in un corpo rigido in equilibrio meccanico con una data sollecitazione esterna il lavoro virtuale esterno della stessa sollecitazione è nullo per qualunque sistema di spostamenti virtuali.**

Ma la cosa interessante è che si può dimostrare anche che **se per un corpo rigido e una sollecitazione esterna il lavoro virtuale esterno è nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali, allora il corpo è in equilibrio meccanico con quella sollecitazione.**

Infatti consideriamo il generico sistema di spostamenti virtuali rigidi

$$\vec{s}(P) = \vec{s}(O) + \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

dove O, P sue punti solidali al corpo e $\vec{\omega}$ è il vettore rotazione. Si osserva **che questa è la formula approssimata di uno spostamento rigido, tanto più precisa quanto più piccolo è l'angolo di rotazione.** Data allora la sollecitazione $\vec{F}(P), \vec{p}(P)$ il lavoro virtuale esterno si scrive

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \int_{\Omega} \left(\vec{F} \cdot \vec{s}(O) + \vec{F} \cdot \vec{\omega} \times \vec{OP} \right) dV + \int_{\Psi} \left(\vec{p} \cdot \vec{s}(O) + \vec{p} \cdot \vec{\omega} \times \vec{OP} \right) d\Psi = \\ &= \int_{\Omega} \left(\vec{F} \cdot \vec{s}(O) + \vec{OP} \cdot \vec{F} \times \vec{\omega} \right) dV + \int_{\Psi} \left(\vec{p} \cdot \vec{s}(O) + \vec{OP} \cdot \vec{p} \times \vec{\omega} \right) d\Psi = \\ &= \vec{s}(O) \cdot \left(\int_{\Omega} \vec{F} dV + \int_{\Psi} \vec{p} d\Psi \right) + \int_{\Omega} \left(\vec{\omega} \cdot \vec{F} \times \vec{OP} \right) dV + \int_{\Psi} \left(\vec{\omega} \cdot \vec{p} \times \vec{OP} \right) d\Psi = \end{aligned}$$

$$\vec{S}(O) \cdot \left(\int_{\Omega} \vec{F} dV + \int_{\Psi} \vec{p} d\Psi \right) + \vec{\omega} \cdot \left(\int_{\Omega} (\vec{F}(P) \times \vec{OP}) dV + \int_{\Psi} (\vec{p}(P) \times \vec{OP}) d\Psi \right)$$

dove ho permutato due volte ciascuno dei due prodotti misti. Ma se, per ipotesi, il lavoro virtuale esterno deve essere nullo per qualunque campo di spostamenti virtuali, allora necessariamente le quantità in parentesi debbono annullarsi, cioè deve aversi

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \vec{F} dV + \int_{\Psi} \vec{p} d\Psi = 0 \\ \int_{\Omega} (\vec{F}(P) \times \vec{PO}) dV + \int_{\Psi} (\vec{p}(P) \times \vec{PO}) d\Psi = 0 \end{cases}$$

Ma di queste due equazioni la prima indica l'annullamento della risultante della sollecitazione e la seconda l'annullamento del momento totale della sollecitazione rispetto al polo O . Ne segue che il corpo rigido è in equilibrio, se soggetto alla sollecitazione $\vec{F}(P), \vec{p}(P)$.

Capitolo 6. Elasticità

6.1. Corpo elastico. Un corpo si definisce elastico quando la forma differenziale

$$6.1) \quad dL^i = \sigma_x(P)d\varepsilon_x(P) + \sigma_y(P)d\varepsilon_y(P) + \sigma_z(P)d\varepsilon_z(P) + \sigma_{xy}(P)d\gamma_{xy}(P) + \sigma_{xz}(P)d\varepsilon_{xz}(P) + \sigma_{yz}(P)d\varepsilon_{yz}(P)$$

è esatta, ovvero quando il lavoro interno di deformazione per unità di volume calcolato nel paragrafo 5.1 come

$$dL^i(P) = \int_{\gamma} (\sigma_x(P)d\varepsilon_x(P) + \sigma_y(P)d\varepsilon_y(P) + \sigma_z(P)d\varepsilon_z(P) + \sigma_{xy}(P)d\gamma_{xy}(P) + \sigma_{xz}(P)d\varepsilon_{xz}(P) + \sigma_{yz}(P)d\varepsilon_{yz}(P))$$

e quindi anche quello relativo a tutto il corpo, dipende solo dalla configurazione iniziale e da quella finale, e non dal percorso di deformazione seguito.

6.2. Potenziale elastico. Assegnato un corpo elastico, diciamo suo potenziale elastico la primitiva del lavoro interno di deformazione per unità di volume. Si tratta di una funzione a sei variabili comunemente indicata

$$6.2) \quad \Phi = \Phi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$$

Dati due stati di deformazione A, B del corpo, sussiste allora la relazione

$$\Phi(B) = \Phi(A) + \int_A^B (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz})$$

Se in particolare si prende come stato iniziale lo stato a deformazione nulla si avrà

$$\Phi(B) = \Phi(0) + \int_0^B (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz})$$

Per definizione di primitiva sussistono poi le 6 relazioni

$$6.3) \quad \begin{aligned} \sigma_x(\varepsilon_{ij}) &= \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_x} & \sigma_y(\varepsilon_{ij}) &= \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_y} & \sigma_z &= \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_z} \\ \tau_{xy}(\varepsilon_{ij}) &= \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \gamma_{xy}} & \tau_{xz}(\varepsilon_{ij}) &= \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \gamma_{xz}} & \tau_{yz}(\varepsilon_{ij}) &= \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \gamma_{yz}} \end{aligned}$$

dalle quali si evince che la conoscenza del potenziale elastico permetterebbe di ricavare dei legami fra sforzi e deformazioni.

6.3. Corpo elastico lineare. Lo sviluppo di MacLaurin (cioè avente come punto iniziale lo stato a deformazione nulla, cioè quello stato in cui le sei componenti di deformazione sono nulle) del secondo ordine del potenziale elastico porge

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xy}} \varepsilon_z \gamma_{xy} + 2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xz}} \varepsilon_z \gamma_{xz} + 2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{yz}} \varepsilon_z \gamma_{yz} + \\
& + 2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{xz}} \gamma_{xy} \gamma_{xz} + 2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{yz}} \gamma_{xy} \gamma_{yz} + \\
& + 2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xz} \partial \gamma_{yz}} \gamma_{xz} \gamma_{yz}
\end{aligned}$$

Ora si dice che **il corpo elastico è lineare se**

- **il potenziale elastico della configurazione indeformata vale zero**
- **se le 6 componenti speciali di tensione relative a tale configurazione sono nulle**
- **se il resto del secondo ordine dello sviluppo di McLaurin è trascurabile**

La seconda condizione, in base alle **6.3**, comporta che il differenziale del primo ordine del potenziale elastico sia nullo. Considerando questo e le altre due condizioni concludiamo che

$$\begin{aligned}
6.5) \quad \Phi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) &= \frac{1}{2} d^2 \Phi(0, \Delta \varepsilon) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_x} \varepsilon_x^2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_y} \varepsilon_y^2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \varepsilon_z} \varepsilon_z^2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{xy}} \gamma_{xy}^2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{yz}} \gamma_{yz}^2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xz} \partial \gamma_{xz}} \gamma_{xz}^2 \right) + \\
&+ \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z} \varepsilon_x \varepsilon_z + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}} \varepsilon_x \gamma_{xy} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xz}} \varepsilon_x \gamma_{xz} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}} \varepsilon_x \gamma_{yz} + \\
&+ \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_z} \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xy}} \varepsilon_y \gamma_{xy} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xz}} \varepsilon_y \gamma_{xz} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{yz}} \varepsilon_y \gamma_{yz} + \\
&+ \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xy}} \varepsilon_z \gamma_{xy} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xz}} \varepsilon_z \gamma_{xz} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{yz}} \varepsilon_z \gamma_{yz} + \\
&+ \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{xz}} \gamma_{xy} \gamma_{xz} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{yz}} \gamma_{xy} \gamma_{yz} + \\
&+ \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xz} \partial \gamma_{yz}} \gamma_{xz} \gamma_{yz}
\end{aligned}$$

Riconsideriamo ora le relazioni **6.3** e calcoliamole alla luce della **6.5**. Calcoliamo per esempio la prima. Si ha

$$\begin{aligned}
\sigma_x(\varepsilon_{ij}) &= \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_x} = \frac{\partial (\frac{1}{2} d^2 \Phi(0, \varepsilon))}{\partial \varepsilon_x} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x^2} 2 \varepsilon_x \right) + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \varepsilon_y + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z} \varepsilon_z + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}} \gamma_{xy} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xz}} \gamma_{xz} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}} \gamma_{yz} = \\
&= \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x^2} \varepsilon_x + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \varepsilon_y + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z} \varepsilon_z + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}} \gamma_{xy} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xz}} \gamma_{xz} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}} \gamma_{yz}
\end{aligned}$$

Sviluppando anche le altre 5 relazioni si perviene al seguente **legame fra componenti speciali di tensione e di deformazione**:

6.6)

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x^2} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_x} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y^2} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \varepsilon_x} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z^2} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy} \partial \varepsilon_x} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy} \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy} \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy}^2} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xy} \partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xz} \partial \varepsilon_x} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xz} \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xz} \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xz} \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xz}^2} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{xz} \partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{yz} \partial \varepsilon_x} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{yz} \partial \varepsilon_y} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{yz} \partial \varepsilon_z} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{xz}} & \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \gamma_{yz}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}$$

↑
 M

I coefficienti sono 36, ma data la simmetria della matrice essi si riducono a $(36-6)/2+6=21$. Detta M tale matrice, considerando la **6.9** (vedi oltre) abbiamo

$$\begin{aligned} 6.7) \quad \Phi(\varepsilon_{ij}) &= \frac{1}{2} (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}) (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz})^T = \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}) M (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz})^T \end{aligned}$$

Quindi M è la matrice associata alla forma quadratica $2\Phi(\varepsilon_{ij})$. Ma essendo tale forma quadratica definita positiva, per via del suo significato fisico, ne segue che

$$6.8) \quad \det M \neq 0$$

La matrice è invertibile essendo matrice associata alla forma quadratica $\Phi(\varepsilon_{ij})$ la quale è definita positiva in base al suo significato fisico.

Partendo dalla **6.5** si dimostra anche che

$$6.9) \quad \Phi(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} [\sigma_x(\varepsilon_{ij})\varepsilon_x + \sigma_y(\varepsilon_{ij})\varepsilon_y + \sigma_z(\varepsilon_{ij})\varepsilon_z + \tau_{xy}(\varepsilon_{ij})\gamma_{xy} + \tau_{xz}(\varepsilon_{ij})\gamma_{xz} + \tau_{yz}(\varepsilon_{ij})\gamma_{yz}]$$

che costituisce l'espressione del **lavoro di deformazione per unità di volume in funzione di componenti speciali di deformazione e di tensione** e che dunque fornisce il valore dell'integrale **5.1** nel caso di corpi elastici lineari.

Infatti la funzione **6.5** risulta una funzione omogenea di grado 2 essendo evidentemente

$$\Phi(t\varepsilon_x, t\varepsilon_y, t\varepsilon_z, t\gamma_{xy}, t\gamma_{xz}, t\gamma_{yz}) = \frac{1}{2} t^2 d^2 \Phi(0, \Delta\varepsilon) = t^2 \Phi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$$

Quindi possiamo applicare a essa il teorema di Eulero ottenendo

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_x} \varepsilon_x + \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_y} \varepsilon_y + \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_z} \varepsilon_z + \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \gamma_{xy}} \gamma_{xy} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \gamma_{xz}} \gamma_{xz} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial \gamma_{yz}} \gamma_{yz} = 2\Phi(\varepsilon_{ij})$$

Sostituendo in questo risultato le **6.3** abbiamo allora la tesi **6.9**.

6.5. Corpo elastico lineare isotropo. Si parla di isotropia rispetto una data proprietà, in un punto, quando lungo tutte le direzioni uscenti da quel punto la suddetta proprietà non muta. Si dimostra che se il corpo è isotropo rispetto alla lineare elasticità, allora il potenziale elastico può scriversi nella forma

$$6.10) \quad \Phi(\varepsilon_{ij}) = G \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + 2G \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)$$

⇕

$$6.11) \quad \Phi(\varepsilon_{ij}) = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) + \frac{E}{4(1+\nu)} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)$$

in cui le costanti prendono il nome di **moduli elastici** e soddisfano le relazioni seguenti

$$6.12) \quad E = 2(1+\nu)G : \text{ modulo elastico o modulo di Young}$$

$$6.13) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} : \text{ modulo di elasticità tangenziale}$$

$$6.14) \quad \nu = \frac{E-2G}{2G} : \text{ coefficiente di contrazione trasversale o coefficiente di Poisson}$$

Si dimostrano le seguenti limitazioni per i tre coefficienti

$$6.15) \quad G > \frac{E}{3} > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

Inoltre nei materiali di uso comune si riscontra

$$6.16) \quad 0 < \nu < 1/2$$

Riporto i valori di tali coefficienti per alcuni materiali:

MATERIALE	G ($GPa = 10^9 Pa = 10^9 N/m^2$)	E ($GPa = 10^9 Pa = 10^9 N/m^2$)	ν
ACCIAIO	70-75	200	0,3-0,4
ALLUMINIO	20-21	70	/
CALCESTRUZZO	/	20 (compressione)	0,12-0,25

Per dimostrare le **6.10-6.11** bisogna partire dalla **6.5** (corpo elastico lineare) e aggiungere l'ipotesi di isotropia. Intanto mettiamoci nel sistema di riferimento definito dalle direzioni principali di tensione, e la **6.5** si scrive

$$6.16) \quad \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_1} \varepsilon_1^2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_2} \varepsilon_2^2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_3 \partial \varepsilon_3} \varepsilon_3^2 \right) + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_3} \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_3} \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

Ora consideriamo i tre stati di deformazione seguenti

$$\begin{aligned} \text{stato_1:} \quad & \varepsilon_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = 0 \quad \varepsilon_3 = \varepsilon \\ \text{stato_2:} \quad & \varepsilon_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = \varepsilon \quad \varepsilon_3 = 0 \\ \text{stato_3:} \quad & \varepsilon_1 = \varepsilon \quad \varepsilon_2 = 0 \quad \varepsilon_3 = 0 \end{aligned}$$

È chiaro che se si ha isotropia il lavoro di deformazione necessario a realizzare ciascuno di questi 3 stati deve essere lo stesso. In altri termini il potenziale elastico associato a ciascuno dei 3 stati di deformazione deve essere lo stesso. Dunque si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stato_1:} \quad \Phi(0,0,\varepsilon) = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_3 \partial \varepsilon_3} \varepsilon^2 \\ \text{stato_2:} \quad \Phi(0,\varepsilon,0) = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_2} \varepsilon^2 \\ \text{stato_3:} \quad \Phi(\varepsilon,0,0) = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_1} \varepsilon^2 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_3 \partial \varepsilon_3} = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_2} = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_1} = 2A$$

Sostituendo la costante A , appena definita, nella **6.15** abbiamo

$$6.17) \quad \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = A(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_3} \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_3} \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

Ma ancora non siamo arrivati alla **6.10-6.11**, per cui procediamo ancora come sopra e consideriamo i tre stati di deformazione

$$\begin{aligned} \text{stato_1:} \quad & \varepsilon_1 = \varepsilon \quad \varepsilon_2 = \varepsilon \quad \varepsilon_3 = 0 \\ \text{stato_2:} \quad & \varepsilon_1 = \varepsilon \quad \varepsilon_2 = 0 \quad \varepsilon_3 = \varepsilon \\ \text{stato_3:} \quad & \varepsilon_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = \varepsilon \quad \varepsilon_3 = \varepsilon \end{aligned}$$

Anche qui l'isotropia impone che i relativi potenziali elastici siano uguali, dunque

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stato_1:} \quad \Phi(\varepsilon, \varepsilon, 0) = A\varepsilon^2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} \varepsilon^2 \\ \text{stato_2:} \quad \Phi(\varepsilon, 0, \varepsilon) = A\varepsilon^2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_3} \varepsilon^2 \\ \text{stato_3:} \quad \Phi(0, \varepsilon, \varepsilon) = A\varepsilon^2 + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_3} \varepsilon^2 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_3} = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_3} = B$$

Sostituendo nella **6.17** si ha

$$6.18) \quad \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = A(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + B(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3)$$

Ora debbo esprimere la **6.18** nel generico sistema di riferimento. Per far questo posso cercare di esprimerla in funzione degli invarianti del tensore delle deformazioni, le cui espressioni si trovano nel paragrafo **3.12**. In particolare, in funzione delle componenti principali essi si scrivono

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad I_2 = -\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3 \quad I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

Considerando il primo e il secondo si ha

$$I_1^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 - 2I_2 \Rightarrow \\ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = I_1^2 + 2I_2$$

Sostituendo nella **6.18** abbiamo

$$6.19) \quad \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = A(I_1^2 + 2I_2) - I_2B$$

Adesso non resta che sostituire nella **6.19** le espressioni dei 2 primi invarianti rispetto al generico sistema di riferimento. Sempre dal paragrafo **3.12** si ha

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ I_2 = \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) - (\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z)$$

che sostituiti nella **6.19** permettono di scrivere

$$\Phi(\varepsilon_{ij}) = A\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)\right) - \left(\frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) - (\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z)\right)B = \\ = A(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + B(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z) + \frac{2A-B}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)$$

Ora per completare la dimostrazione della **6.10-6.11** rimane solo da vedere se è possibile trovare A, B in modo che soddisfino le 3 equazioni

$$A = G \frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad B = 2G \frac{\nu}{1-2\nu}, \quad \frac{2A-B}{4} = \frac{G}{2}$$

E in effetti se sostituiamo le prime due nella seconda si ha

$$\frac{2\left(G \frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) - 2G \frac{\nu}{1-2\nu}}{4} = G \frac{1-\nu-\nu}{1-2\nu} = G \frac{1-2\nu}{2(1-2\nu)} = \frac{G}{2}$$

E con ciò la **6.10** e la **6.11** sono dimostrate.

6.6. Leggi di Hooke inverse e dirette. In base alla espressione trovata per il potenziale elastico e ricordando le **6.3**, la relazione matriciale fra sforzi e deformazioni diventa

$$6.20) \quad \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}$$

che esplicitata porge le **leggi di Hooke inverse**

$$6.21) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] \\ \sigma_z &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \end{aligned}$$

Invertendo poi la matrice M si ricavano le **leggi di Hooke dirette**

$$6.22) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned}$$

In base alle leggi di Hooke si deduce che **le direzioni principali di deformazione sono anche direzioni principali di tensione nel caso di corpi elastici lineari.**

Per dimostrare le **6.22** è necessario calcolare $N = M^{-1}$. Calcoliamo allora intanto $\det M$:

$$\begin{aligned}
\det M &= 8G^3 \begin{vmatrix} 1-v/1-2v & v/1-2v & v/1-2v \\ v/1-2v & 1-v/1-2v & v/1-2v \\ v/1-2v & v/1-2v & 1-v/1-2v \end{vmatrix} G^3 = \frac{8G^6}{(1-2v)^3} \begin{vmatrix} 1-v & v & v \\ v & 1-v & v \\ v & v & 1-v \end{vmatrix} = \\
&= \frac{8G^6}{(1-2v)^3} \left((1-v) \begin{vmatrix} 1-v & v \\ v & 1-v \end{vmatrix} - v \begin{vmatrix} v & v \\ v & 1-v \end{vmatrix} + v \begin{vmatrix} v & 1-v \\ v & v \end{vmatrix} \right) = \\
&= \frac{8G^6}{(1-2v)^3} \left[(1-v)((1-v)^2 - v^2) - v(v(1-v) - v^2) + v(v^2 - v(1-v)) \right] = \\
&= \frac{8G^6}{(1-2v)^3} \left[(1-v)((1-v) - v)((1-v) + v) - v(v(1-v) - v^2) - v(v(1-v) - v^2) \right] = \\
&= \frac{8G^6}{(1-2v)^3} \left[(1-v)(1-2v) - 2v(v - v^2 - v^2) \right] = 8G^6(1-2v)^3 \left[(1-v)(1-2v) - 2v(v - 2v^2) \right] = \\
&= \frac{8G^6}{(1-2v)^3} (4v^3 - 3v + 1) = \frac{8G^6}{(1-2v)^3} (4v^2 - 4v + 1)(v + 1) = 8G^6 \frac{v+1}{1-2v}
\end{aligned}$$

Allora per gli elementi diagonali si ha

$$\begin{aligned}
n_{11} = n_{22} = n_{33} &= \frac{M^{11}}{\det M} = \frac{(-1)^{1+1}}{\det M} 4G^2 \begin{vmatrix} 1-v & v \\ 1-2v & 1-2v \\ v & 1-v \\ 1-2v & 1-2v \end{vmatrix} G^3 = \frac{4G^5}{\det M (1-2v)^2} \begin{vmatrix} 1-v & v \\ v & 1-v \end{vmatrix} = \\
&= \frac{4G^5}{\det M (1-2v)^2} \left((1-v)^2 - v^2 \right) = \frac{4G^5}{\det M (1-2v)^2} (1-2v) = \frac{1}{2G(v+1)} = \frac{1}{E}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{44} = n_{55} = n_{66} &= \frac{M^{44}}{\det M} = \frac{(-1)^{4+4}}{\det M} 8G^3 \begin{vmatrix} 1-v/1-2v & v/1-2v & v/1-2v \\ v/1-2v & 1-v/1-2v & v/1-2v \\ v/1-2v & v/1-2v & 1-v/1-2v \end{vmatrix} G^2 = \\
&= \frac{1}{\det M} \frac{\det M}{G} = \frac{1}{G} = \frac{2(v+1)}{E}
\end{aligned}$$

Inoltre gli elementi corrispondenti agli elementi nulli di M sono nulli in quanto i relativi complementi algebrici sono i determinanti di matrici con una riga nulla. E ancora

$$\begin{aligned}
n_{21} &= \frac{M^{21}}{\det M} = \frac{(-1)^{2+1}}{\det M} 4G^2 \begin{vmatrix} v/1-2v & v/1-2v \\ v/1-2v & 1-v/1-2v \end{vmatrix} G^3 = -\frac{4G^5}{\det M} \left(\frac{v}{1-2v} \frac{1-v}{1-2v} - \frac{v}{1-2v} \frac{v}{1-2v} \right) = \\
&= -\frac{4G^5}{\det M} \frac{v}{(1-2v)^2} (1-v-v) = -\frac{4G^5}{\det M} \frac{v}{(1-2v)} = -\frac{v}{2G(v+1)} = -\frac{v}{E}
\end{aligned}$$

Stesso valore si trova per i restanti 5 elementi della matrice $N = M^{-1}$. Dunque si può concludere:

$$6.23) \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

e dunque le **6.22** sono dimostrate.

6.7. Limitazioni e significato fisico dei coefficienti. Abbiamo già detto che si dimostrano le seguenti limitazioni per i tre coefficienti

$$6.15) \quad G > \frac{E}{3} > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

e che nei materiali di uso comune si riscontra

$$6.16) \quad 0 < \nu < 1/2$$

Ora faccio vedere come queste disequaglianze, riscontrate nella pratica empirica, siano in realtà deducibili dal modello matematico di corpo elastico lineare qui proposto. La dimostrazione si basa sul fatto che il potenziale elastico è, per via del suo significato fisico, definito positivo, cioè > 0 in tutti gli stati deformati. Ma essendo

$$\Phi(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} & 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}$$

ne deriva, per la teoria sulle forme quadratiche (e il potenziale elastico è, come si vede qui, una forma quadratica di matrice $M/2$), che la matrice M deve avere positivi tutti i minori principali di testa (vedi quanto segue se non ti ricordi cosa sono). Si hanno così 6 condizioni:

$$\det M > 0 \Leftrightarrow 8G^6 \frac{v+1}{1-2v} > 0 \Leftrightarrow -1 < v < 1/2$$

$$\det M_5 > 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2G \frac{1-v}{1-2v} & 2G \frac{v}{1-2v} & 2G \frac{v}{1-2v} & 0 & 0 \\ 2G \frac{v}{1-2v} & 2G \frac{1-v}{1-2v} & 2G \frac{v}{1-2v} & 0 & 0 \\ 2G \frac{v}{1-2v} & 2G \frac{v}{1-2v} & 2G \frac{1-v}{1-2v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow \frac{\det M}{G} > 0 \Leftrightarrow -1 < v < 1/2$$

$$\det M_4 > 0 \Leftrightarrow \frac{\det M}{G^2} > 0 \Leftrightarrow -1 < v < 1/2$$

$$\det M_3 > 0 \Leftrightarrow \frac{\det M}{G^3} > 0 \Leftrightarrow -1 < v < 1/2$$

$$\det M_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2G \frac{1-v}{1-2v} & 2G \frac{v}{1-2v} \\ 2G \frac{v}{1-2v} & 2G \frac{1-v}{1-2v} \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow 4G^2(1-2v)^2 \begin{vmatrix} 1-v & v \\ v & 1-v \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-v)^2 - v^2 > 0 \Leftrightarrow 1+v^2 - 2v - v^2 = 1-2v > 0 \Leftrightarrow v < 1/2$$

$$\det M_1 > 0 \Leftrightarrow 2G \frac{1-v}{1-2v} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} G > 0 \\ v < 1/2 \end{cases}$$

Dunque abbiamo ottenuto le limitazioni

$$\begin{cases} G = \frac{E}{2(1+v)} > 0 \\ -1 < v < 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G > 0 \\ E > 0 \\ -1 < v < 1/2 \Leftrightarrow \frac{1}{2(1+v)} > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G > \frac{E}{3} > 0 \\ -1 < v < 1/2 \end{cases}$$

che sono appunto le **6.15**. L'ulteriore limitazione **6.16** dunque non emerge completamente dal modello matematico, quanto piuttosto dalle seguenti osservazioni.

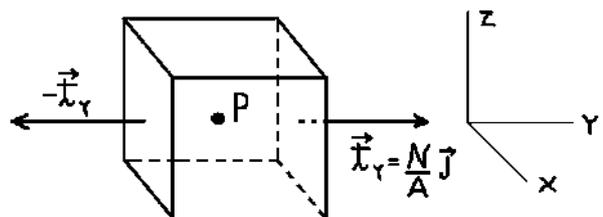
• **Significato del modulo di Young e del coefficiente di Poisson.** Si consideri nel punto P del solido un volume elementare soggetto allo stato di sforzo

$$\sigma_y = \frac{N}{A}, \sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

Per le leggi di Hooke le deformazioni valgono

$$\varepsilon_y = \frac{N}{A E} \quad \varepsilon_x = -\frac{N \nu}{A E} \quad \varepsilon_z = -\frac{N \nu}{A E}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$



Si ricava allora il significato del modulo di Young il quale vale

$$6.24) \quad E = \frac{N/A}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y}$$

Da notare che al crescere del modulo elastico diminuisce la deformabilità nei confronti dello sforzo normale. Si vede anche perché nella maggioranza dei casi risulti $\nu > 0$. Infatti a compressione lungo y ci si aspetterebbe¹ dilatazione lungo x, z (così come a trazione lungo y ci si aspetterebbe² contrazione lungo x, z), e questo si verifica solo se $\nu > 0$.

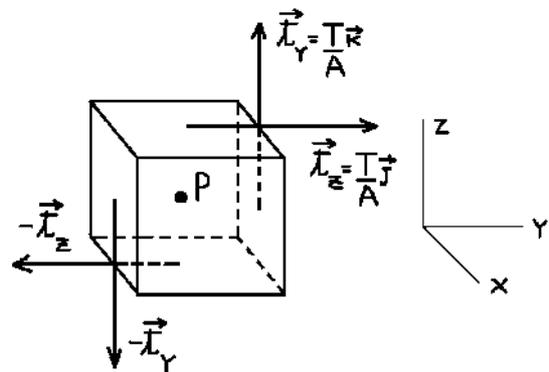
• **Significato fisico del modulo di elasticità tangenziale.** Si consideri nel punto P del solido un volume elementare soggetto allo stato di sforzo

$$\sigma_y = \sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \tau_{zy} = \frac{T}{A}$$

Per le leggi di Hooke le deformazioni valgono

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{T/A}{G}$$



Dunque per il modulo di elasticità tangenziale si ha

$$6.25) \quad G = \frac{T/A}{\gamma_{yz}} = \frac{\tau_{zy}}{\gamma_{yz}}$$

Anche qui si rileva che al crescere del modulo elastico diminuisce la deformabilità nei confronti dello sforzo tangenziale.

6.8. Coefficiente di dilatazione volumica. Dato in P il generico stato di sforzo, si ricorda che la dilatazione volumica è data da

$$\frac{V' - V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Per le leggi di Hooke dirette **6.21** si calcola allora che

$$\begin{aligned} \frac{V' - V}{V} &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned}$$

Resta così definito il coefficiente di dilatazione volumica dato da

¹ Pare che questo accada in molti materiali, ma non in tutti.

² Pare che questo accada in molti materiali, ma non in tutti.

$$6.26) \quad \frac{E}{1-2\nu} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$

Anche qui al crescere del coefficiente diminuisce la deformabilità. Se per componenti normali degli sforzi positive ci si aspetta un aumento di volume, allora si ritrova per ν la limitazione $\nu < 1/2$.

6.9. Corpo elastico lineare isotropo omogeneo. L'omogeneità si realizza quando le tre funzioni di punto

$$E = E(x, y, z), \quad G = G(x, y, z) \quad \nu = \nu(x, y, z)$$

sono costanti in tutto il corpo.

6.10. Il potenziale elastico complementare. Ricavo ora una espressione alternativa per il lavoro di deformazione per unità di volume, da aggiungere alle **6.10**, **6.11**. Partiamo dalla espressione **6.9**, valida per il corpo elastico lineare, e sostituiamo in essa la **6.23**, dimostrata in caso anche di isotropia:

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon_{ij}) &= \frac{1}{2} [\sigma_x(\varepsilon_{ij})\varepsilon_x + \sigma_y(\varepsilon_{ij})\varepsilon_y + \sigma_z(\varepsilon_{ij})\varepsilon_z + \tau_{xy}(\varepsilon_{ij})\gamma_{xy} + \tau_{xz}(\varepsilon_{ij})\gamma_{xz} + \tau_{yz}(\varepsilon_{ij})\gamma_{yz}] = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}) (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz})^T = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}) M^{-1} (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz})^T = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}) \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}) \begin{pmatrix} \sigma_x/E - \sigma_y\nu/E - \sigma_z\nu/E \\ \sigma_x\nu/E + \sigma_y/E - \sigma_z\nu/E \\ -\sigma_x\nu/E - \sigma_y\nu/E + \sigma_z/E \\ \tau_{xy}/G \\ \tau_{xz}/G \\ \tau_{yz}/G \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \end{aligned}$$

Introducendo allora un nuovo simbolo definiamo **potenziale elastico complementare la funzione**

$$6.26) \quad \Psi(\sigma_{ij}) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

la quale è appunto una funzione delle 6 componenti speciali di tensione e, avendo lo stesso valore del potenziale elastico Φ , rappresenta anch'esso il lavoro di deformazione per unità di volume (nel caso di corpo elastico lineare isotropo). Quello che voglio dimostrare ora che esso risulta la primitiva della forma differenziale

$$6.27) \quad \varepsilon_x(\sigma_{ij})d\sigma_x + \varepsilon_y(\sigma_{ij})d\sigma_y + \varepsilon_z(\sigma_{ij})d\sigma_z + \gamma_{xy}(\sigma_{ij})d\tau_{xy} + \gamma_{xz}(\sigma_{ij})d\tau_{xz} + \gamma_{yz}(\sigma_{ij})d\tau_{yz}$$

Basta a tale scopo calcolare le derivate parziali di Ψ e confrontarle con i relativi coefficienti della forma differenziale 6.27: se sono uguali allora Ψ è proprio la primitiva della 6.27. Ricordando le 6.22 abbiamo

$$\frac{\partial \Psi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y \nu}{E} - \frac{\sigma_z \nu}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = \varepsilon_x$$

$$\frac{\partial \Psi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_y} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x \nu}{E} - \frac{\sigma_z \nu}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = \varepsilon_y$$

...

Senza procedere oltre consideriamo dimostrata la tesi. Dunque si è provata anche l'uguaglianza, nel caso di corpo elastico lineare isotropo, fra le due forme differenziali 6.1 e 6.27

$$6.28) \quad \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})d\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{ij})d\sigma_{ij}$$

6.11. Il problema dell'equilibrio elastico. Dato un corpo elastico lineare isotropo occupante il dominio Ω , il problema dell'equilibrio elastico consiste nel ricavare

- lo stato tensionale $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(P), \forall P \in \Omega$
- il campo di spostamento $\vec{S} = \vec{S}(P), \forall P \in \Omega$

note che siano

- la sollecitazione di volume $\vec{F} = \vec{F}(P), \forall P \in \Omega$
- la sollecitazione di superficie $\vec{p} = \vec{p}(P), \forall P \in \partial\Omega$
- le condizioni vincolari

Per risolvere il problema dell'equilibrio elastico abbiamo a disposizione le seguenti equazioni:

$$1) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$2) \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \quad \Leftarrow \text{Equazioni indefinite dell'equilibrio}$$

$$3) \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

$$4) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\begin{aligned}
5) \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
6) \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] && \Leftarrow \text{Leggi di Hooke dirette} \\
7) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\
8) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \\
9) \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}
\end{aligned}$$

$$10) \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z + p_x = 0$$

$$11) \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z + p_y = 0 \quad \Leftarrow \text{Condizioni al contorno per le tensioni}$$

$$12) \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z + p_z = 0$$

13) Condizioni al contorno per gli spostamenti imposte dai vincoli

Si tratta dunque di **un sistema di 9 equazioni nelle 9 incognite** $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}; u, v, w$, con relative condizione al contorno tanto per le tensioni, quanto per gli spostamenti.

Se non interessa ricavare lo stato tensionale ma solo gli spostamenti allora si possono sostituire le 6 Leggi di Hooke inverse e sostituirle nelle 3 equazioni indefinite dell'equilibrio: in questo modo si ottiene un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite u, v, w .

6.12. Teorema di Unicit  di Kirchoff. Se il problema elastico ammette la soluzione

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(P), \forall P \in \Omega$$

$$\vec{S} = \vec{S}(P), \forall P \in \Omega$$

allora esso ammette le ∞^6 soluzioni

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(P), \forall P \in \Omega$$

$$\vec{S} = \vec{S}(P) + \vec{s} + \vec{r} \times \vec{OP}, \forall P \in \Omega$$

dove \vec{s}, \vec{r} sono due costanti vettoriali arbitrarie. In pratica **se esiste una soluzione in termini di sforzi e di deformazioni, allora essa   unica; in termini di spostamenti invece   unica a meno di uno spostamento rigido arbitrario.**

Inoltre per la soluzione del sistema vale il **principio di sovrapposizione degli effetti rispetto alla sollecitazione esterna**, analogamente a quanto visto nella teoria dei sistemi lineari (Automatica).

Per dimostrare questo teorema diciamo che il sistema delle 9 equazioni dell'equilibrio elastico ammette le 2 soluzioni

$$6.29) \quad \begin{aligned}
&\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)}(P) && \sigma_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)}(P) \\
u^{(1)} = u^{(1)}(P) \quad v^{(1)} = v^{(1)}(P) \quad w^{(1)} = w^{(1)}(P) && u^{(2)} = u^{(2)}(P) \quad v^{(2)} = v^{(2)}(P) \quad w^{(2)} = w^{(2)}(P)
\end{aligned}$$

a cui corrispondono rispettivamente i due sistemi di deformazione $\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(1)}(P)$, $\varepsilon_{ij}^{(2)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}(P)$. Allora, considerando le 1,2,3,10,11,12 si ha in particolare

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + F_i = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} + F_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial (\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)})}{\partial x_j} + (F_i - F_i) = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{(1)} n_j + p_i = 0 \\ \sigma_{ij}^{(2)} n_j + p_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}) n_j + (p_i - p_i) = 0$$

Dunque si può affermare che lo stato di tensione descritto da $\sigma_{ij}^{(3)}(P) = \sigma_{ij}^{(1)}(P) - \sigma_{ij}^{(2)}(P)$ soddisfa le equazioni 1,2,3,10,11,12 in corrispondenza di una sollecitazione (di volume e superficiale) identicamente nulla. Ma allora il principio dei lavori virtuali 5.7 si scrive

$$L_{vi} = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(3)} \varepsilon_{ij}^V dV = \int_{\Omega} (F_i - F_i) S_i^V dV + \int_{\partial\Omega} (p_i - p_i) S_i^V d\Psi = L_{ve} = 0$$

dove \vec{S}^V è il generico spostamento virtuale e ε_{ij}^V è il corrispondente sistema di deformazioni. In particolare dunque si ha anche

$$6.30) \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(3)} \varepsilon_{ij}^{(3)} dV = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{(3)}(P) = \varepsilon_{ij}^{(1)}(P) - \varepsilon_{ij}^{(2)}(P)$$

Ricordando ora l'espressione 6.9 del potenziale elastico e sostituendola nella 6.30 abbiamo

$$\int_{\Omega} 2 \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(3)} \varepsilon_{ij}^{(3)} \right) dV = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} 2\Phi(P) dV = 0$$

Ma il potenziale elastico è ovunque non negativo (per definizione), dunque deve risultare necessariamente $\Phi(P) = 0, \forall P \in \Omega$. Ma sappiamo anche, sempre per definizione, che il potenziale elastico si annulla solo in corrispondenza di deformazioni nulle e dunque deve essere $\varepsilon_{ij}^{(3)}(P) = 0, \forall P$, il che comporta anche, per le leggi di Hooke, che sia $\sigma_{ij}^{(3)}(P) = 0, \forall P$. Per cui abbiamo provato in conclusione che

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(3)}(P) &= \varepsilon_{ij}^{(1)}(P) - \varepsilon_{ij}^{(2)}(P) = 0 \quad \forall P \in \Omega \\ \sigma_{ij}^{(3)}(P) &= \sigma_{ij}^{(1)}(P) - \sigma_{ij}^{(2)}(P) = 0 \quad \forall P \in \Omega \end{aligned}$$

ovvero che le due soluzioni 6.29 coincidono, ovvero che se la soluzione del problema elastico esiste, allora è unica, in termini di sforzi e deformazioni. **Per far vedere poi che in termini di spostamenti la soluzione è definita a meno di uno spostamento rigido arbitrario** diciamo che il campo di spostamenti

$$\vec{S}(P) = (u(P) \quad v(P) \quad w(P))$$

soddisfi le equazioni 4→9 del sistema dell'equilibrio elastico. Aggiungiamo adesso a questo spostamento il generico spostamento rigido e otteniamo il campo di spostamenti

$$\vec{S}'(P) = \begin{pmatrix} S'_x(P) \\ S'_y(P) \\ S'_z(P) \end{pmatrix} = \vec{S}(P) + \vec{s} + \vec{r} \times \vec{OP} = \begin{pmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_y z - r_z y \\ r_z x - r_x z \\ r_x y - r_y x \end{pmatrix}$$

Ovviamente si ricorda che quello che si è aggiunto è l'approssimazione di uno spostamento rigido, valida tanto più quanto più la componente rotatoria dello spostamento rigido è piccola. Comunque se andiamo a calcolare le componenti di deformazione associate allo spostamento risultante abbiamo

$$\varepsilon'_x(P) = \frac{\partial u(P)}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial(r_y z)}{\partial x} - \frac{\partial(r_z y)}{\partial x} = \frac{\partial u(P)}{\partial x} + 0 + 0 - 0 = \varepsilon_x(P)$$

$$\varepsilon'_y(P) = \frac{\partial v(P)}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial(r_z x)}{\partial y} - \frac{\partial(r_x z)}{\partial y} = \frac{\partial v(P)}{\partial y} + 0 + 0 - 0 = \varepsilon_y(P)$$

$$\varepsilon'_z(P) = \frac{\partial w(P)}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{\partial(r_x y)}{\partial z} - \frac{\partial(r_y x)}{\partial z} = \frac{\partial w(P)}{\partial z} + 0 + 0 - 0 = \varepsilon_z(P)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_{xy}(P) &= \frac{\partial u(P)}{\partial y} + \frac{\partial v(P)}{\partial x} = \left(\frac{\partial u(P)}{\partial y} + \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial(r_y z)}{\partial y} - \frac{\partial(r_z y)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v(P)}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial(r_z x)}{\partial x} - \frac{\partial(r_x z)}{\partial x} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial u(P)}{\partial y} + 0 + 0 - r_z \right) + \left(\frac{\partial v(P)}{\partial x} + 0 + r_z - 0 \right) = \frac{\partial u(P)}{\partial y} + \frac{\partial v(P)}{\partial x} = \gamma_{xy}(P) \end{aligned}$$

...

Insomma, senza proseguire, si vede che aggiungendo uno spostamento rigido arbitrario il sistema di deformazioni rimane lo stesso e le leggi di Hooke resteranno soddisfatte.

6.13. Sistema di equazioni alternativo. Se non interessano gli spostamenti ma solo lo stato tensionale si possono sostituire nelle 6 equazioni di congruenza interna **3.24** le leggi di Hooke dirette e ottenere un sistema di 6 equazioni nelle 6 incognite $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$.

Capitolo 7. Teoremi energetici per corpi elastici lineari

I tre teoremi qui discussi valgono per il corpo elastico lineare a prescindere dalla ulteriore ipotesi di isotropia. Si ricorda inoltre che tra i teoremi energetici per il corpo elastico lineare si deve anche aggiungere il teorema dei lavori virtuali discusso nel capitolo 5: esso infatti vale per qualunque corpo deformabile e dunque, in particolare, anche per il corpo elastico lineare.

7.1. Teorema di Clapeyron. Si consideri un solido lineare elastico. Se

- D_0 è la configurazione indeformata
- D è la configurazione deformata
- σ_{ij} sono le componenti di tensione relative alla configurazione deformata
- ε_{ij} sono le componenti di deformazione relative alla configurazione deformata
- $\vec{F}(P), \vec{p}(P)$ è una sollecitazione che equilibra le tensioni interne corrispondenti a D
- $\vec{S}(P)$ è il campo degli spostamenti che portano da D_0 a D

allora il lavoro che una **qualsiasi** sollecitazione compie per deformare il solido facendolo passare dalla configurazione D_0 alla configurazione D attraverso un percorso **qualunque** di deformazione è dato da

$$7.1) \quad L_e = \frac{1}{2} \int_D (F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z) dV + \frac{1}{2} \int_{\partial D} (p_x S_x + p_y S_y + p_z S_z) dS$$

purché la deformazione si realizzi con una infinita successione di stati di equilibrio.

Cominciamo col dire che essendo il solido elastico lineare, per la **6.9** il lavoro di deformazione fatto dalle forze interne è

$$7.2) \quad L_i = \int_{\Omega} \Phi dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV$$

Applicando il principio dei lavori virtuali **5.7** alla configurazione deformata D abbiamo poi

$$\int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{S}^V dV + \int_{\partial \Omega} \vec{p} \cdot \vec{S}^V dS = \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon^V_x + \sigma_y \varepsilon^V_y + \sigma_z \varepsilon^V_z + \tau_{xy} \gamma^V_{xy} + \tau_{xz} \gamma^V_{xz} + \tau_{yz} \gamma^V_{yz}) dV$$

essendo \vec{S}^V un sistema di spostamenti virtuali e ε^V_{ij} il relativo sistema di deformazioni virtuali. Se poi, in particolare, assumo come sistema di spostamenti virtuali (come è lecito) quello che porta da D_0 a D , e il relativo sistema di deformazioni, ottengo

$$7.3) \quad \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{S} dV + \int_{\partial \Omega} \vec{p} \cdot \vec{S} dS = \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV$$

Sostituendo la **7.3** nella **7.2** si ottiene:

$$7.4) \quad L_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{S} dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \vec{p} \cdot \vec{S} dS$$

L'ipotesi che la deformazione avvenga attraverso una successione di stati di equilibrio porta poi ad affermare che il lavoro delle forze esterne deve essere uguale a quello delle forze interne, altrimenti si avrebbe una perdita di energia ingiustificabile (nella ipotesi della successione di stati di equilibrio infatti il solido non si riscalda, non assorbe energia). Dunque $L_e = L_i$, cioè la tesi.

7.2. Teorema di Betti. Si consideri un solido lineare elastico. Se

- la sollecitazione A ha valore finale $\vec{F}^A(P), \vec{p}^A(P)$ e raggiunge l'equilibrio con il sistema di spostamenti $\vec{S}^A(P)$
- la sollecitazione B ha valore finale $\vec{F}^B(P), \vec{p}^B(P)$ e raggiunge l'equilibrio con il sistema di spostamenti $\vec{S}^B(P)$

allora risulta che

$$7.5) \quad \int_{\Omega} \vec{F}^A \cdot \vec{S}^B dV + \int_{\partial\Omega} \vec{p}^A \cdot \vec{S}^B dS = \int_{\Omega} \vec{F}^B \cdot \vec{S}^A dV + \int_{\partial\Omega} \vec{p}^B \cdot \vec{S}^A dS$$

che, da un punto di vista mnemonico, è utile scrivere come

$$7.6) \quad L_{AB} = L_{BA}$$

avendo posto per definizione

$$7.7) \quad \begin{cases} L_{AB} = \int_{\Omega} \vec{F}^A \cdot \vec{S}^B dV + \int_{\partial\Omega} \vec{p}^A \cdot \vec{S}^B dS \\ L_{BA} = \int_{\Omega} \vec{F}^B \cdot \vec{S}^A dV + \int_{\partial\Omega} \vec{p}^B \cdot \vec{S}^A dS \end{cases}$$

Procedo con la **dimostrazione**. Per il Teorema dei Lavori Virtuali **5.7** possiamo intanto scrivere

$$7.8) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{F}^A \cdot \vec{S}^V dV + \int_{\partial\Omega} \vec{p}^A \cdot \vec{S}^V dS &= \int_{\Omega} (\sigma^A_x \epsilon^V_x + \sigma^A_y \epsilon^V_y + \sigma^A_z \epsilon^V_z + \tau^A_{xy} \gamma^V_{xy} + \tau^A_{xz} \gamma^V_{xz} + \tau^A_{yz} \gamma^V_{yz}) dV \\ \int_{\Omega} \vec{F}^B \cdot \vec{S}^V dV + \int_{\partial\Omega} \vec{p}^B \cdot \vec{S}^V dS &= \int_{\Omega} (\sigma^B_x \epsilon^V_x + \sigma^B_y \epsilon^V_y + \sigma^B_z \epsilon^V_z + \tau^B_{xy} \gamma^V_{xy} + \tau^B_{xz} \gamma^V_{xz} + \tau^B_{yz} \gamma^V_{yz}) dV \end{aligned}$$

dove si intende che gli sforzi σ^A_{ij} sono quelli che risolvono l'equilibrio elastico in corrispondenza della sollecitazione $\vec{F}^A(P), \vec{p}^A(P)$ e che gli sforzi σ^B_{ij} sono quelli che lo risolvono in corrispondenza della sollecitazione $\vec{F}^B(P), \vec{p}^B(P)$. Si intende inoltre che $\vec{S}^V, \epsilon^V_{ij}$ sono il generico sistema di spostamenti virtuali e le deformazioni ad esso relative. Ma allora, in particolare, possiamo scrivere le **7.8** come

$$7.9) \int_{\Omega} \vec{F}^A \cdot \vec{S}^B dV + \int_{\partial\Omega} \vec{p}^A \cdot \vec{S}^B dS = \int_{\Omega} (\sigma^A_x \varepsilon^B_x + \sigma^A_y \varepsilon^B_y + \sigma^A_z \varepsilon^B_z + \tau^A_{xy} \gamma^B_{xy} + \tau^A_{xz} \gamma^B_{xz} + \tau^A_{yz} \gamma^B_{yz}) dV$$

$$7.10) \int_{\Omega} \vec{F}^B \cdot \vec{S}^A dV + \int_{\partial\Omega} \vec{p}^B \cdot \vec{S}^A dS = \int_{\Omega} (\sigma^B_x \varepsilon^A_x + \sigma^B_y \varepsilon^A_y + \sigma^B_z \varepsilon^A_z + \tau^B_{xy} \gamma^A_{xy} + \tau^B_{xz} \gamma^A_{xz} + \tau^B_{yz} \gamma^A_{yz}) dV$$

Dobbiamo dunque dimostrare l'uguaglianza dei secondi membri. Prendiamo quello della **7.9** e ricordando le **6.3** abbiamo

$$\int_{\Omega} (\sigma^A_x \varepsilon^B_x + \sigma^A_y \varepsilon^B_y + \sigma^A_z \varepsilon^B_z + \tau^A_{xy} \gamma^B_{xy} + \tau^A_{xz} \gamma^B_{xz} + \tau^A_{yz} \gamma^B_{yz}) dV =$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon^A_{ij})}{\partial\varepsilon_x} \varepsilon^B_x + \frac{\partial\Phi(\varepsilon^A_{ij})}{\partial\varepsilon_y} \varepsilon^B_y + \frac{\partial\Phi(\varepsilon^A_{ij})}{\partial\varepsilon_z} \varepsilon^B_z + \frac{\partial\Phi(\varepsilon^A_{ij})}{\partial\gamma_{xy}} \gamma^B_{xy} + \frac{\partial\Phi(\varepsilon^A_{ij})}{\partial\gamma_{xz}} \gamma^B_{xz} + \frac{\partial\Phi(\varepsilon^A_{ij})}{\partial\gamma_{yz}} \gamma^B_{yz} \right) dV$$

D'altra parte, per la **6.5** si ha

$$\Phi(\varepsilon^A_{ij}) = \frac{1}{2} \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij} \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^A_{ij} \varepsilon^A_{hk}$$

e dunque

$$7.11) \int_{\Omega} (\sigma^A_x \varepsilon^B_x + \sigma^A_y \varepsilon^B_y + \sigma^A_z \varepsilon^B_z + \tau^A_{xy} \gamma^B_{xy} + \tau^A_{xz} \gamma^B_{xz} + \tau^A_{yz} \gamma^B_{yz}) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_x \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^A_{hk} \varepsilon^B_x + \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_y \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^A_{hk} \varepsilon^B_y + \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_z \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^A_{hk} \varepsilon^B_z + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\gamma_{xy} \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^A_{hk} \gamma^B_{xy} + \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\gamma_{xz} \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^A_{hk} \gamma^B_{xz} + \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\gamma_{yz} \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^A_{hk} \gamma^B_{yz} \right) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij} \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^A_{hk} \varepsilon^B_{ij} \right) dV$$

Se ragiono allo stesso modo per il secondo membro della **7.10** ho

$$\int_{\Omega} (\sigma^B_x \varepsilon^A_x + \sigma^B_y \varepsilon^A_y + \sigma^B_z \varepsilon^A_z + \tau^B_{xy} \gamma^A_{xy} + \tau^B_{xz} \gamma^A_{xz} + \tau^B_{yz} \gamma^A_{yz}) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_x \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^B_{hk} \varepsilon^A_x + \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_y \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^B_{hk} \varepsilon^A_y + \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_z \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^B_{hk} \varepsilon^A_z + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\gamma_{xy} \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^B_{hk} \gamma^A_{xy} + \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\gamma_{xz} \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^B_{hk} \gamma^A_{xz} + \frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\gamma_{yz} \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^B_{hk} \gamma^A_{yz} \right) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij} \partial\varepsilon_{hk}} \Big|_0 \varepsilon^B_{hk} \varepsilon^A_{ij} \right) dV$$

che è appunto la **7.11**. E la tesi è dimostrata.

7.3. Principio di non sovrapposizione degli effetti. Data la sollecitazione A e la sollecitazione B , il lavoro di deformazione relativo alla sollecitazione $A+B$ non è la somma dei lavori di deformazione relativi alle due sollecitazioni applicate singolarmente al corpo indeformato. Più precisamente, considerate le ipotesi del Teorema di Betti, si dimostra che

$$7.12) \quad L_{A+B} = \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^A \cdot \bar{S}^A dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^A \cdot \bar{S}^A dS \right) + \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^B \cdot \bar{S}^B dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^B \cdot \bar{S}^B dS \right) + \\ + \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^A \cdot \bar{S}^B dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^A \cdot \bar{S}^B dS \right) + \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^B \cdot \bar{S}^A dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^B \cdot \bar{S}^A dS \right)$$

che, da un punto di vista mnemonico, è utile scrivere come

$$7.13) \quad L_{A+B} = L_A + L_B + \frac{1}{2} L_{AB} + \frac{1}{2} L_{BA}$$

che poi, per il Teorema di Betti, si può scrivere nelle due forme alternative

$$7.14) \quad L_{A+B} = L_A + L_B + L_{AB} \Leftrightarrow L_{A+B} = L_A + L_B + L_{BA}$$

Procedo con la **dimostrazione**. Intanto calcolo, attraverso il teorema di Clapeyron, il lavoro di deformazione che fanno le due sollecitazioni applicate singolarmente:

$$L_A = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^A \cdot \bar{S}^A dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^A \cdot \bar{S}^A dS \quad L_B = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^B \cdot \bar{S}^B dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^B \cdot \bar{S}^B dS$$

Consideriamo adesso la sollecitazione $A+B$ i cui valori finali sono $\bar{F}^A(P) + \bar{F}^B(P)$, $\bar{p}^A(P) + \bar{p}^B(P)$. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, valido per il sistema di equazioni dell'equilibrio elastico, abbiamo che tale sollecitazione raggiunge l'equilibrio con il sistema di spostamenti $\bar{S}^A(P) + \bar{S}^B(P)$. Dunque applicando ora il teorema di Clapeyron abbiamo

$$L_{A+B} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{F}^A + \bar{F}^B) \cdot (\bar{S}^A + \bar{S}^B) dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\bar{p}^A + \bar{p}^B) \cdot (\bar{S}^A + \bar{S}^B) dS = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^A \cdot \bar{S}^A dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^A \cdot \bar{S}^B dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^B \cdot \bar{S}^A dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^B \cdot \bar{S}^B dV + \\ + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^A \cdot \bar{S}^A dS + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^A \cdot \bar{S}^B dS + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^B \cdot \bar{S}^A dS + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^B \cdot \bar{S}^B dS$$

Riordinando abbiamo la tesi:

$$L_{A+B} = \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^A \cdot \bar{S}^A dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^A \cdot \bar{S}^A dS \right) + \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^B \cdot \bar{S}^B dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^B \cdot \bar{S}^B dS \right) + \\ + \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^A \cdot \bar{S}^B dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^A \cdot \bar{S}^B dS \right) + \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{F}^B \cdot \bar{S}^A dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{p}^B \cdot \bar{S}^A dS \right)$$

Capitolo 8. Sollecitazioni semplici: carico normale centrato, flessione, carico normale eccentrico

8.1. Problema del Saint Venant. Il problema del Saint Venant è un caso semplificato del problema generale dell'equilibrio elastico il quale, lo si ricorda, consiste nel trovare lo stato di sforzo e quello di deformazione di un solido elastico soggetto a una sollecitazione nota. Le semplificazioni del problema di Saint Venant sono le seguenti:

- 8.1) il solido è elastico lineare isotropo omogeneo
- 8.2) il solido è una trave ad asse rettilineo
- 8.3) il diametro della generica sezione è piccolo rispetto alla lunghezza della trave
- 8.4) non si considerano presenti forze di volume
- 8.5) le forze di superficie sono nulle sulla superficie laterale
- 8.6) le forze di superficie sono, in generale, non nulle sulle due sezioni estreme

8.2. Principio del Saint Venant. Il problema del Saint Venant viene ulteriormente semplificato grazie al cosiddetto principio empirico del Saint Venant secondo il quale se

- 8.7) Δ è una porzione della superficie del solido
- 8.8) δ è il diametro di Δ

allora lo stato tensionale dei punti del corpo posti a una distanza maggiore di δ da Δ dipende solo dalla riduzione a una coppia e a una forza della sollecitazione che opera su Δ . Questo principio risulta verificato sperimentalmente e dimostrato per via matematica.

8.3. Soluzione del problema del Saint Venant. In base al principio del Saint Venant, nella risoluzione del problema del Saint Venant per prima cosa

- 8.10) si riduce la sollecitazione agente su una delle due sezioni estreme a una forza e a una coppia, scegliendo come punto di applicazione della forza risultante (e calcolando la coppia di conseguenza) il baricentro della sezione stessa (scelta convenzionale, ma non obbligatoria)
- 8.11) si ricava la sollecitazione ridotta agente sull'altra sezione estrema imponendo l'equilibrio meccanico alla trave, intesa come corpo rigido, ovvero considerando per l'altra sezione un vincolo di incastro

Il sistema di equazioni a disposizione per risolvere il problema dell'equilibrio elastico, discusso nel paragrafo **6.11**, si semplifica allora nel seguente:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\
8.12) \quad & \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \Leftrightarrow \text{Equazioni indefinite dell'equilibrio} \\
& \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
& \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
8.13) \quad & \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \Leftrightarrow \text{Leggi di Hooke dirette} \\
& \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\
& \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \\
& \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0 \quad \text{Condizioni al contorno} \\
8.14) \quad & \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = 0 \quad \Leftrightarrow \text{per le tensioni} \\
& \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = 0 \quad \text{sulla superficie laterale del solido}
\end{aligned}$$

*Condizioni al contorno per le tensioni per la sezione estrema su cui agisce
la sollecitazione ridotta alla forza \vec{F} , applicata al baricentro G della sezione stessa,
e alla coppia \vec{M}*

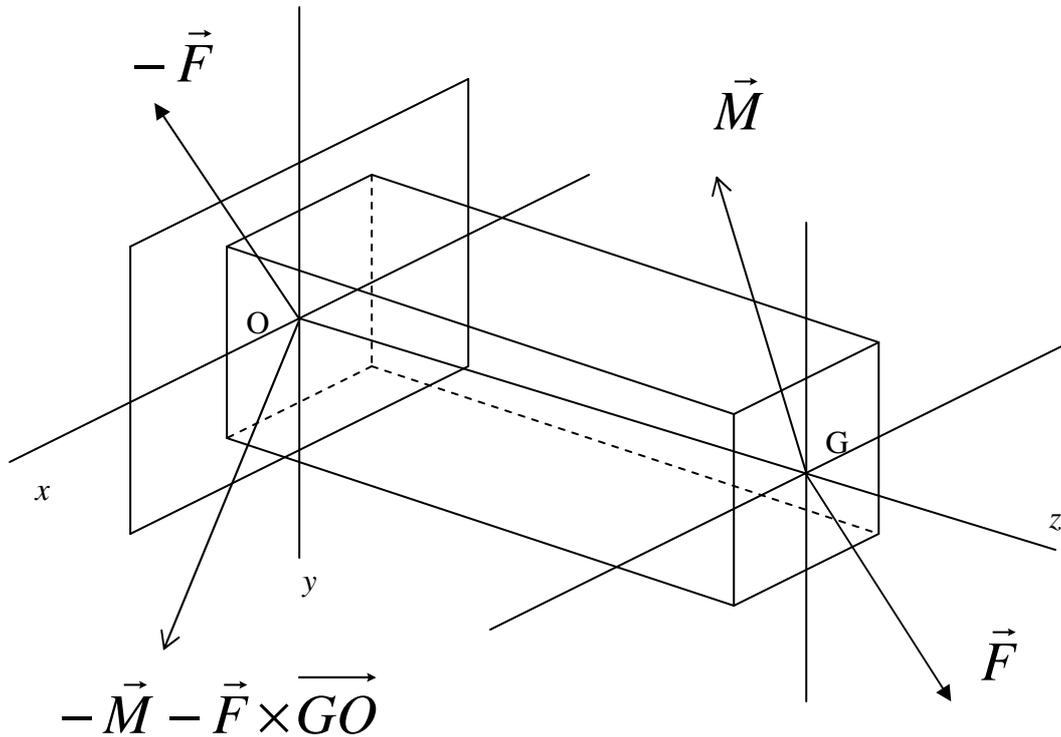
$$8.15) \quad \int_S \vec{t}(P, \vec{n}) dS = \int_S T(P) \vec{n} dS = \begin{cases} \int_S (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) dS = F_x \\ \int_S (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{xz} n_z) dS = F_y \\ \int_S (\tau_{xz} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z) dS = F_z \end{cases}$$

$$8.16) \quad \int_S (\vec{t}(P, \vec{n}) \times \overline{PG}) dS = \int_S (T(P) \vec{n} \times \overline{PG}) dS = \int_S \left(\begin{pmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{pmatrix} \times \overline{PG} \right) dS = \vec{M}$$

8.17) *Condizioni al contorno per gli spostamenti imposte dai vincoli*

Si osserva che nelle equazioni indefinite dell'equilibrio scompare la risultante delle forze di volume, in accordo con la **8.4**. Le leggi di Hooke restano invece invariate. Le **13,14** dovrebbero essere imposte anche per l'altra sezione estrema, tuttavia non è necessario imporle poiché, credo, sono

soddisfatte una volta che siano soddisfatte le equazioni indefinite dell'equilibrio, cioè sono condizioni implicite nella condizione di equilibrio meccanico.



Nel passaggio successivo

- 8.18) { si fissa il sistema di riferimento in modo che :
- a) l'asse z coincida con l'asse geometrico della trave (che si assume passante per i baricentri di ciascuna sezione)
 - b) l'asse x coincida con uno degli assi centrali di inerzia della sezione in $z = 0$
 - c) l'asse y coincida con l'altro asse centrale di inerzia della sezione in $z = 0$

Quindi si scompone la sollecitazione esterna nelle cosiddette **sollecitazioni semplici**, ovvero

- 8.19) { si scompone la forza \vec{F} nelle sue tre componenti ottenendo :
- a) per F_z una sollecitazione di trazione o compressione lungo l'asse z (Carico Normale Centrato)
 - b) per F_x una sollecitazione di taglio lungo l'asse x (Flessione e Taglio)
 - c) per F_y una sollecitazione di taglio lungo l'asse y (Flessione e Taglio)

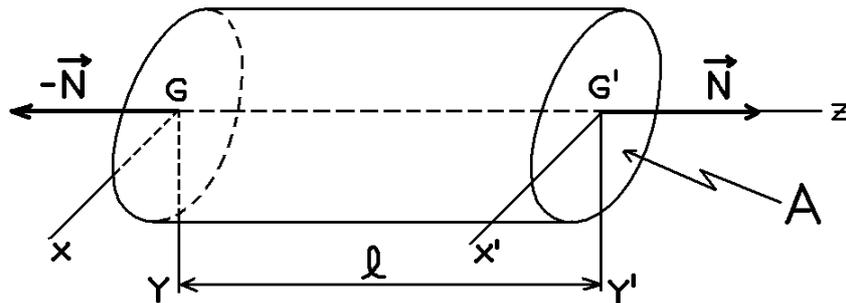
- 8.20) { si scompone la coppia \vec{M} nelle sue tre componenti ottenendo :
- a) per M_x una flessione intorno all'asse x (Flessione Retta)
 - b) per M_y una flessione intorno all'asse y (Flessione Retta)
 - c) per M_z una torsione intorno all'asse z (Torsione)

Comunque anche con queste semplificazioni il problema dell'equilibrio elastico risulta di ardua soluzione. Il trucco tuttavia per risolverlo in molti casi consiste nell'immaginare una parte della

soluzione, a intuito, e poi sostituirla nelle equazioni disponibili per verificarne l'esattezza e per ricavare le parti incognite della soluzione stessa. Questo procedimento prende il nome di **metodo seminverso di soluzione** (semi- perché una parte della soluzione è assunta come ipotesi e il resto è ricavato dalle equazioni dell'equilibrio elastico).

8.4. Carico normale centrato. Si ipotizza un campo delle tensioni uniforme dato da

$$8.20) \quad \begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= 0 & \sigma_y(x, y, z) &= 0 & \sigma_z(x, y, z) &= \frac{N}{A} \\ \tau_{xy}(x, y, z) &= 0 & \tau_{xz}(x, y, z) &= 0 & \tau_{yz}(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad \forall (x, y, z) \text{ appartenente al corpo}$$



Le equazioni indefinite dell'equilibrio **8.12** sono banalmente soddisfatte. Anche le condizioni al contorno sulla superficie laterale **8.14** sono soddisfatte. Per le **8.15**, **8.16** si ha rispettivamente

$$\int_S \sigma_z n_z dS = \int_S \frac{N}{A} n_z dS = \frac{N}{A} \int_S n_z dS = \frac{N}{A} \int_S 1 dS = N = F_z$$

$$\int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{N}{A} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} dS = \int_S \begin{pmatrix} -\frac{N}{A} y \\ -\frac{N}{A} x \\ 0 \end{pmatrix} dS = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \begin{pmatrix} -\frac{N}{A} y \\ -\frac{N}{A} x \\ 0 \end{pmatrix} dx dy = \begin{pmatrix} \int_{-b}^b \left(-\frac{N}{A} y \right) dy \int_{-a}^a dx \\ \int_{-a}^a \left(-\frac{N}{A} x \right) dx \int_{-b}^b dy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \left(-\frac{N}{2A} y^2 \right)_{-b}^b \\ 2b \left(-\frac{N}{2A} x^2 \right)_{-a}^a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{M}$$

e dunque sono anch'esse soddisfatte. Quindi fino a qui abbiamo verificato che la soluzione ipotizzata per il campo delle tensioni soddisfa le equazioni del problema elastico in cui compaiono le sole tensioni. E qui si conclude la parte **inversa** del metodo seminverso di soluzione. Adesso consideriamo la parte **diretta**.

• **Usiamo le equazioni di Hooke per ricavare il campo degli spostamenti.** Dalle prime tre delle **8.13**, integrando, abbiamo

$$8.21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = -\frac{\nu N}{E A} \Rightarrow u(x, y, z) = -\frac{\nu N}{E A} x + C_x(y, z) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\nu N}{E A} \Rightarrow v(x, y, z) = -\frac{\nu N}{E A} y + C_y(x, z) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} \frac{N}{A} \Rightarrow w(x, y, z) = \frac{1}{E} \frac{N}{A} z + C_z(x, y) \end{aligned}$$

Ora usiamo le restanti equazioni delle **8.13** per ricavare le tre funzioni incognite C_x, C_y, C_z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial C_y(x, z)}{\partial x} = 0 \\ 8.22) \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial C_z(x, z)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial C_y(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Ora sembra conveniente integrare la prima e la seconda delle **8.22** rispetto x . Ottengo

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial y} dx + \int \frac{\partial C_y(x, z)}{\partial x} dx = 0 &\Leftrightarrow x \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial y} + C_y(x, z) + C'_y(z) = 0 \Leftrightarrow x \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial y} + C_y(x, z) = -C'_y(z) \\ \int \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial z} dx + \int \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial x} dx = 0 &\Leftrightarrow x \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial z} + C_z(x, y) + C'_z(z) = 0 \Leftrightarrow x \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial z} + C_z(x, y) = -C'_z(z) \end{aligned}$$

Dunque deve necessariamente essere

$$\frac{\partial C_x(y, z)}{\partial y} = \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow C_x(y, z) = C_x = \text{costante}$$

Se invece integro la seconda e la terza delle **8.22** rispetto z ottengo

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial z} dz + \int \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial x} dz = 0 &\Leftrightarrow C_x(y, z) + z \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial x} + C'_x(z) = 0 \Leftrightarrow C_x(y, z) + z \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial x} = -C'_x(z) \\ \int \frac{\partial C_y(x, z)}{\partial z} dz + \int \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial y} dz = 0 &\Leftrightarrow C_y(x, z) + z \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial y} + C'_y(z) = 0 \Leftrightarrow C_y(x, z) + z \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial y} = -C'_y(z) \end{aligned}$$

Dunque deve necessariamente essere

$$\frac{\partial C_z(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C_z(x, y) = C_z = \text{costante}$$

In modo analogo si dimostra che

$$\frac{\partial C_y(x, z)}{\partial x} = \frac{\partial C_y(x, z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow C_y(x, z) = C_y = \text{costante}$$

Quindi per gli spostamenti si è trovato in conclusione

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} x + C_x \\ 8.23) \quad v(y) &= -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} y + C_y \\ w(z) &= \frac{1}{E} \frac{N}{A} z + C_z \end{aligned}$$

Ovvero gli spostamenti sono definiti a meno di uno spostamento rigido (di traslazione, in questo caso), in accordo con quanto dimostrato nel paragrafo 6.12, per il generico problema dell'equilibrio elastico.

• Per le deformazioni si ha poi dalle 8.23 che

$$8.24) \quad \varepsilon_x = -\frac{\nu N}{E A} \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu N}{E A} \quad \varepsilon_z = \frac{1 N}{E A} \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$$

• La variazione di lunghezza della trave (variazione lungo z) è data dallo spostamento lungo z della sezione estrema in $z=l$ (considerando l'altra fissa rispetto al sistema di riferimento), dunque vale

$$8.24) \quad \Delta l = w(z=l) = \frac{N}{EA} l$$

Allo stesso risultato si perviene sommando gli allungamenti puntuali, cioè calcolando

$$8.25) \quad \int_0^l \varepsilon_z(z) dz = \int_0^l \frac{1 N}{E A} dz = \frac{N}{EA} l$$

• Le variazioni nella generica sezione della trave non riguardano la forma della sezione, ma solo la sua superficie. Per dimostrare che non si ha cambiamento di forma si potrebbe dimostrare che

- il generico punto $P: (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ della generica sezione in \tilde{z} si sposta lungo la retta passante per P e per il baricentro;
- i punti della sezione che si trovano su una circonferenza avente centro nel baricentro restano, dopo la deformazione, punti di una stessa circonferenza (più grande o più piccola di prima a seconda che si abbia compressione o trazione).

Per verificare la prima proprietà basta provare che il rapporto tra le coordinate x, y resti invariato dopo la deformazione. Si ha in effetti

$$\frac{\tilde{y} + \nu(\tilde{y})}{\tilde{x} + u(\tilde{x})} = \frac{\tilde{y} - \frac{\nu N}{E A} \tilde{y}}{\tilde{x} - \frac{\nu N}{E A} \tilde{x}} = \frac{\tilde{y} \left(1 - \frac{\nu N}{E A}\right)}{\tilde{x} \left(1 - \frac{\nu N}{E A}\right)} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$$

Per verificare la seconda proprietà bisogna invece provare che presi due punti $P: (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ e $Q: (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ della sezione in \tilde{z} i quali abbiano, prima della deformazione, la stessa distanza dal baricentro, allora la loro distanza dal baricentro a deformazione avvenuta deve variare della stessa quantità. Prima della deformazione abbiamo

$$\overline{GP} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} = \overline{GQ}$$

Dopo la deformazione si ha

$$\begin{aligned}\overline{GP} &= \sqrt{(\tilde{x} + u(\tilde{x}))^2 + (\tilde{y} + v(\tilde{y}))^2} = \sqrt{\left(\tilde{x} - \frac{\nu N}{E A} \tilde{x}\right)^2 + \left(\tilde{y} - \frac{\nu N}{E A} \tilde{y}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\tilde{x}^2 \left(1 - \frac{\nu N}{E A}\right)^2 + \tilde{y}^2 \left(1 - \frac{\nu N}{E A}\right)^2} = \left(1 - \frac{\nu N}{E A}\right)^2 \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} = \left(1 - \frac{\nu N}{E A}\right)^2 \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} = \\ &= \sqrt{\left(\tilde{x} - \tilde{x} \frac{\nu N}{E A}\right)^2 + \left(\tilde{y} - \tilde{y} \frac{\nu N}{E A}\right)^2} = \sqrt{(\tilde{x} + u(\tilde{x}))^2 + (\tilde{y} + v(\tilde{y}))^2} = \overline{GQ}\end{aligned}$$

e dunque i due punti restano sulla medesima circonferenza. **In conclusione la sezione non cambia forma.**

• **La variazione della superficie della generica sezione della trave** si calcola integrando la 3.22.b sulla superficie della generica sezione:

$$8.26) \quad \Delta A = \int_A (\varepsilon_x + \varepsilon_y) dA = \int_A \left(-\frac{\nu N}{E A} - \frac{\nu N}{E A}\right) dA = -2 \frac{\nu N}{E A} \int_A dA = -2 \frac{\nu N}{E} N$$

• **La variazione del volume della trave** si calcola integrando la 3.22.a sul volume della trave:

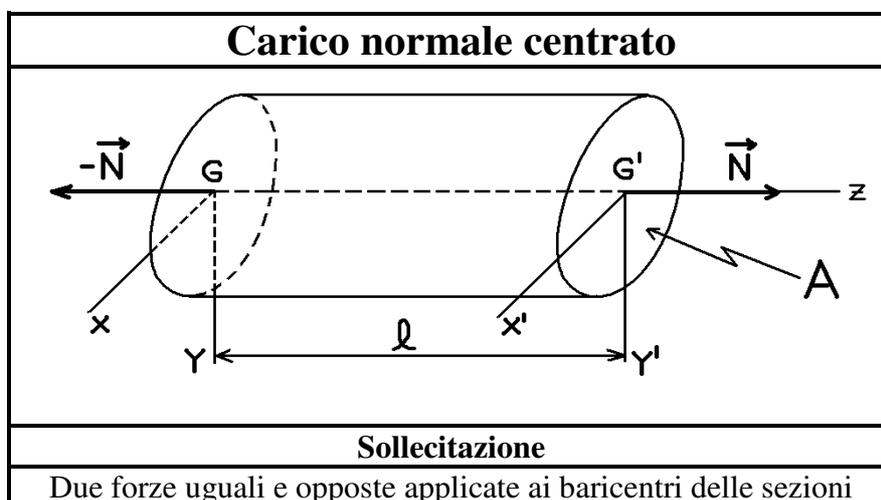
$$8.27) \quad \Delta V = \int_V (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dV = \int_V \left(-\frac{\nu N}{E A} - \frac{\nu N}{E A} + \frac{1 N}{E A}\right) dV = \frac{1 N}{E A} (-2\nu + 1) \int_A dV = \frac{N(1-2\nu)}{EA} V$$

• **Il lavoro di deformazione si può calcolare** o come valore del potenziale elastico del corpo deformato, e allora si ha

$$8.28) \quad L = \int_V \Phi(\varepsilon_{ij}) dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}\right) dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_z \varepsilon_z) dV = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{N}{A} \frac{N}{AE}\right) dV = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{A^2 E} = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{AE}$$

oppure attraverso il teorema di Clapeyron (equazione 7.1), e allora si ha

$$L = \frac{1}{2} \int_A \left(\frac{N}{A} w(z=l)\right) dA = \frac{1}{2} \frac{N}{A} \int_A \left(\frac{1}{E} \frac{N}{A} l\right) dA = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{AE}$$



estreme, con direzione parallela a quella dell'asse geometrico della trave, ovvero dell'asse z
Stato tensionale
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \sigma_z = N / A$
Spostamenti
$u = -\frac{\nu N}{EA} x \quad v = -\frac{\nu N}{EA} y \quad w = \frac{N}{EA} z$
Deformazioni
$\varepsilon_x = -\frac{\nu N}{EA} \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu N}{EA} \quad \varepsilon_z = \frac{N}{EA} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
Variazione di lunghezza della trave
$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dz = \frac{N}{EA} l$
Variazione di superficie della generica sezione
$\Delta A = -2 \frac{\nu N}{E}$
Variazione di volume della trave
$\Delta V = \frac{N(1-2\nu)}{EA} V$
Lavoro di deformazione della trave
$L = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{AE}$

8.5. Flessione retta. Partiamo dalle condizioni **8.15** e **8.16** relative alla sezione estrema in $z = l$. Essendo la sollecitazione di risultante nulla e con coppia $\vec{M} = (M_x \quad 0 \quad 0)$, si ha

$$8.29) \quad \int_A \vec{t}(P, \vec{n}) dA = \int_A T(P) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_A \tau_{xz}(x, y, l) dA = 0 \\ \int_A \tau_{yz}(x, y, l) dA = 0 \\ \int_A \sigma_z(x, y, l) dA = 0 \end{cases}$$

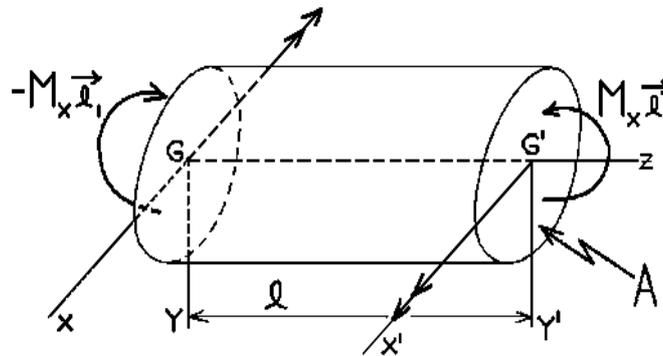
$$8.30) \quad \int_A \left(T(P) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \overrightarrow{PG'} \right) dA = \int_A \begin{pmatrix} \tau_{xz}(x, y, l) \\ \tau_{yz}(x, y, l) \\ \sigma_z(x, y, l) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} dA = \begin{pmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_A \sigma_z(x, y, l) y dA = M_x \\ - \int_A \sigma_z(x, y, l) x dA = 0 \\ \int_A (-\tau_{xz}(x, y, l) y + \tau_{yz}(x, y, l) x) dA = 0 \end{cases}$$

L'ipotesi che si fa adesso è che sia $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ in ogni punto della sezione estrema in $z = l$. Con ciò le 8.30 si riducono alle 2 equazioni

$$8.31) \quad \int_A \sigma_z(x, y, l) y dA = M_x \quad \int_A \sigma_z(x, y, l) x dA = 0$$

le quali ci dicono che σ_z non può essere identicamente nullo sulla sezione. Ma non può neanche essere costante, perché altrimenti la terza delle **8.29** non potrebbe essere soddisfatta. Allora l'idea più semplice, anche in considerazione della seconda delle **8.31**, è porre $\sigma_z = \sigma_z(y, z = l) = Cy$ con C costante da determinare. La determinazione la facciamo attraverso la prima delle **8.31**:

$$8.32) \quad \int_A Cy^2 dA = M_x \Leftrightarrow C \int_A y^2 dA = M_x \Leftrightarrow CI_x = M_x \Leftrightarrow C = \frac{M_x}{I_x} \Rightarrow \sigma_z(x, y, l) = \frac{M_x}{I_x} y$$



In definitiva si ipotizza che sulla sezione estrema in $z = l$ si abbia

$$8.33) \quad \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$$

con I_x momento di inerzia della sezione rispetto l'asse x . E come si vede subito (ad esempio pensando a una sezione quadrata, per fare i calcoli) queste tensioni verificano tanto le **8.29** che le **8.30**, semplificate nelle **8.31**. L'ulteriore ipotesi che si fa è che le **8.33** siano valide per qualunque sezione della trave e inoltre che siano ovunque nulle le altre 3 componenti speciali. Dunque in conclusione si ipotizza

$$8.34) \quad \sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad \tau_{xy} = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \forall \text{ punto della trave}$$

È immediato verificare che questa soluzione soddisfa anche le equazioni indefinite dell'equilibrio **8.12**. Adesso sostituisco questa soluzione nelle leggi di Hooke **8.13** per ricavare il campo degli spostamenti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{M_x}{I_x E} y \Rightarrow u = -\nu \frac{M_x}{I_x E} xy + C_x(y, z)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{I_x E} y \Rightarrow v = -\nu \frac{M_x}{I_x E} \frac{y^2}{2} + C_y(x, z)$$

$$\begin{aligned}
8.35) \quad \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{M_x}{I_x E} y \Rightarrow w = \frac{M_x}{I_x E} yz + C_z(x, y) \\
\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \Rightarrow -v \frac{M_x}{I_x E} x + \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial C_y(x, z)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \frac{M_x}{I_x E} z + \frac{\partial C_y(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial C_z(x, y)}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

dove ho integrato le prime 3 equazioni e ho sostituito quanto trovato nelle restanti. Dalla quarta equazione si ha

$$\frac{\partial C_y(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial y} = v \frac{M_x}{I_x E} x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial C_x(y, z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C_x = C_x(z) \\ \frac{\partial C_y(x, z)}{\partial x} = f(x) \Rightarrow C_y = C'_y(x) + C''_y(z) \end{cases}$$

Sostituendo nella quinta equazione ottengo

$$\frac{\partial C_x(z)}{\partial z} = -\frac{\partial C_z(x, y)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial C_x(z)}{\partial z} = -\frac{\partial C_z(x, y)}{\partial x} = C \Rightarrow \begin{cases} C_x(z) = Cz + K_x \\ C_z(x, y) = -Cx + C'_z(y) \end{cases}$$

Sostituendo poi quanto trovato nella sesta equazione abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C'_z(y)}{\partial y} &= -\frac{M_x}{I_x E} z - \frac{\partial C''_y(z)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial C'_z(y)}{\partial y} = -\frac{M_x}{I_x E} z - \frac{\partial C''_y(z)}{\partial z} = K \Rightarrow \\
\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial C'_z(y)}{\partial y} = K \Rightarrow C'_z(y) = Ky + K_z \\ \frac{\partial C''_y(z)}{\partial z} = -K - \frac{M_x}{I_x E} z \Rightarrow C''_y(z) = -Kz - \frac{M_x}{I_x E} \frac{z^2}{2} + K_y \end{cases}
\end{aligned}$$

Dunque abbiamo trovato siano a qui

$$8.36) \quad \begin{cases} u = -v \frac{M_x}{I_x E} xy + zC + K_x \\ v = -v \frac{M_x}{I_x E} \frac{y^2}{2} + C'_y(x) - Kz - \frac{M_x}{I_x E} \frac{z^2}{2} + K_y \\ w = \frac{M_x}{I_x E} yz - xC + Ky + K_z \end{cases}$$

Risostituendo quanto trovato nelle ultime tre equazioni delle **8.35** si rileva che la quinta e la sesta sono verificate; la quarta ci fornisce invece l'ulteriore indicazione

$$\frac{\partial C'_y(x)}{\partial x} = v \frac{M_x}{I_x E} x \Rightarrow C'_y(x) = v \frac{M_x}{I_x E} \frac{x^2}{2} + K'_y$$

Dunque le **8.36** si riscrivono, accorpendo due costanti, come

$$8.37) \begin{cases} u = -v \frac{M_x}{I_x E} xy + Cz + K_x \\ v = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} (z^2 + v(y^2 - x^2)) - Kz + K_y \\ w = \frac{M_x}{I_x E} yz - Cx + Ky + K_z \end{cases}$$

Adesso dimostro che il campo di spostamenti

$$\begin{cases} u' = Cz + K_x \\ v' = -Kz + K_y \\ w' = -Cx + Ky + K_z \end{cases}$$

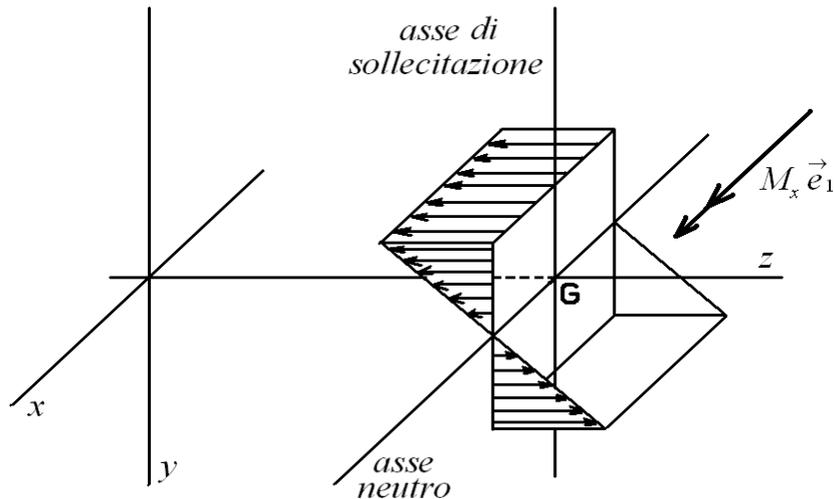
rappresenta uno spostamento rigido, provando che ad esso corrispondono componenti nulle di deformazione. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} &= C - C = 0 \\ \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} &= -K + K = 0 \end{aligned}$$

Dunque in conclusione la soluzione in termini di spostamenti, a meno di uno spostamento rigido arbitrario, è data da

$$8.38) \begin{cases} u = -v \frac{M_x}{I_x E} xy \\ v = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} (z^2 + v(y^2 - x^2)) \\ w = \frac{M_x}{I_x E} yz \end{cases}$$

• **Asse neutro e asse di sollecitazione.** I punti della sezione in cui si annulla la tensione costituiscono il cosiddetto **asse neutro**. Dunque, per le **8.34**, risulta che l'asse neutro coincide con l'asse x . La retta perpendicolare all'asse della coppia applicata prende il nome invece di **asse di sollecitazione**. Nel nostro caso l'asse di sollecitazione è l'asse y . In figura sono rappresentati i due assi e l'andamento qualitativo del campo di tensioni $\vec{t}(y) = \sigma_z(y) \hat{k}$.



• **Analisi della deformazione.** Intanto, per le **8.38** (o direttamente dalle **8.13**, sostituendovi le **8.34**), le componenti di deformazione si scrivono

$$8.39) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= -v \frac{M_x}{I_x E} y & \varepsilon_y &= -v \frac{M_x}{I_x E} y & \varepsilon_z &= \frac{M_x}{I_x E} y \\ \gamma_{xy} &= 0 & \gamma_{xz} &= 0 & \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Ora consideriamo la configurazione assunta dalla trave dopo la deformazione. Se assumiamo che le coordinate del punto P prima della deformazione siano ξ, η, ζ , allora la sua posizione nella configurazione deformata è definita dalla **mappa** (funzione che associa a ogni punto materiale la sua posizione) seguente

$$8.40) \quad \Omega : \begin{cases} x = \xi + u(\xi, \eta, \zeta) = \xi - v \frac{M_x}{I_x E} \xi \eta \\ y = \eta + v(\xi, \eta, \zeta) = \eta - \frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} (\zeta^2 + v(\eta^2 - \xi^2)) \\ z = \zeta + w(\xi, \eta, \zeta) = \zeta + \frac{M_x}{I_x E} \eta \zeta \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} (\xi, \eta) \in A \\ \zeta \in [0, l] \end{cases}$$

Si intende che A rappresenta il dominio definito dalla sezione in $z=0$. Si osservi che questa descrizione è quella che si chiama, in Fluidodinamica, una **descrizione referenziale**, ovvero una descrizione che fornisce la posizione del punto materiale nella configurazione deformata a partire da quella che il punto materiale stesso aveva nella configurazione indeformata. Questa descrizione si differenzia dalla **descrizione materiale** (che poi, in pratica, non so come possa essere usata) la quale invece associa direttamente il punto materiale alla sua posizione nella configurazione deformata, senza passare per la posizione che esso aveva nella configurazione indeformata.

La **8.40** verrà ora usata per descrivere la **deformazione dell'asse geometrico** e la **deformazione della generica sezione**. Affrontiamo i due problemi separatamente.

• **Deformazione dell'asse geometrico.** Se nella **8.40** poniamo $\xi = \eta = 0$ otteniamo l'equazione di una curva che rappresenta la configurazione assunta dall'asse geometrico dopo la deformazione. Tale curva ha equazioni parametriche

$$8.41) \quad \gamma: \begin{cases} x=0 \\ y = \eta + v(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} \zeta^2 \\ z = \zeta \end{cases}$$

dove $\zeta \in [0, l]$

Si vede che l'asse geometrico rimane nel piano $x=0$, ovvero nel piano perpendicolare a quello della coppia. Questo piano è detto **piano di flessione**. La curva γ è detta anche **deformata dell'asse geometrico**.

Consideriamo ora la curvatura¹ della deformata dell'asse geometrico. Si ha

$$K(\zeta) = \frac{\frac{dz(\zeta)}{d\zeta} \frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2} - \frac{d^2z(\zeta)}{d\zeta^2} \frac{dy(\zeta)}{d\zeta}}{\left(\left(\frac{dz(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 + \left(\frac{dy(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{M_x}{I_x E}}{\left(1 + \left(-\frac{M_x}{I_x E} \zeta \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_x}{I_x E} \frac{1}{\left(1 + \frac{M_x^2}{I_x^2 E^2} \zeta^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Considerando l'ipotesi delle piccole deformazioni si può considerare per la curvatura il valore

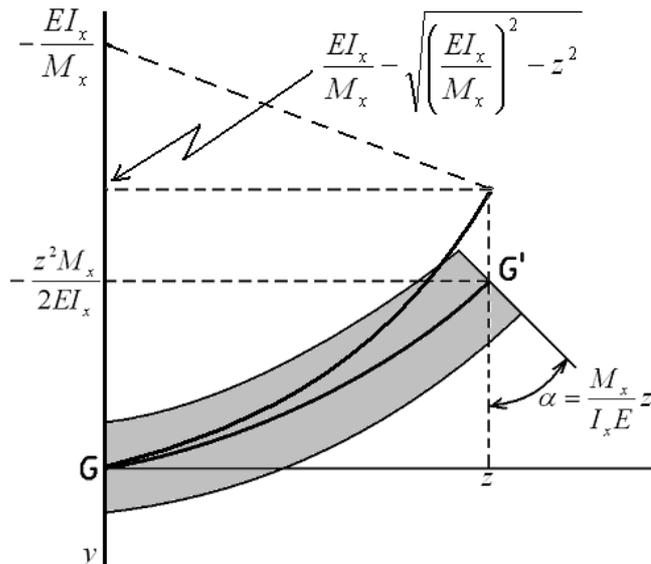
$$8.42) \quad K(\zeta) = K = -\frac{M_x}{I_x E}$$

per cui si nota subito che

- la curvatura della deformata dell'asse geometrico è con buona approssimazione costante, nel caso di piccole deformazioni, e questa proprietà prende il nome di **Legge di Bernoulli-Eulero**;
- la deformata dell'asse geometrico può con buona approssimazione, nel caso di piccole deformazioni, essere considerata sovrapposta alla circonferenza di raggio $I_x E / M_x$ passante per il punto G .

Si può anche facilmente provare che la lunghezza complessiva dell'asse geometrico rimane invariata nella ipotesi delle piccole deformazioni. Ricordando infatti la formula per il calcolo degli archi di curva abbiamo

$$\ell(\gamma) = \int_0^l \sqrt{\left(\frac{M_x}{I_x E} \right)^2 \zeta^2 + 1} d\zeta \approx \int_0^l (\sqrt{1}) d\zeta = l$$



¹ La curvatura di una curva in un punto è l'inverso del raggio (raggio alla meno uno) della circonferenza osculatrice della curva stessa nel punto considerato.

• **Deformazione della generica sezione. Principio di conservazione delle sezioni piane.**

Ricorriamo ancora alla mappa **8.40** della configurazione deformata: fissando $\zeta = \tilde{\zeta}$ otteniamo la rappresentazione parametrica della superficie nella quale si trasforma, dopo la deformazione, la sezione originariamente giacente nel piano $z = \tilde{\zeta}$. Detta $\Psi(\tilde{\zeta})$ tale superficie si ha

$$8.43) \quad \Psi(\tilde{\zeta}): \begin{cases} x = \xi - \nu \frac{M_x}{I_x E} \xi \eta \\ y = \eta - \frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} (\tilde{\zeta}^2 + \nu(\eta^2 - \xi^2)) \quad \text{dove } (\xi, \eta) \in A \\ z = \tilde{\zeta} + \frac{M_x}{I_x E} \eta \tilde{\zeta} \end{cases}$$

L'equazione implicita della superficie si trova essere

$$\Psi(\tilde{\zeta}): y = \frac{z - \tilde{\zeta}}{\frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta}} - \frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} \left(\tilde{\zeta}^2 + \nu \left(\frac{(z - \tilde{\zeta})^2}{\left(\frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} \right)^2} - \frac{x^2}{\left(1 - \nu \frac{z - \tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}} \right)^2} \right) \right)$$

Considerando che $z - c = w(c) = M_x y c / I_x E$ abbiamo poi

$$\Psi(\tilde{\zeta}): y = \frac{z - \tilde{\zeta}}{\frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta}} - \frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} \left(\tilde{\zeta}^2 + \nu y^2 - \frac{x^2}{\left(1 - \nu \frac{M_x}{I_x E} y \right)^2} \right)$$

Mettendo a denominatore comune:

$$8.44) \quad \Psi(\tilde{\zeta}): -y \frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} + z - \tilde{\zeta} - \frac{1}{2} \left(\frac{M_x}{I_x E} \right)^2 \tilde{\zeta} \left(\tilde{\zeta}^2 + \nu y^2 - \frac{x^2}{\left(1 - \nu \frac{M_x}{I_x E} y \right)^2} \right) = 0$$

Considerando l'ipotesi delle piccole deformazioni abbiamo

$$8.45) \quad \Psi(\tilde{\zeta}): -y \frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} + z - \tilde{\zeta} - \frac{1}{2} \left(\frac{M_x}{I_x E} \right)^2 \tilde{\zeta} (\tilde{\zeta}^2 + \nu y^2 - x^2) = 0$$

Adesso si può notare che mettendoci abbastanza lontani dalla sezione in $z = 0$ abbiamo che

$$\tilde{\zeta}^2 + \nu y^2 - x^2 \approx \tilde{\zeta}^2$$

per l'ipotesi **8.3** del Problema di Saint Venant. Mentre per valori piccoli di z la superficie tende evidentemente a diventare il piano $z = 0$. Allora si può scrivere in conclusione

$$8.46) \quad \Psi(\tilde{\zeta}): -y \frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} + z - \tilde{\zeta} - \frac{1}{2} \left(\frac{M_x}{I_x E} \right)^2 \tilde{\zeta}^3 = 0$$

Ma si scopre che questo non è altro che il piano tangente alla **8.43** (la sezione deformata, prima delle approssimazioni) in corrispondenza del suo baricentro (per avere la posizione del quale si deve imporre nella **8.43** $\xi = \eta = 0$). Infatti l'equazione di tale piano è

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} x & y & z - \tilde{\zeta} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} & \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} & \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} x & y & z - \tilde{\zeta} \\ \left(1 - \nu \frac{M_x}{I_x E} \eta\right) \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} & -\nu \frac{M_x}{I_x E} \xi \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} & 0 \\ -\nu \frac{M_x}{I_x E} \xi \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} & \left(1 - \nu \frac{M_x}{I_x E} \eta\right) \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} & \frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \end{array} \right| = \\ & = \left| \begin{array}{ccc} x & y + \frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} & z - \tilde{\zeta} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} \end{array} \right| = -\frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} y - \frac{1}{2} \left(\frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} \right)^2 \tilde{\zeta} + z - \tilde{\zeta} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -y \frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} + z - \tilde{\zeta} - \frac{1}{2} \left(\frac{M_x}{I_x E} \right)^2 \tilde{\zeta}^3 = 0 \end{aligned}$$

Si voglia ora considerare la giacitura di tale piano. Dalla Geometria Analitica sappiamo che un vettore ortogonale al piano è senz'altro il seguente

$$\vec{v}(\tilde{\zeta}) = \left(0 \quad -\frac{M_x \tilde{\zeta}}{I_x E} \quad 1 \right)$$

Se andiamo a prendere invece il versore tangente alla deformata dell'asse geometrico nel punto corrispondente al punto $(0, 0, \tilde{\zeta})$ della configurazione indeformata troviamo che esso vale

$$8.47) \quad \vec{T}(\tilde{\zeta}) = \frac{\left(0 \quad -\frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} \quad 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{M_x}{I_x E} \tilde{\zeta} \right)^2 + 1}}$$

E come si vede i due vettori sono paralleli (e qui non ci sono approssimazioni). Si è giunti allora a due importanti conclusioni sulla deformazione della generica sezione: se si ammette l'ipotesi delle piccole deformazioni (passaggio **8.44** \rightarrow **8.45**) e la forma oblunga della trave (passaggio **8.45** \rightarrow **8.46**) si può affermare che

- le sezioni rimangano piane
- le sezioni sono ortogonali alla tangente portata alla deformata dell'asse geometrico in corrispondenza del loro baricentro

Questi due punti costituiscono il cosiddetto **Principio di Conservazione delle Sezioni Piane**.

• **Rotazione della generica sezione.** Voglio ora calcolare l'angolo $\alpha = \alpha(\zeta)$ (indicato in figura) del quale ruota la sezione originariamente in $z = \zeta$. Si può usare a tale scopo il vettore $\vec{T}(\zeta)$ trovato in 8.47. Da considerazioni geometriche elementari si evince che

$$\tan \alpha = \frac{-T_y}{T_z} = \frac{\frac{M_x}{I_x E} \zeta}{1} = \frac{M_x}{I_x E} \zeta$$

Considerando poi che lo sviluppo di McLaurin della funzione tangente è dato da

$$\tan \alpha = \tan \alpha \Big|_{\alpha=0} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Big|_{\alpha=0} \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} \Big|_{\alpha=0} \alpha^2 + o(\alpha^3) = \alpha + o(\alpha^3)$$

e che per l'ipotesi delle piccole deformazioni $\tan \alpha$, e dunque α , è piccolo, possiamo scrivere in conclusione

$$8.48) \quad \alpha = \frac{M_x}{I_x E} \zeta$$

• **Il lavoro di deformazione** può essere calcolato come il potenziale elastico accumulato dalla trave dopo la deformazione:

$$\begin{aligned} L &= \int_V \Phi(\varepsilon_{ij}) dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_z \varepsilon_z dV = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{I_x^2 E} \int_V y^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{I_x^2 E} \int_A y dA \int_0^l z dz = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{I_x^2 E} I_x l \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$8.49) \quad L = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{I_x E}$$

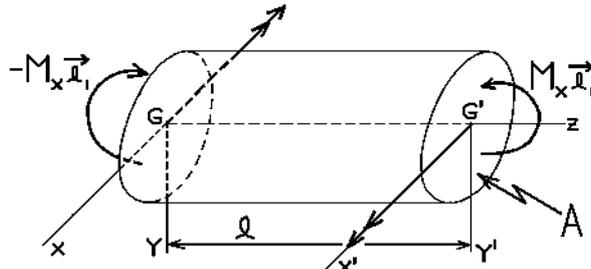
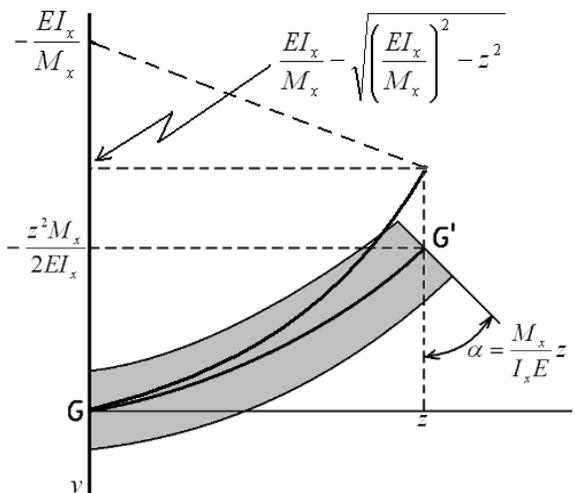
Oppure può calcolarsi attraverso il teorema di Clapeyron. Tuttavia, in base alla espressione 7.1 di tale teorema, dovremmo conoscere la sollecitazione esterna superficiale in termini di forze, mentre qui sappiamo solo che è riducibile a una coppia e a una risultante nulla. Allora, visto che per il principio di Saint Venant, la reale sollecitazione esterna non conta, ma conta solo la sua riduzione, considero la più semplice sollecitazione equivalente alla coppia $\vec{M} = M_x \hat{i}$, ovvero le due forze

$$\vec{p}(x=0, y=-a) = -\frac{M_x}{2aA} \quad \vec{p}(x=0, y=a) = \frac{M_x}{2aA}$$

applicate nei punti indicati, dove si intende che la sezione della trave si estenda da $y = -a$ a $y = a$. Allora posso applicare il teorema di Clapeyron considerando questa sollecitazione esterna e ottengo:

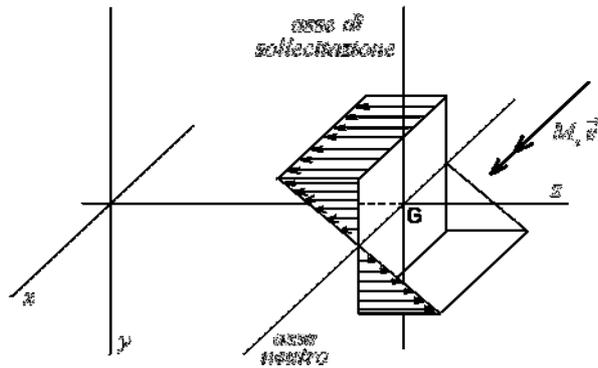
$$L = \frac{1}{2} \int_A \vec{p} \cdot \vec{S} dA = \frac{1}{2} \int_A \left(\left(-\frac{M_x}{2aA} w(y = -a) \right) + \left(\frac{M_x}{2aA} w(y = a) \right) \right) dA =$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \left(\left(-\frac{M_x}{2aA} \left(-\frac{M_x}{I_x E} al \right) \right) + \left(\frac{M_x}{2aA} \left(\frac{M_x}{I_x E} al \right) \right) \right) dA = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{I_x EA} \int_A dA = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{I_x EA} A = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{I_x E}$$

Flessione retta lungo x

Sollecitazione
L'asse del momento della coppia coincide con un asse centrale di inerzia della faccia estrema
Stato tensionale
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$
Spostamenti
$u = -\frac{\nu M_x}{EI_x} xy \quad v = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{EI_x} (z^2 + \nu(y^2 - x^2)) \quad w = \frac{M_x}{EI_x} yz$
Deformazioni
$\epsilon_x = -\frac{\nu M_x}{EI_x} y \quad \epsilon_y = -\frac{\nu M_x}{EI_x} y \quad \epsilon_z = \frac{M_x}{EI_x} y \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
Deformata dell'asse geometrico

La deformata può essere approssimata (come indicato in figura) anche dall'arco di una

circonferenza di raggio EI_x / M_x

Asse neutro e asse di sollecitazione



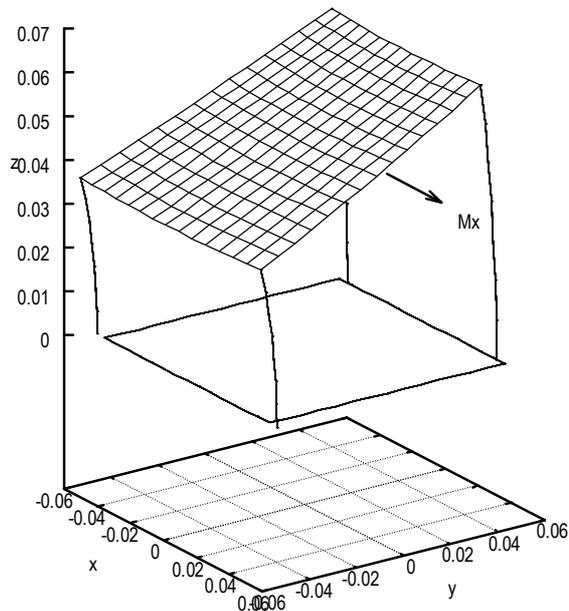
L'asse neutro di una sezione è, in generale, la retta lungo la quale lo sforzo relativo alla sezione stessa si annulla. Nel caso della flessione retta lo sforzo è nullo lungo l'asse centrale di inerzia della sezione che risulta parallelo al momento applicato.

L'asse di sollecitazione di una sezione è, in generale, l'asse passante per il baricentro della sezione, che sia ortogonale all'asse del momento applicato.

Lavoro di deformazione della trave

$$L = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{EI_x}$$

Rappresentazione grafica qualitativa



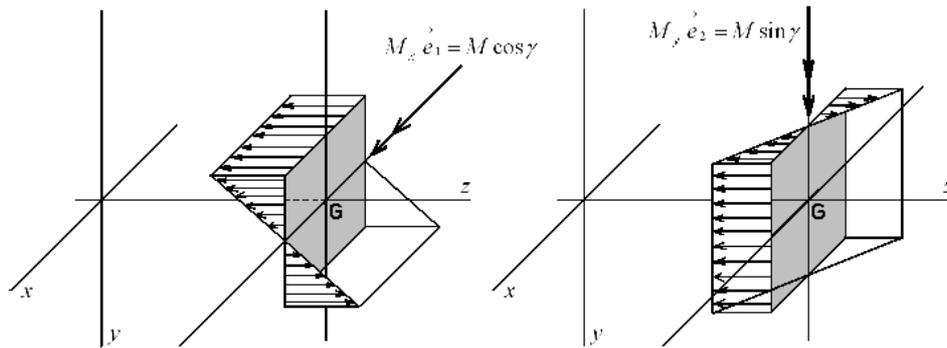
Significato dei simboli

I_x : momento centrale di inerzia della generica sezione della trave rispetto all'asse centrale di inerzia x

• **Flessione retta lungo l'asse y.** Può essere utile considerare anche il caso in cui l'asse della coppia sia concorde con l'asse y . Lo stato tensionale è evidentemente

$$8.50) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= 0 & \sigma_y &= 0 & \sigma_z &= -\frac{M_y}{I_y} x \\ \tau_{xy} &= 0 & \tau_{xz} &= 0 & \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Gli spostamenti, con alcune considerazioni² basate sulla figura qui riportata e in base alle 8.38 si scrivono



$$8.51) \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} (z^2 + v(x^2 - y^2)) \\ v = v \frac{M_y}{I_y E} xy \\ w = -\frac{M_y}{I_y E} xz \end{cases}$$

Possiamo verificare queste formule ricavando le deformazioni e quindi le tensioni che possiamo confrontare poi con le 8.50. Si calcola

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} v 2x = v \frac{M_y}{I_y E} x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{M_y}{I_y E} x$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{M_y}{I_y E} x$$

$$8.52) \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} (-2yv) + v \frac{M_y}{I_y E} y = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} (2z) - \frac{M_y}{I_y E} z = \frac{M_y}{I_y E} z - \frac{M_y}{I_y E} z = 0$$

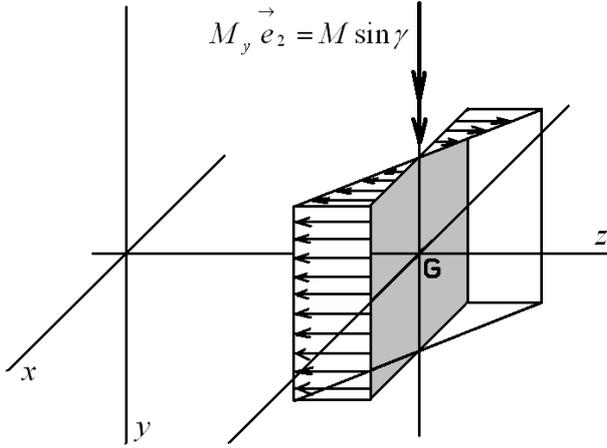
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

² Non è sufficiente ruotare gli assi, bisogna anche ribaltarne uno. Poiché la cosa non è immediata (bisogna aiutarsi con la figura) ho messo per esteso anche questo caso.

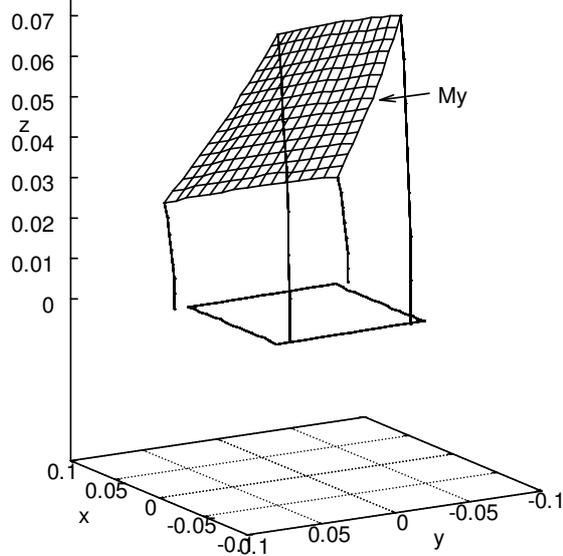
Da cui, per le 6.21, si ha

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \left(\nu \frac{M_y}{I_y E} x \right) + \nu \left(\nu \frac{M_y}{I_y E} x - \frac{M_y}{I_y E} x \right) \right] = \frac{2G\nu x}{1-2\nu} \frac{M_y}{I_y E} [(1-\nu) + (\nu-1)] = 0 \\
 \sigma_y &= \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \left(\nu \frac{M_y}{I_y E} x \right) + \nu \left(\nu \frac{M_y}{I_y E} x - \frac{M_y}{I_y E} x \right) \right] = \frac{2G\nu x}{1-2\nu} \frac{M_y}{I_y E} [(1-\nu) + (\nu-1)] = 0 \\
 \sigma_z &= \frac{2G}{1-2\nu} \left[-(1-\nu) \frac{M_y}{I_y E} x + \nu \left(\nu \frac{M_y}{I_y E} x + \nu \frac{M_y}{I_y E} x \right) \right] = \frac{2G}{1-2\nu} x \frac{M_y}{I_y E} (-1 + \nu + 2\nu^2) = \\
 8.53) &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} x \frac{M_y}{I_y E} (-1 + \nu + 2\nu^2) = \frac{1}{1-\nu-2\nu^2} x \frac{M_y}{I_y} (-1 + \nu + 2\nu^2) = -x \frac{M_y}{I_y} \\
 \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = 0 \\
 \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = 0 \\
 \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = 0
 \end{aligned}$$

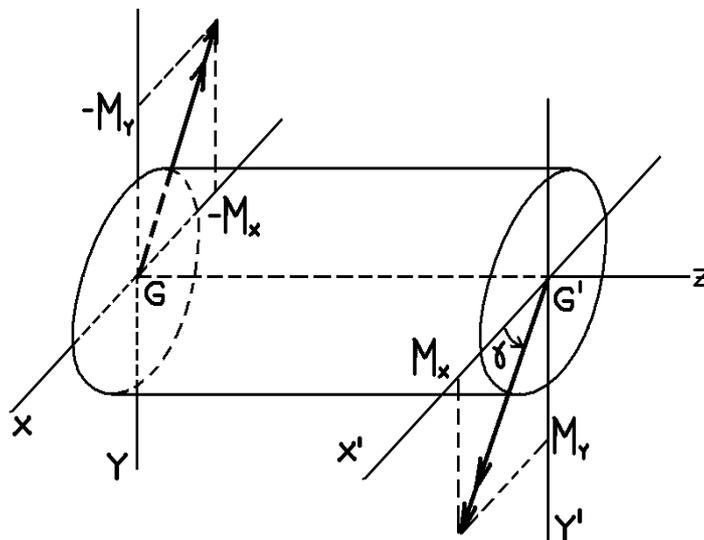
La verifica dunque risulta positiva. Riporto in una tabella quanto trovato.

Flessione retta lungo y	
	
Sollecitazione	
L'asse del momento della coppia coincide con un asse centrale di inerzia della faccia estrema	
Stato tensionale	
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x$	
Spostamenti	
$u = \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} (z^2 + \nu(x^2 - y^2)) \quad v = \nu \frac{M_y}{I_y E} xy \quad w = -\frac{M_x}{EI_x} xz$	
Deformazioni	
$\varepsilon_x = \nu \frac{M_y}{I_y E} x \quad \varepsilon_y = \nu \frac{M_y}{I_y E} x \quad \varepsilon_z = -\frac{M_y}{I_y E} x \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$	

Rappresentazione grafica qualitativa



8.6. Flessione deviata. Si parla di flessione deviata quando l'asse della coppia non coincide con un asse centrale di inerzia della sezione della trave.



Se si considera l'angolo γ indicato in figura e detta \vec{M} la coppia applicata, si ha evidentemente che

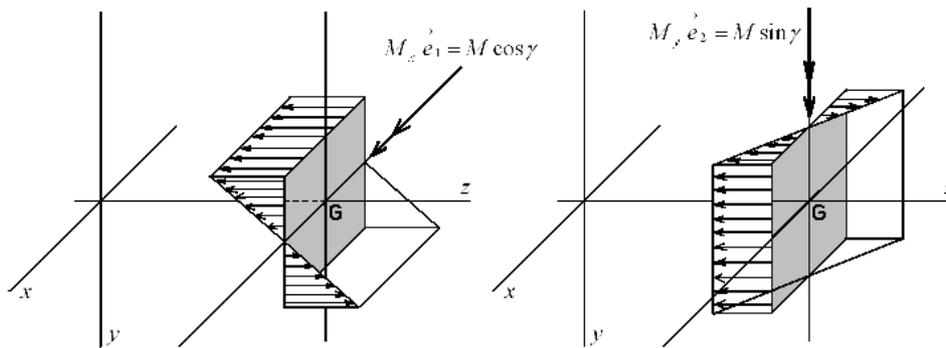
$$8.54) \quad \vec{M} = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} = (M \cos \gamma) \hat{i} + (M \sin \gamma) \hat{j} \Leftrightarrow \begin{cases} M_x = M \cos \gamma \\ M_y = M \sin \gamma \end{cases}$$

Il principio di sovrapposizione degli effetti, valido per il sistema di equazioni del problema elastico, ci garantisce che se troviamo la soluzione del problema elastico per le due flessioni rette (una

relativa a M_x , l'altra relativa a M_y) allora la somma delle soluzioni sarà soluzione della flessione deviata.

• **Stato tensionale.** Si ottiene sommando lo stato tensionale prodotto dalle due flessioni rette in cui può scomporsi la flessione deviata. Per la 8.34, *mutatis mutandis*, si ha allora

$$\begin{cases} M_x \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x = 0 & \sigma_y = 0 & \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \\ \tau_{xy} = 0 & \tau_{xz} = 0 & \tau_{yz} = 0 \end{bmatrix} \\ M_y \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x = 0 & \sigma_y = 0 & \sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x \\ \tau_{xy} = 0 & \tau_{xz} = 0 & \tau_{yz} = 0 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \vec{M} = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x = 0 & \sigma_y = 0 & \sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y \\ \tau_{xy} = 0 & \tau_{xz} = 0 & \tau_{yz} = 0 \end{bmatrix}$$



ovvero

$$8.55) \quad \sigma_z = M \left(-\frac{\sin \gamma}{I_y} x + \frac{\cos \gamma}{I_x} y \right) \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{in ogni punto della trave}$$

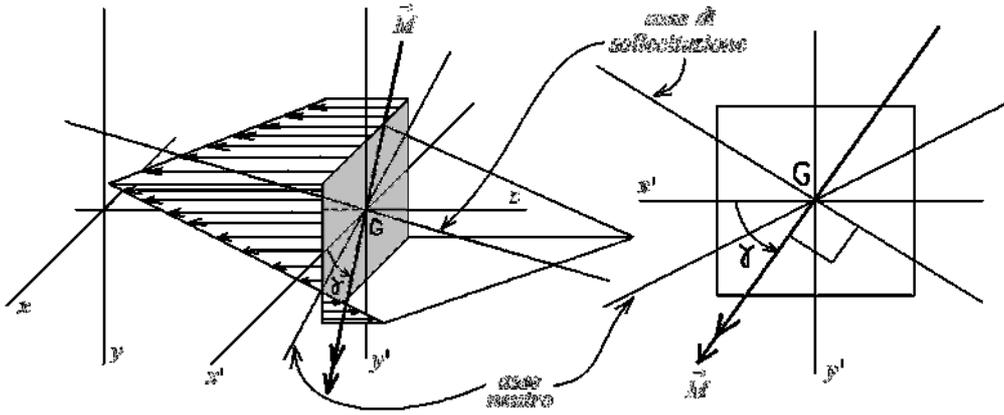
• **Asse neutro.** Anche nel caso della flessione deviata si parla di **asse neutro** come di quella retta sui cui punti la tensione della sezione si annulla. Ma nella flessione deviata l'individuazione dell'asse neutro non è immediata: infatti **nella flessione deviata l'asse neutro non coincide, in generale, con l'asse della coppia**. Per individuare l'equazione dell'asse neutro si consideri che, nel sistema di riferimento G, x', y' (vedi figura), il campo delle tensioni si scrive

$$\vec{t}(x', y'; \hat{k}) = M \left(-\frac{\sin \gamma}{I_y} x' + \frac{\cos \gamma}{I_x} y' \right) \hat{k}$$

L'asse neutro, come luogo di punti in cui si annulla la tensione, è allora identificato dalla equazione

$$8.56) \quad n: -\frac{\sin \gamma}{I_y} x' + \frac{\cos \gamma}{I_x} y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} = \frac{\cos \gamma}{I_x} \hat{i} + \frac{\sin \gamma}{I_y} \hat{j}$$

Dove ho indicato con \vec{n} un vettore parallelo all'asse neutro. Si osserva allora che **l'asse neutro coincide con l'asse della coppia se e solo se i due momenti centrali di inerzia della sezione sono uguali**. D'altra parte in questa evenienza ci ritroviamo nella flessione retta perché allora tutti gli assi baricentrici sono assi centrali di inerzia e quindi l'asse della coppia coincide con un asse centrale di inerzia.



• **Asse di sollecitazione.** Resta valida la definizione di asse di sollecitazione fatta per la flessione retta: l'asse di sollecitazione è l'asse baricentrico ortogonale all'asse della coppia. Per ricavare l'asse di sollecitazione si considera che il generico vettore a esso parallelo (e dunque perpendicolare all'asse neutro) è dato da

$$\vec{s}(t) = -(M_y t) \hat{i} + (M_x t) \hat{j} = -(tM \sin \gamma) \hat{i} + (tM \cos \gamma) \hat{j}, \quad t \in [-\infty, \infty]$$

Quindi la rappresentazione vettoriale dell'asse di sollecitazione è

$$s: \begin{cases} x = -(M \sin \gamma)t \\ y = (M \cos \gamma)t \end{cases} \quad t \in [-\infty, \infty]$$

Eliminando il parametro t si ottiene l'equazione implicita dell'asse di sollecitazione

$$s: \begin{cases} x' = -(M \sin \gamma)t \Rightarrow t = -\frac{x'}{M \sin \gamma} \\ y' = (M \cos \gamma)t \Rightarrow t = \frac{y'}{M \cos \gamma} \end{cases} \Rightarrow x' \tan \gamma + I_x y' = 0 \Leftrightarrow$$

$$8.57) \quad x'(\sin \gamma) + y'(\cos \gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s} = (-\cos \gamma) \hat{i} + (\sin \gamma) \hat{j}$$

Dove ho indicato con \vec{s} un vettore parallelo all'asse di sollecitazione.

• **Spostamenti e deformazioni.** Gli spostamenti, applicando ancora il principio di sovrapposizione degli effetti, sono la somma degli spostamenti prodotti dalle due componenti della coppia. Considerando dunque la 8.38 e la 8.51 si ha

$$\begin{cases} u = -v \frac{M_x}{I_x E} xy \\ v = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} (z^2 + v(y^2 - x^2)) \\ w = \frac{M_x}{I_x E} yz \end{cases} \cup \begin{cases} u = \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} (z^2 + v(x^2 - y^2)) \\ v = v \frac{M_y}{I_y E} xy \\ w = -\frac{M_y}{I_y E} xz \end{cases} \Rightarrow$$

$$8.58) \begin{cases} u = -v \frac{M_x}{I_x E} xy + \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} (z^2 + v(x^2 - y^2)) \\ v = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} (z^2 + v(y^2 - x^2)) + v \frac{M_y}{I_y E} xy \\ w = \frac{M_x}{I_x E} yz - \frac{M_y}{I_y E} xz \end{cases}$$

Per derivazione diretta o sommando le **8.39**, **8.52** si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -v \frac{M_x}{I_x E} y + v \frac{M_y}{I_y E} x \\ \varepsilon_y &= -v \frac{M_x}{I_x E} y + v \frac{M_y}{I_y E} x \\ \varepsilon_z &= \frac{M_x}{I_x E} y - \frac{M_y}{I_y E} x \end{aligned}$$

8.59) $\gamma_{xy} = 0$
 $\gamma_{xz} = 0$
 $\gamma_{yz} = 0$

• **Rotazione della sezione.** Vediamo adesso come e di quanto ruota la sezione generica, posta originariamente sul piano $z = \zeta$. Si può procedere considerando che qui abbiamo due spostamenti rotatori: uno intorno all'asse x , a cui possiamo attribuire, per la **8.48**, il vettore rotazione

$$\vec{r}_x = \alpha \vec{i} = \left(\frac{M_x}{I_x E} \zeta \right) \vec{i} = \left(\frac{M \cos \gamma}{I_x E} \zeta \right) \vec{i}$$

L'altro, intorno all'asse y , al quale si può attribuire il vettore rotazione

$$\vec{r}_y = \beta \vec{j} = \left(\frac{M_y}{I_y E} \zeta \right) \vec{j} = \left(\frac{M \sin \gamma}{I_y E} \zeta \right) \vec{j}$$

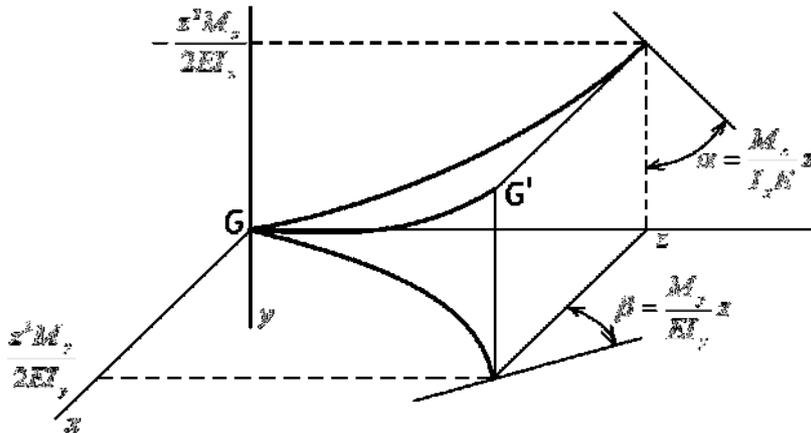
dove il valore di β è stato dedotto, *mutatis mutandis*, sempre dalla **8.48**. Dunque lo spostamento rotatorio complessivo risulta dalla somma di questi due spostamenti e vale

$$8.60) \quad \vec{r}(\zeta) = \vec{r}_x(\zeta) + \vec{r}_y(\zeta) = \alpha(\zeta) \vec{i} + \beta(\zeta) \vec{j} = \left(\frac{M \cos \gamma}{I_x E} \zeta \right) \vec{i} + \left(\frac{M \sin \gamma}{I_y E} \zeta \right) \vec{j} = \frac{M}{E} \zeta \left(\frac{\cos \gamma}{I_x} \vec{i} + \frac{\sin \gamma}{I_y} \vec{j} \right)$$

Si vede così, confrontando con l'espressione di \vec{n} nella **8.56**, che **la rotazione di ciascuna sezione avviene intorno all'asse neutro**. Dobbiamo adesso valutare l'entità dell'angolo di rotazione: esso è

pari al modulo del vettore \vec{r} . Per cui, detto $\varphi(\zeta)$ l'angolo del quale ruota la sezione in $z = \zeta$ intorno all'asse neutro, si ha

$$8.61) \quad \varphi(\zeta) = |\vec{r}| = \frac{M}{E} \zeta \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{I_x} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y}}$$



In genere si esprime questo angolo in funzione dell'angolo θ fra l'asse neutro e l'asse momento. Considerando allora che

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}}{M |\vec{n}|} = \frac{M \cos \gamma \frac{\cos \gamma}{I_x} + M \sin \gamma \frac{\sin \gamma}{I_y}}{M \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{I_x} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y}}} = \frac{\frac{\cos^2 \gamma}{I_x} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y}}{\sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{I_x} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y}}} \Leftrightarrow \\ &\sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{I_x} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y}} = \left(\frac{\cos^2 \gamma}{I_x} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y} \right) / \cos \theta \end{aligned}$$

segue

$$8.62) \quad \varphi(\zeta) = \frac{M}{E \cos \theta} \zeta \left(\frac{\cos^2 \gamma}{I_x} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y} \right)$$

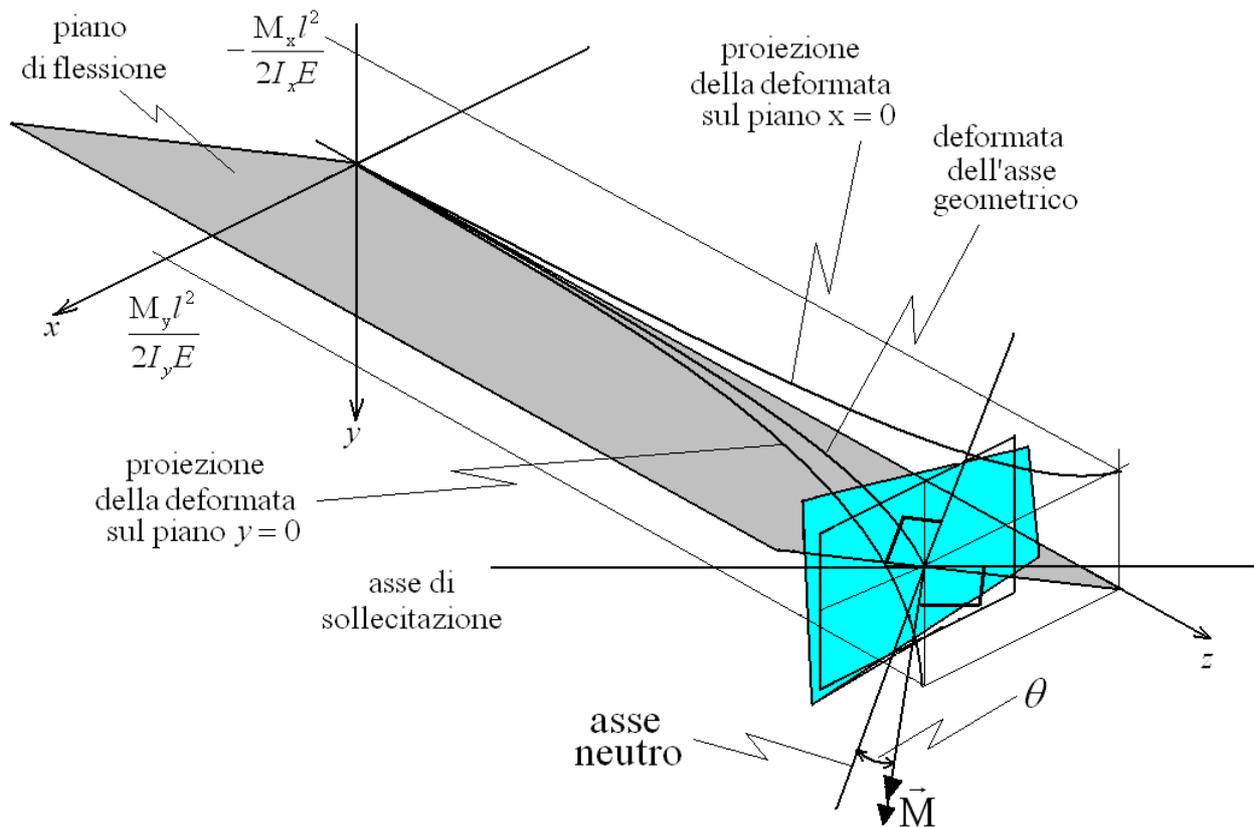
Si osservi che questo angolo è definito positivo, d'altra parte in caso contrario lo avrei dovuto chiamare **anomalia** anziché angolo. Il verso della rotazione comunque si ricava immediatamente considerando il verso della coppia.

• **Deformata dell'asse geometrico.** Vediamo cosa succede all'asse geometrico della trave sottoposta a flessione deviata. Voglio intanto dimostrare che l'asse geometrico si deforma restando comunque tutto contenuto in quel piano che contiene l'asse z ed è perpendicolare all'asse neutro. Tale piano prende il nome, in analogia con quanto visto per la flessione retta, di **piano di flessione**. Intanto il fascio di piano che contiene l'asse z si può scrivere $\pi: \lambda x + \mu y = 0$. Dunque il generico vettore a esso ortogonale si scrive $\vec{v} = (\lambda \quad \mu)$. Imponendo il parallelismo con l'asse neutro si trova

$$8.63) \begin{cases} \lambda = \frac{\cos \gamma}{I_x} \\ \mu = \frac{\sin \gamma}{I_y} \end{cases} \Rightarrow \pi: \frac{\cos \gamma}{I_x} x + \frac{\sin \gamma}{I_y} y = 0 \quad \Leftarrow \text{ piano di flessione}$$

Considerando le **8.58** abbiamo che i punti dell'asse geometrico, a deformazione avvenuta, assumono le posizioni

$$8.63.b) \begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} \zeta^2 \\ y = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} \zeta^2 \\ z = \zeta \end{cases} \quad \zeta \in [0, l]$$



Questi punti soddisfano l'equazione del piano di flessione?

$$\begin{aligned} \pi \left(x = \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} \zeta^2, y = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} \zeta^2 \right) &: \frac{\cos \gamma}{I_x} \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} \zeta^2 - \frac{\sin \gamma}{I_y} \frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} \zeta^2 = \\ &= \frac{M \sin \gamma \cos \gamma \zeta^2}{2 I_x I_y E} (1-1) = 0 \end{aligned}$$

Dunque l'asse geometrico si deforma restando nel piano di flessione, nella flessione deviata come nella flessione retta.

• **Lavoro di deformazione.** Il calcolo può essere fatto sia partendo dal teorema di Clapeyron che partendo dalla espressione del potenziale elastico. Considerando il teorema di Clapeyron, se facciamo le considerazioni fatte nel caso della flessione retta, abbiamo

$$8.64) \quad L_e = \frac{1}{2} \vec{M} \cdot \vec{r}(l) = \frac{1}{2} \frac{M^2}{E} l \left(\frac{\cos^2 \gamma}{I_x} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y} \right) = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{EI_x} + \frac{1}{2} \frac{M_y^2 l}{EI_y}$$

dove ho fatto ricorso al vettore rotazione indicato in 8.60. Confrontando con la 8.49 si vede che il lavoro di deformazione coincide con il lavoro che farebbero le due componenti del momento se agissero separatamente sulla trave. Questo comporta, in base alla 7.13, che sono nulli in questo caso i lavori mutui. E questo è d'altra parte ovvio se si pensa che M_y non fa alcun lavoro durante la rotazione della sezione intorno all'asse x ; così come M_x non compie alcun lavoro durante la rotazione della sezione intorno all'asse y .

Un sistema fisico di questo tipo, cioè in cui si annullano i lavori mutui, è detto **sistema ortogonale energeticamente**.

Vediamo adesso come calcolare il lavoro di deformazione usando invece l'espressione del potenziale elastico:

$$\begin{aligned} L &= \int_V \Phi(\varepsilon_{ij}) dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_z \varepsilon_z dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right) \left(\frac{M_x}{I_x E} y - \frac{M_y}{I_y E} x \right) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \frac{M_x}{I_x} y \frac{M_x}{I_x E} y dV + \frac{1}{2} \int_V \frac{M_x}{I_x} y \left(-\frac{M_y}{I_y E} x \right) dV + \frac{1}{2} \int_V \left(-\frac{M_y}{I_y} x \right) \frac{M_x}{I_x E} y dV + \frac{1}{2} \int_V \left(-\frac{M_y}{I_y} x \right) \left(-\frac{M_y}{I_y E} x \right) dV \end{aligned}$$

Per il secondo e il terzo integrale si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \frac{M_x}{I_x} y \left(-\frac{M_y}{I_y E} x \right) dV &= -\frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x} \frac{M_y}{I_y E} \int_V y x dV = -\frac{1}{2} \frac{M_x M_y}{I_x I_y E} \int_A y x dA \int_0^l dl = -\frac{l}{2} \frac{M_x M_y}{I_x I_y E} \int_A y x dA \\ \frac{1}{2} \int_V \frac{M_y}{I_y} x \left(-\frac{M_x}{I_x E} y \right) dV &= -\frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y} \frac{M_x}{I_x E} \int_V y x dV = -\frac{1}{2} \frac{M_y M_x}{I_y I_x E} \int_A y x dA \int_0^l dl = -\frac{l}{2} \frac{M_y M_x}{I_y I_x E} \int_A y x dA \end{aligned}$$

Si vede intanto che questi due integrali sono uguali, il che farebbe pensare al teorema di Betti, ma qui si tratta di lavoro delle tensioni interne e non di lavoro della sollecitazione esterna. Comunque quello che ci interessa è che i due integrali sono nulli essendo evidentemente nullo l'integrale di xy su A . Dunque abbiamo

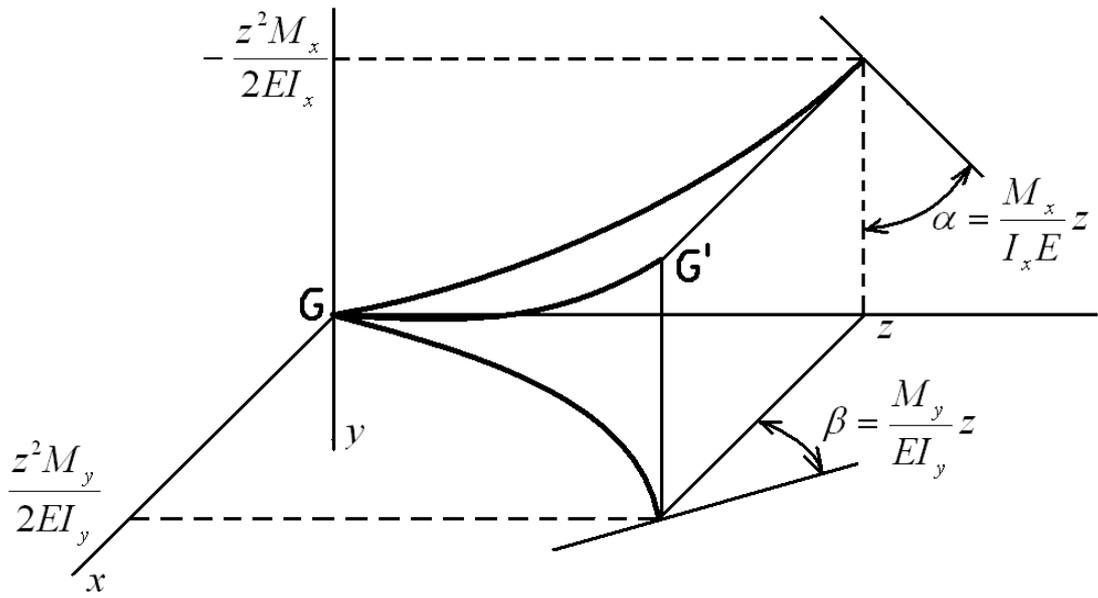
$$L_i = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{I_x^2 E} \int_V y^2 dV + \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{I_y^2 E} \int_V x^2 dV =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{I_x^2 E} \int_A y^2 dA \int_0^l dl + \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{I_y^2 E} \int_A x^2 dA \int_0^l dl = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{I_x^2 E} I_x l + \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{I_y^2 E} I_y l = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{I_x E} + \frac{1}{2} \frac{M_y^2 l}{I_y E}$$

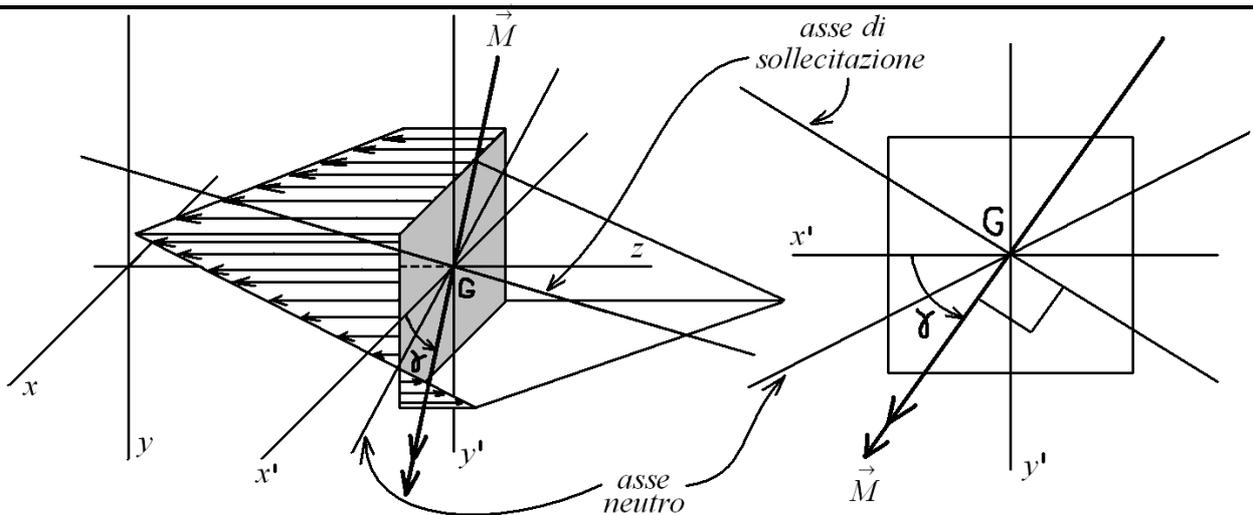
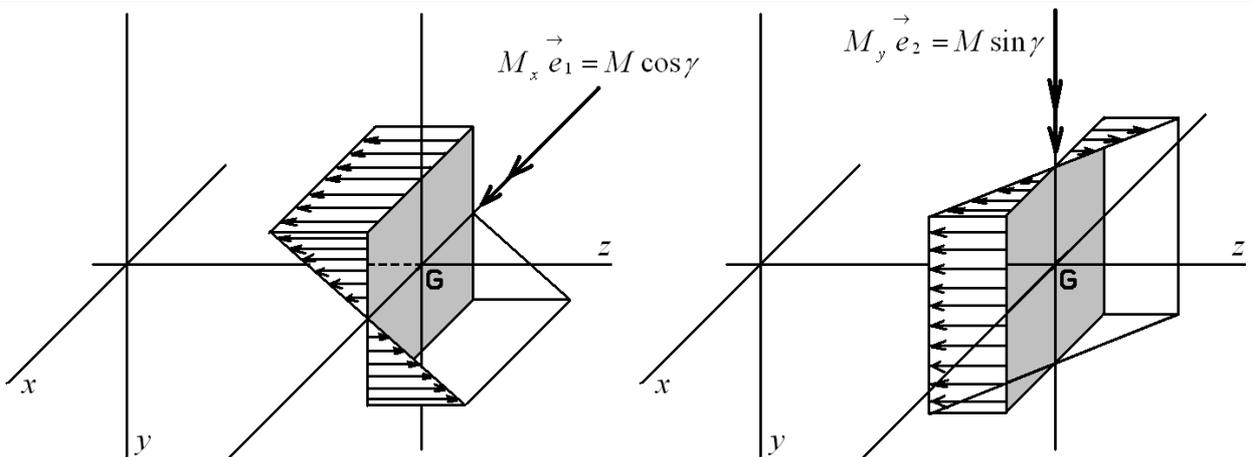
E ritroviamo il risultato **8.6**.

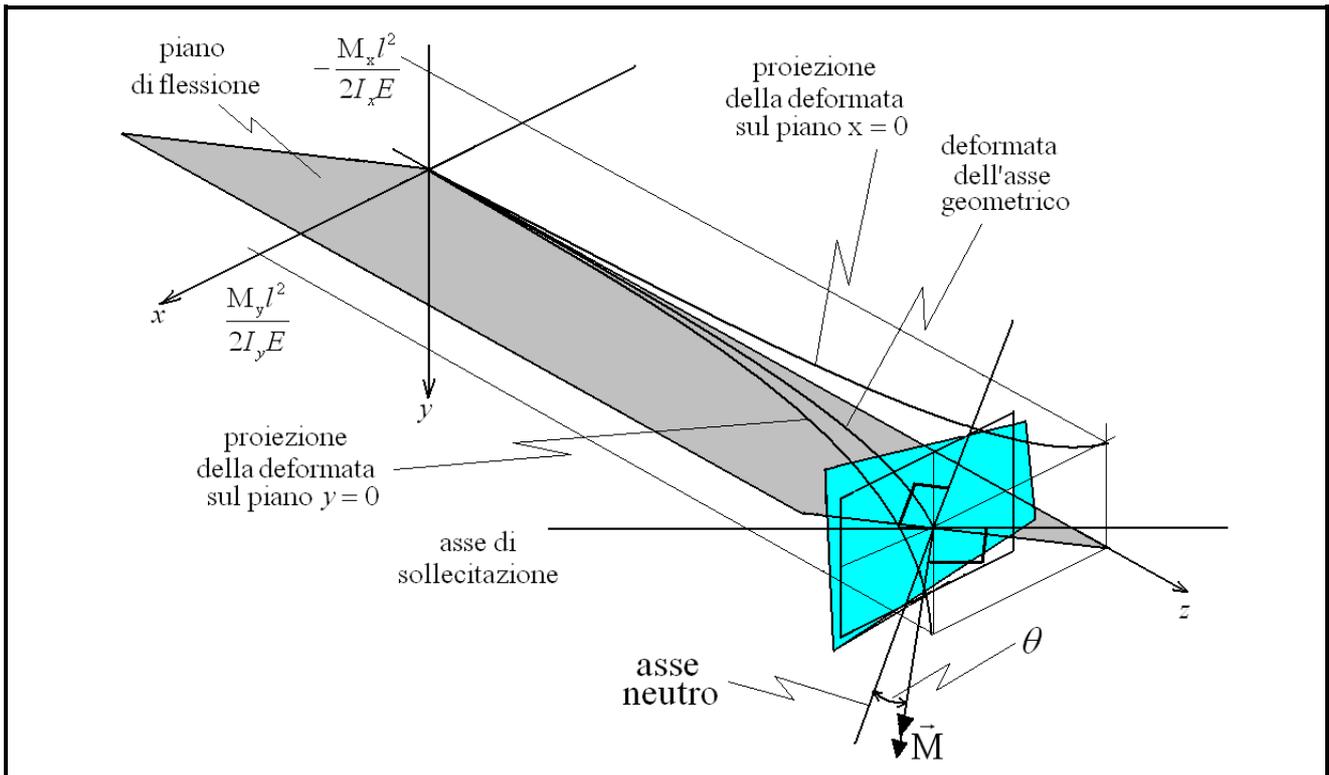
Flessione deviata
Sollecitazione
L'asse del momento della coppia è un qualunque asse passante per il baricentro della sezione estrema e giacente sul piano della sezione stessa.
Stato tensionale
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \sigma_z = M \left(\frac{\cos \gamma}{I_x} y - \frac{\sin \gamma}{I_y} x \right) = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$
Spostamenti
$u = -v \frac{M_x}{I_x E} xy + \frac{1}{2} \frac{M_y}{I_y E} (z^2 + v(x^2 - y^2)) \quad v = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x E} (z^2 + v(y^2 - x^2)) + v \frac{M_y}{I_y E} xy$ $w = \frac{M_x}{I_x E} yz - \frac{M_y}{I_y E} xz$
Deformazioni
$\varepsilon_x = -v \frac{M_x}{I_x E} y + v \frac{M_y}{I_y E} x \quad \varepsilon_y = -v \frac{M_x}{I_x E} y + v \frac{M_y}{I_y E} x \quad \varepsilon_z = \frac{M_x}{I_x E} y - \frac{M_y}{I_y E} x$ $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

Deformata dell'asse geometrico



Asse neutro e asse di sollecitazione





Rotazione della sezione originariamente in $z = \zeta$, intorno all'asse neutro

$$\varphi(\zeta) = \frac{M}{E} \zeta \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y^2}} = \frac{M}{E \cos \theta} \zeta \left(\frac{\cos^2 \gamma}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y^2} \right)$$

dove θ è l'angolo fra l'asse momento e l'asse neutro

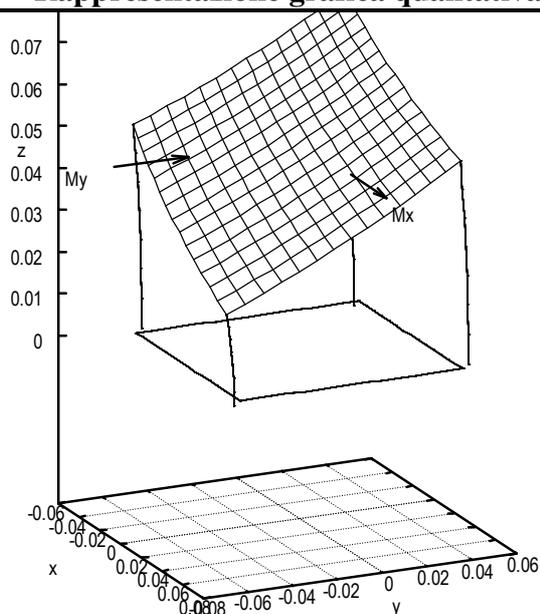
asse neutro	$n: -\frac{\sin \gamma}{I_y} x' + \frac{\cos \gamma}{I_x} y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} = \frac{\cos \gamma}{I_x} \hat{i} + \frac{\sin \gamma}{I_y} \hat{j}$
asse di sollecitazione	$s: x'(\sin \gamma) + y'(\cos \gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s} = (-\cos \gamma) \hat{i} + (\sin \gamma) \hat{j}$

Lavoro di deformazione della trave

$$L_e = \frac{1}{2} \vec{M} \cdot \vec{r}(l) = \frac{1}{2} \frac{M^2}{E} l \left(\frac{\cos^2 \gamma}{I_x} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y} \right) = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{EI_x} + \frac{1}{2} \frac{M_y^2 l}{EI_y}$$

E' un caso particolare in cui il lavoro della somma delle sollecitazioni è pari alla somma dei lavori delle singole sollecitazioni.

Rappresentazione grafica qualitativa



Significato dei simboli

I_x : momento centrale di inerzia della generica sezione della trave rispetto all'asse centrale di inerzia x

I_y : momento centrale di inerzia della generica sezione della trave rispetto all'asse centrale di inerzia y

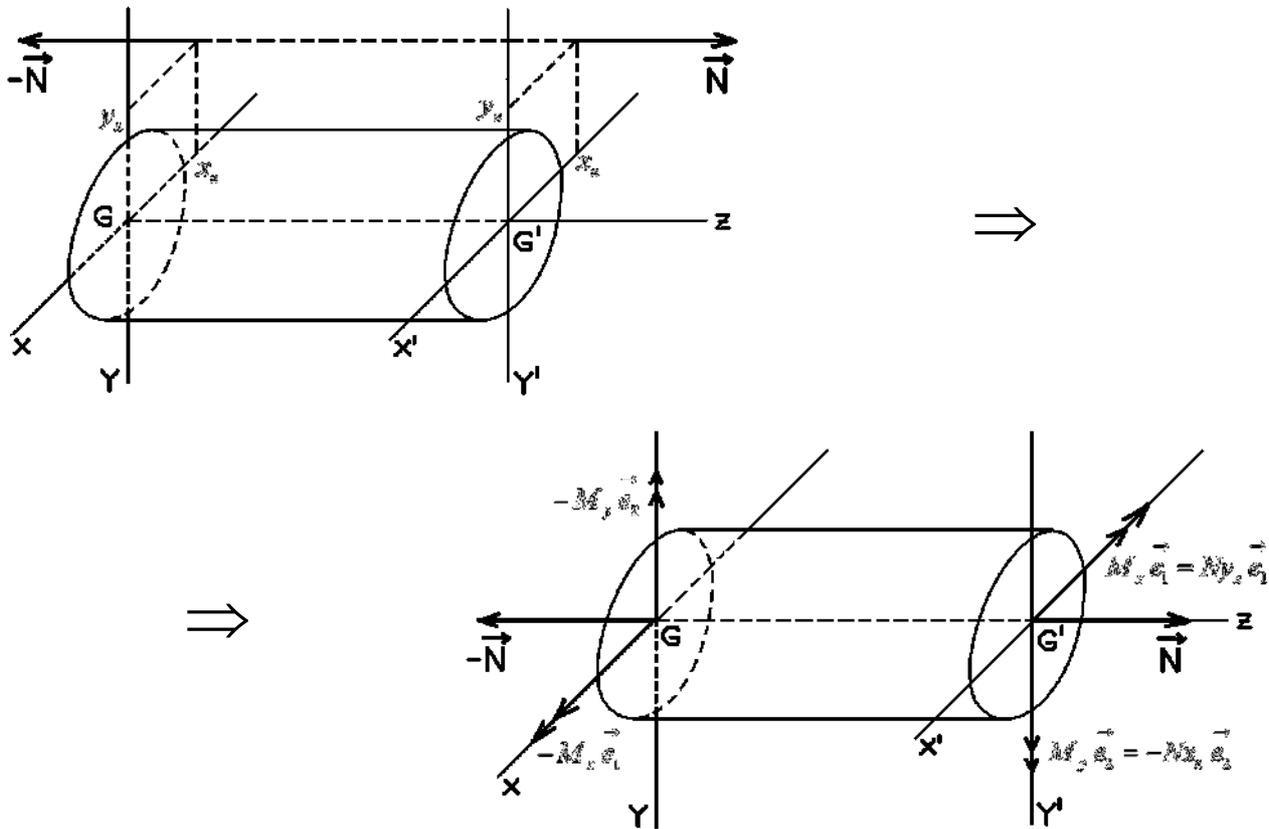
8.7. Sforzo normale eccentrico. Lo sforzo normale si definisce eccentrico quando la retta d'azione della forza applicata sulle sezioni estreme non coincide con l'asse geometrico della trave. In questo caso si riduce la sollecitazione spostando il carico sull'asse geometrico della trave e introducendo una coppia pari al momento del carico iniziale rispetto al baricentro della sezione estrema. In questo modo la sollecitazione iniziale risulta la somma di

- un carico normale centrato
- una flessione retta intorno all'asse x
- una flessione retta intorno all'asse y

• **Stato tensionale.** Per il principio di sovrapposizione degli effetti è la somma degli stati tensionali relativi alle 3 sollecitazioni semplici nelle quali può essere scomposto lo sforzo normale eccentrico:

sforzo normale centrato	$\sigma_z^{(1)} = \frac{N}{A}$
flessione retta di asse x	$\sigma_z^{(2)} = \frac{Ny_n}{I_x} y$

flessione retta di asse y	$\sigma_z^{(3)} = \frac{Nx_n}{I_y} x$
sforzo normale eccentrico	$\sigma_z = N \left(\frac{1}{A} + \frac{y_n}{I_x} y + \frac{x_n}{I_y} x \right)$



Introducendo i raggi giroscopici, cioè quelle due lunghezze ρ_x, ρ_y tali per cui

$$I_x = A\rho_x^2, \quad I_y = A\rho_y^2$$

abbiamo che la tensione complessiva si può scrivere in modo compatto

$$8.65) \quad \sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_n}{\rho_x^2} y + \frac{x_n}{\rho_y^2} x \right)$$

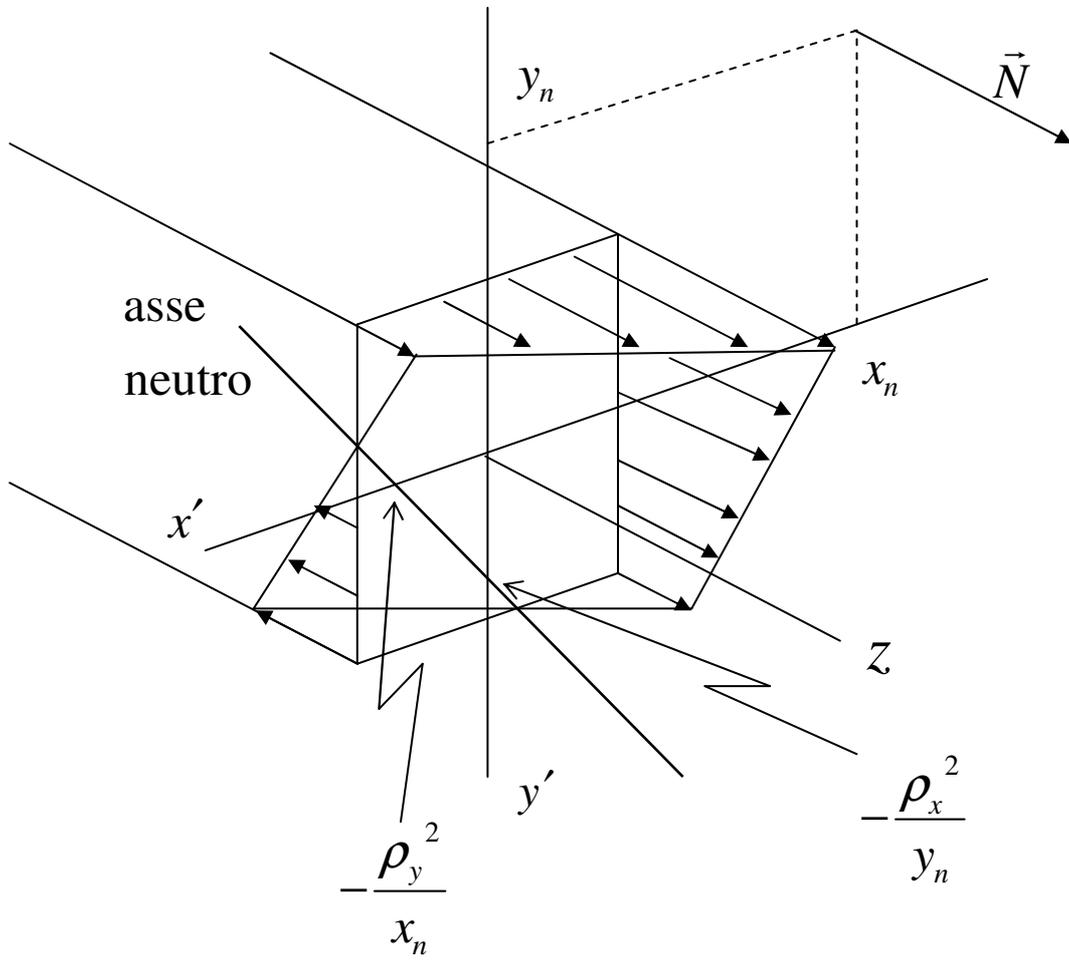
• **Asse neutro.** Anche qui l'asse neutro è quella retta sui cui punti la tensione di un data sezione si annulla. Allora l'asse neutro lo troviamo imponendo $\sigma_z = 0$, che porge

$$8.66) \quad n : 1 + \frac{y_n}{\rho_x^2} y + \frac{x_n}{\rho_y^2} x = 0 \quad \Leftarrow \text{asse neutro}$$

Cerchiamo le intersezioni con gli assi coordinati in modo da visualizzare la posizione dell'asse neutro:

$$x = 0 \Rightarrow 1 + \frac{y_n}{\rho_x^2} y = 0 \Rightarrow y = -\frac{\rho_x^2}{y_n}$$

$$y = 0 \Rightarrow 1 + \frac{x_n}{\rho_y^2} x = 0 \Rightarrow x = -\frac{\rho_y^2}{x_n}$$



Si possono allora fare le seguenti osservazioni:

- l'asse neutro non passa per il baricentro della sezione
- quanto maggiori sono le coordinate x_n, y_n quanto più l'asse neutro si avvicina al baricentro della sezione

La seconda osservazione si giustifica considerando che allontanando lo sforzo normale dal baricentro diventa via via più forte la componente della flessione su quella della trazione-compressione e dunque ci si avvicina al caso della flessione deviata.

• **Nocciolo centrale di inerzia.** I materiali lapidei sono caratterizzati dal fatto di avere una scarsa resistenza alla trazione. Per questi materiali, in caso di carico normale eccentrico, risulta allora molto importante sapere se l'asse neutro interseca la sezione: in caso affermativo infatti necessariamente una porzione della sezione sarà sottoposta a trazione (la restante parte sarà sottoposta evidentemente a compressione).

Intuitivamente maggiore è la distanza del punto x_n, y_n dal baricentro della sezione e maggiore è la probabilità che l'asse neutro intercetti la sezione: esisterà allora un intorno del baricentro della

sezione tale per cui se x_n, y_n è un suo punto, allora l'asse neutro passa fuori dalla sezione. Questo intorno è detto **nocciolo centrale di inerzia**.

Vediamo come si determina il nocciolo centrale di inerzia. Consideriamo una sezione i cui raggi centrali di inerzia siano ρ_x, ρ_y . Allora l'equazione dell'asse neutro si scrive (equazione 8.66)

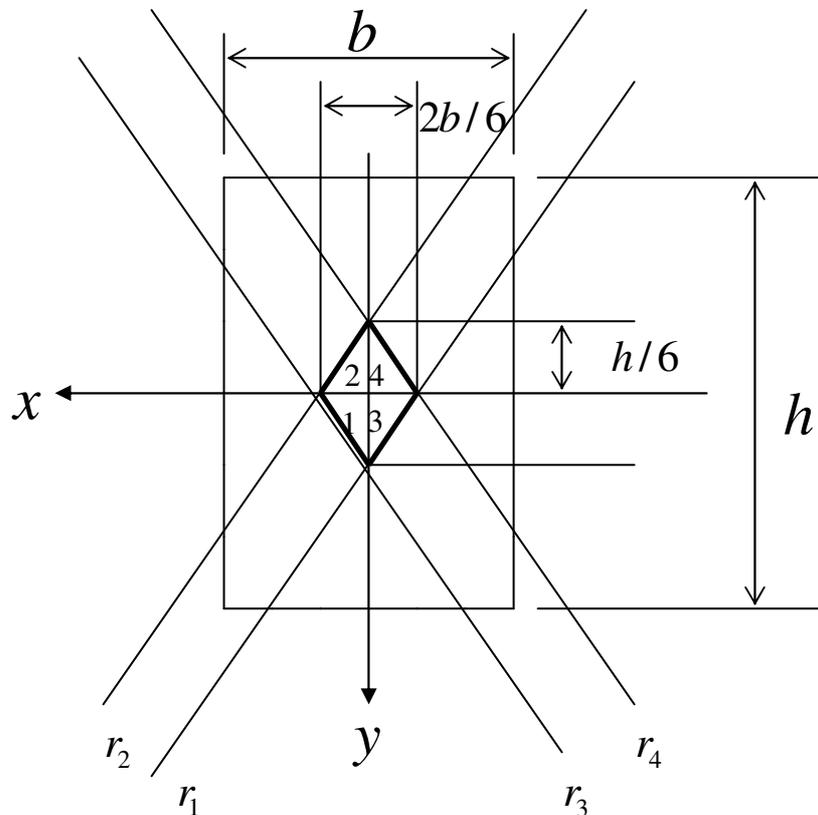
$$1 + \frac{y_n}{\rho_x^2} y + \frac{x_n}{\rho_y^2} x = 0$$

Imponendo che i suoi punti x, y appartengano alla sezione A e esplicitando poi l'equazione dell'asse neutro rispetto x e y , si ottengono per x_n, y_n tante limitazioni quante sono le tangenti esterne che possono essere condotte alla sezione. Queste limitazioni assumono in fine l'aspetto di un poligono avente tanti lati quante sono le limitazioni stesse. Per chiarire questo discorso è necessario fare alcuni esempi con sezioni specifiche.

• **Nocciolo centrale di inerzia per sezione rettangolare.** Prendiamo la sezione rettangolare in figura. Per i raggi centrali di inerzia si ha

$$\begin{cases} I_x = hb \frac{1}{12} h^2 = hb \rho_x^2 \Rightarrow \rho_x^2 = \frac{1}{12} h^2 \\ I_y = hb \frac{1}{12} b^2 = hb \rho_y^2 \Rightarrow \rho_y^2 = \frac{1}{12} b^2 \end{cases}$$

Dunque l'equazione dell'asse neutro si scrive



$$8.67) \quad 1 + 12 \frac{y_n}{h^2} y + 12 \frac{x_n}{b^2} x = 0$$

Ora dobbiamo imporre che i punti dell'asse neutro non appartengano alla sezione o che siano al massimo punti di frontiera della sezione, il che equivale a imporre appunto che l'asse neutro non intercetti la sezione. Le condizioni sono evidentemente

$$8.68) \quad |x| \geq \frac{b}{2} \quad \cup \quad |y| \geq \frac{h}{2}$$

Esplicito adesso la **8.67** rispetto x :

$$x = \frac{-b^2 - 12 \frac{y_n}{h^2} y b^2}{12x_n} \Rightarrow \left| \frac{-b^2 - 12 \frac{y_n}{h^2} y b^2}{12x_n} \right| \geq \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{6} \frac{\left| -1 - 12 \frac{y_n}{h^2} y \right|}{|x_n|} \geq 1 \Leftrightarrow |x_n| \leq \frac{b}{6} \left| -1 - 12 \frac{y_n}{h^2} y \right| \Leftrightarrow$$

$$-\frac{b}{6} \left| -1 - 12 \frac{y_n}{h^2} y \right| \leq x_n \leq \frac{b}{6} \left| -1 - 12 \frac{y_n}{h^2} y \right|$$

Il che si traduce nelle 4 condizioni

$$\left. \begin{array}{l} x_n \leq \frac{-b - 12 \frac{y_n}{h^2} y b}{6} \\ x_n \geq \frac{b + 12 \frac{y_n}{h^2} y b}{6} \end{array} \right\} \text{ per } b + 12 \frac{y_n}{h^2} y b \geq 0 \Leftrightarrow y y_n \geq -\frac{h^2}{12}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n \leq \frac{b + 12 \frac{y_n}{h^2} y b}{6} \\ x_n \geq -\frac{b + 12 \frac{y_n}{h^2} y b}{6} \end{array} \right\} \text{ per } b + 12 \frac{y_n}{h^2} y b \leq 0 \Leftrightarrow y y_n \leq -\frac{h^2}{12}$$

Considerando la seconda coppia di condizioni si ha $y_n > 0 \Rightarrow y \leq 0 \Rightarrow y \leq -h/2 \Rightarrow$

$$8.69) \quad r_3 \rightarrow x_n \leq \frac{b + 12 \frac{y_n}{h^2} y b}{6} \leq \frac{b - 6 \frac{y_n}{h} b}{6} \leq \frac{b}{6} - \frac{y_n}{h} b \quad \cup \quad y_n > 0$$

$$8.70) \quad r_1 \rightarrow x_n \geq \frac{-b - 12 \frac{y_n}{h^2} y b}{6} \geq \frac{-b + 6 \frac{y_n}{h} b}{6} \geq -\frac{b}{6} + \frac{y_n}{h} b \quad \cup \quad y_n > 0$$

Sempre considerando la seconda coppia di condizioni si ha anche $y_n < 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow y \geq h/2 \Rightarrow$

$$8.71) \quad r_2 \rightarrow x_n \leq \frac{b + 12 \frac{y_n}{h^2} y b}{6} \leq \frac{b + 6 \frac{y_n}{h} b}{6} \leq \frac{b}{6} + \frac{y_n}{h} b \quad \cup \quad y_n < 0$$

$$8.72) \quad r_4 \rightarrow x_n \geq \frac{-b - 12 \frac{y_n}{h^2} y b}{6} \geq \frac{-b - 6 \frac{y_n}{h} b}{6} \geq -\frac{b}{6} - \frac{y_n}{h} b \quad \cup \quad y_n < 0$$

Le **8.69**, **8.70** definiscono i settori 1,3 del nocciolo centrale di inerzia. Le **8.71**, **8.72** definiscono invece i settori 2,4. Resta così provato che il nocciolo centrale di inerzia di una sezione rettangolare è il rombo indicato in figura. Al medesimo risultato saremmo pervenuti esplicitando adesso la **8.67** rispetto y .

• **Nocciolo centrale di inerzia per sezione circolare.** Se R è il raggio della sezione circolare abbiamo

$$\begin{cases} I_x = \pi R^2 \frac{R^2}{4} = \pi R^2 \rho_x^2 \Rightarrow \rho_x^2 = \frac{R^2}{4} \\ \rho_y^2 = \rho_x^2 = \frac{R^2}{4} \end{cases}$$

Dunque l'equazione dell'asse neutro si scrive

$$8.73) \quad n: 1 + 4 \frac{y_n}{R^2} y + 4 \frac{x_n}{R^2} x = 0 \Leftrightarrow R^2 + 4y_n y + 4x_n x = 0$$

Poiché si vuole che esso non intersechi la sezione, la sua distanza dal centro della sezione deve essere $\geq R$. Per calcolare questa distanza dobbiamo individuare il punto M intersezione fra l'asse neutro e la retta passante per il centro della sezione, a esso ortogonale. Il fascio di rette passanti per il centro della sezione è dato da

$$r: ax + by = 0 \quad \forall a, b \in R$$

Un vettore parallelo all'asse neutro è dato da

$$\vec{n} = (-4y_n \quad 4x_n)$$

e un vettore parallelo alla generica retta per il centro della sezione è dato da

$$\vec{r} = (-b \quad a)$$

Imponendo l'ortogonalità tra i due vettori si ha $a = -4y_n, b = 4x_n$ dunque la retta per il centro ortogonale all'asse neutro si scrive

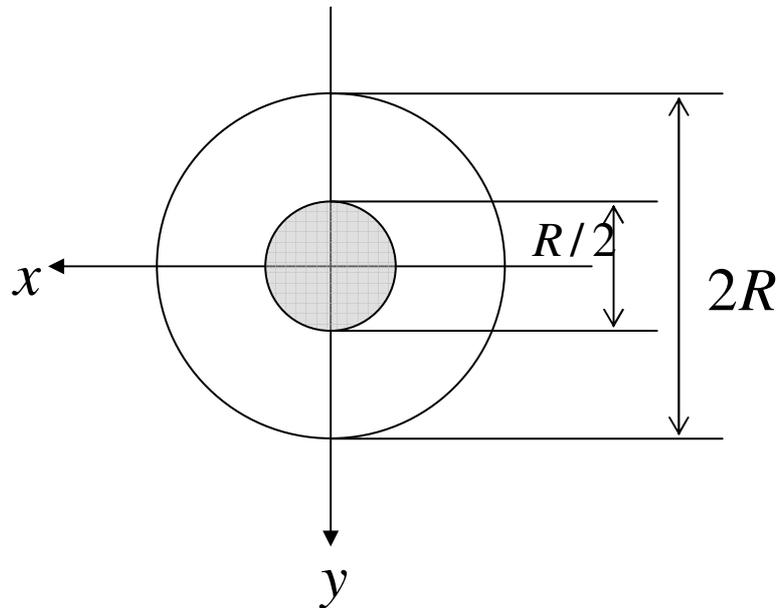
$$r: -y_n x + x_n y = 0$$

e la sua intersezione con l'asse neutro è

$$n \cap r : \begin{cases} R^2 + 4y_n y + 4x_n x = 0 \\ -y_n x + x_n y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 y_n + 4y_n^2 y + 4x_n^2 x = 0 \\ x = y \frac{x_n}{y_n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{R^2 x_n}{4(y_n^2 + x_n^2)} \\ y = -\frac{R^2 y_n}{4(y_n^2 + x_n^2)} \end{cases}$$

Ma allora la distanza dell'asse neutro dal centro vale

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{\frac{R^4 x_n^2}{16(y_n^2 + x_n^2)^2} + \frac{R^4 y_n^2}{16(y_n^2 + x_n^2)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{R^4 (y_n^2 + x_n^2)}{16(y_n^2 + x_n^2)^2}} = \sqrt{\frac{R^4}{16(y_n^2 + x_n^2)}} \end{aligned}$$



Non resta che imporre che questa distanza sia $\geq R$, in modo che l'asse neutro non intersechi la sezione:

$$\begin{aligned} d^2 \geq R^2 &\Leftrightarrow \frac{R^4}{16(y_n^2 + x_n^2)} \geq R^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_n^2 + y_n^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Otteniamo allora che il nucleo centrale di inerzia è una circonferenza avente centro nel centro della sezione e raggio pari a $\frac{1}{4}$ di quello della sezione stessa.

• **Analisi delle deformazioni.** Le deformazioni si ottengono sommando le deformazioni dovute allo sforzo normale centrato e quelle dovute alla flessione deviata. Il primo determina, in base alla **8.24**, un allungamento

$$8.74) \quad \Delta l = \frac{N}{EA} l$$

La seconda, in base alla **8.61**, determina una rotazione della sezione originariamente in $z = \zeta$, intorno a un asse baricentrico parallelo all'asse neutro, di un angolo

$$8.75) \quad \varphi(\zeta) = \frac{M}{E} \zeta \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y^2}}$$

dove

$$M = N \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad \cos \gamma = \frac{N y_n}{M} = \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \quad \sin \gamma = -\frac{N x_n}{M} = -\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}$$

• **Lavoro di deformazione.** Calcolo il lavoro di deformazione attraverso l'espressione del potenziale elastico. Questa volta voglio, a scopo didattico, sfruttare l'espressione del potenziale elastico complementare **6.26**. Si ha

$$\begin{aligned}\Psi(\sigma_{ij}) &= \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \\ &= \frac{1}{2E}\sigma_z^2 = \frac{1}{2E}N^2\left(\frac{1}{A} + \frac{y_n y}{I_x} + \frac{x_n x}{I_y}\right)^2 = \\ &= \frac{N^2}{2E}\left(\frac{1}{A^2} + \frac{y_n^2 y^2}{I_x^2} + \frac{x_n^2 x^2}{I_y^2} + 2\frac{y_n y}{AI_x} + 2\frac{x_n x}{AI_y} + 2\frac{x_n y_n xy}{I_x I_y}\right)\end{aligned}$$

Questo è il lavoro per unità di volume. Per avere quello complessivo è necessario integrare sul volume della trave. Si ha

$$\begin{aligned}L_i &= \int_V \Psi dV = \frac{N^2}{2E} \int_V \left(\frac{1}{A^2} + \frac{y_n^2 y^2}{I_x^2} + \frac{x_n^2 x^2}{I_y^2} + 2\frac{y_n y}{AI_x} + 2\frac{x_n x}{AI_y} + 2\frac{x_n y_n xy}{I_x I_y} \right) dV = \\ &= \frac{N^2}{2E} \left(\frac{V}{A^2} + \frac{y_n^2}{I_x^2} \int_V y^2 dV + \frac{x_n^2}{I_y^2} \int_V x^2 dV + 2\frac{y_n}{AI_x} \int_V y dV + 2\frac{x_n}{AI_y} \int_V x dV + 2\frac{x_n y_n}{I_x I_y} \int_V xy dV \right) = \\ &= \frac{N^2}{2E} \left(\frac{V}{A^2} + \frac{y_n^2}{I_x^2} \int_A y^2 dA \int_0^l dl + \frac{x_n^2}{I_y^2} \int_A x^2 dA \int_0^l dl + 2\frac{y_n}{AI_x} \int_A y dA \int_0^l dl + 2\frac{x_n}{AI_y} \int_A x dA \int_0^l dl + 2\frac{x_n y_n}{I_x I_y} \int_V xy dV \right) = \\ &= \frac{N^2}{2E} \left(\frac{V}{A^2} + \frac{y_n^2 l}{I_x} + \frac{x_n^2 l}{I_y} + 2\frac{y_n l}{AI_x} \frac{y^2}{2} \Big|_{-b}^b + 2\frac{x_n l}{AI_y} \frac{x^2}{2} \Big|_{-a}^a + 2\frac{x_n y_n l}{I_x I_y} \int_A xy dA \right) = \\ &= \frac{N^2}{2E} \left(\frac{V}{A^2} + \frac{y_n^2 l}{I_x} + \frac{x_n^2 l}{I_y} + 2\frac{x_n y_n l}{I_x I_y} \int_{-a}^a x dx \int_{-b}^b y dy \right) = \frac{N^2}{2E} \left(\frac{V}{A^2} + \frac{y_n^2 l}{I_x} + \frac{x_n^2 l}{I_y} \right)\end{aligned}$$

Si è trovato dunque

$$8.76) \quad L_i = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA} + \frac{1}{2} \frac{N^2 y_n^2 l}{EI_x} + \frac{1}{2} \frac{N^2 x_n^2 l}{EI_y} = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA} + \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{EI_x} + \frac{1}{2} \frac{M_y^2 l}{EI_y}$$

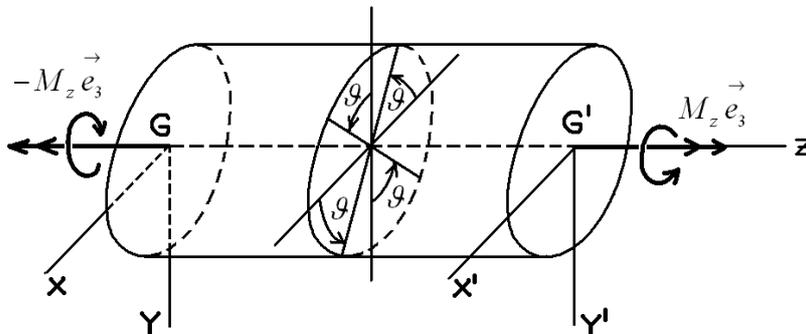
il che ci permette di dire, confrontando con le **8.28**, **8.64**, che anche il caso dello sforzo normale eccentrico costituisce, come la flessione deviata, un esempio di sistema ortogonale energeticamente: ovvero i lavori mutui sono nulli, ovvero il lavoro di deformazione complessivo è pari alla somma dei lavori di deformazione delle singole sollecitazioni semplici (sforzo normale centrato, due flessioni rette) immaginate operare autonomamente sul solido.

Sforzo normale eccentrico	
Sollecitazione	
<p>Il carico decentrato viene ridotto ad un carico assiale e ad una coppia, di momento parallelo al piano xy. Dunque questa sollecitazione è la somma di un carico assiale e di due flessioni rette.</p>	
Stato tensionale	
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \sigma_z = N \left(\frac{1}{A} + \frac{y_n y}{I_x} - \frac{x_n x}{I_y} \right)$	
Spostamenti	
<p>Si sommano gli spostamenti relativi al carico assiale con quelli delle due flessioni rette.</p>	
Deformazioni	
<p>Si sommano le deformazioni relative al carico assiale con quelle delle due flessioni rette.</p>	

Allungamento dell'asse geometrico
$\Delta l = \frac{N}{EA} l$
Rotazione della sezione originariamente in in $z = \zeta$, intorno all'asse baricentrico parallelo all'asse neutro
$\varphi(\zeta) = \frac{M}{E} \zeta \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{I_y^2}}$
con
$M = N \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad \cos \gamma = \frac{N y_n}{M} = \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \quad \sin \gamma = -\frac{N x_n}{M} = -\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}$
Asse neutro
$\frac{1}{A} + \frac{y_n y}{I_x} + \frac{x_n x}{I_y} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{y_n}{\rho_x} y + \frac{x_n}{\rho_y} x = 0$
Si rileva che in questo caso, a differenza del caso di flessione retta e deviata, l'asse neutro non è una retta baricentrale.
Lavoro di deformazione della trave
$L = \frac{1}{2} \frac{N^2}{E} \left(\frac{l}{A} + \frac{1}{2} \frac{y_n^2 l}{I_x} + \frac{1}{2} \frac{x_n^2 l}{I_y} \right) = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA} + \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{EI_x} + \frac{1}{2} \frac{M_y^2 l}{EI_y}$
E' un caso particolare in cui il lavoro della somma delle sollecitazioni è pari alla somma dei lavori delle singole sollecitazioni.
Significato dei simboli
I_x : momento centrale di inerzia della generica sezione della trave rispetto all'asse centrale di inerzia x
I_y : momento centrale di inerzia della generica sezione della trave rispetto all'asse centrale di inerzia y

Capitolo 9. Sollecitazioni semplici: torsione

9.1. Torsione per sezioni circolari. Sulle due sezioni estreme della trave a sezione circolare piena agiscono due coppie uguali in modulo e contrarie in verso (in modo che l'equilibrio meccanico sia rispettato), aventi asse momento sovrapposto all'asse geometrico della trave.



• **Ipotesi sul campo degli spostamenti.** Procedo con il metodo seminverso di soluzione, ma in questo caso anziché ipotizzare la soluzione in termini di tensioni, la ipotizzo in termini di spostamenti. Faccio le seguenti due ipotesi:

- detta $\theta = \theta(z)$ la funzione la quale fornisce l'angolo di rotazione della sezione in z , intorno all'asse z stesso, rispetto alla sezione in $z = 0$ (che si assume, come al solito, fissa rispetto al sistema di riferimento), allora ipotizzo che sia

$$9.1) \quad \theta(z) = \Theta z, \quad z \in [0, l]$$

dove Θ è una costante reale e dove **si assumono positive le rotazioni antiorarie** (rispetto all'asse z);

- la generica sezione resta piana durante la deformazione, ovvero comunque si fissa \tilde{z} in $[0, l]$ risulta

$$w(x, y, \tilde{z}) = 0, \quad \forall x, y \in A$$

• **Deduzioni sugli spostamenti.** Adesso, date le due ipotesi di cui sopra, vediamo cosa possiamo dedurre su $u(x, y, z)$ e $v(x, y, z)$. Poniamoci sulla generica sezione: per quanto detto essa è sottoposta a uno spostamento di rotazione attorno all'asse geometrico della trave; poiché questa rotazione è piccola (ipotesi delle piccole deformazioni) possiamo esprimere lo spostamento rotatorio con la formula semplificata che porge

$$\vec{S}(P) = \theta(z) \hat{k} \times \overrightarrow{GP} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \theta(z) \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\theta(z)\hat{i} + x\theta(z)\hat{j} = -yz\Theta\hat{i} + xz\Theta\hat{j}$$

dove si intende che G è il baricentro della sezione e P è il suo generico punto. D'altra parte questo spostamento si scrive anche

$$\vec{S}(P) = u(x, y, z)\hat{i} + v(x, y, z)\hat{j}$$

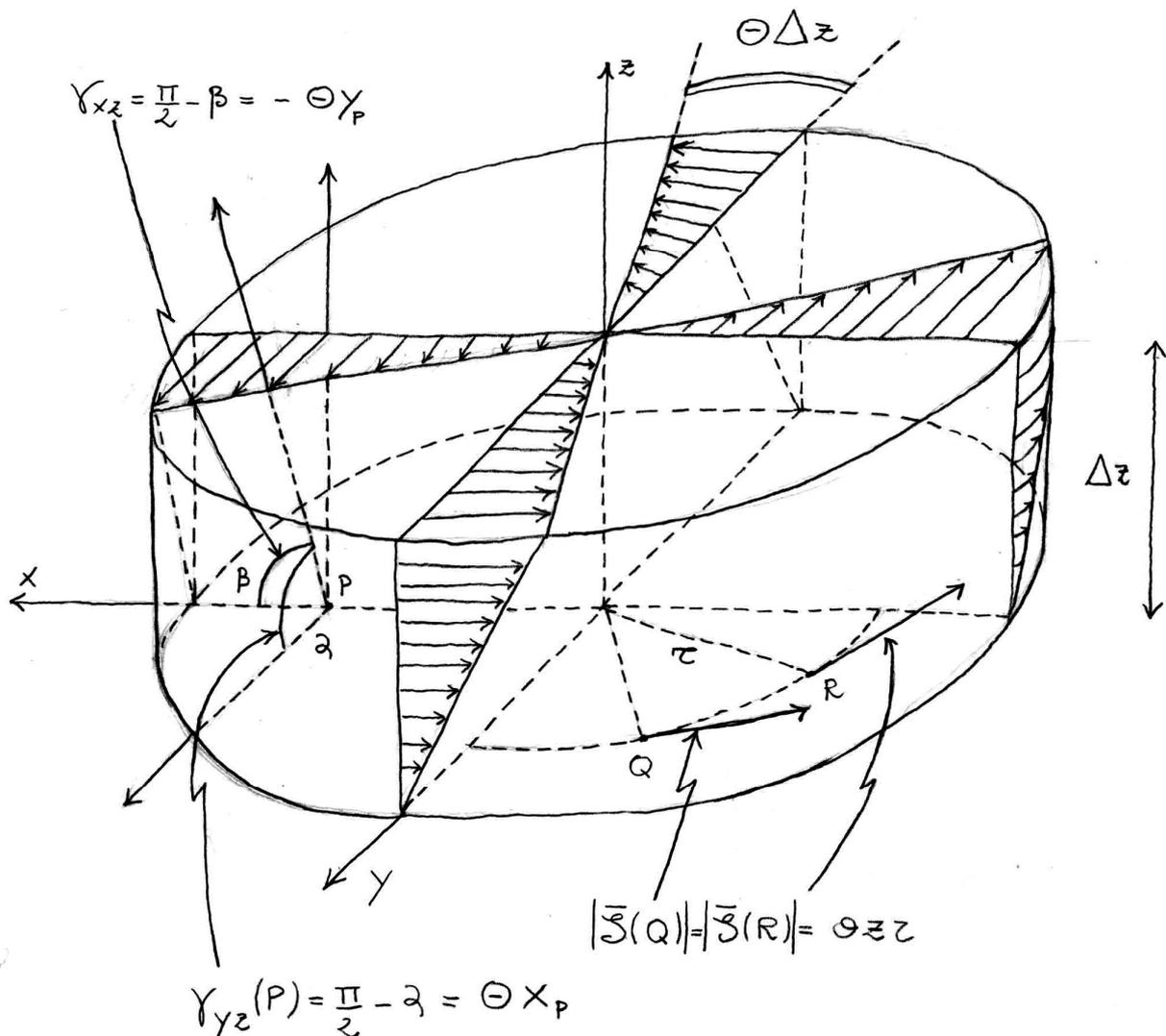
Per cui confrontando (e ricordando la seconda ipotesi fatta) si trova

$$9.2) \begin{cases} u(x, y, z) = -yz\Theta \\ v(x, y, z) = xz\Theta \\ w(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \forall (x, y, z) \in \text{alla trave}$$

Vorrei far notare come il campo degli spostamenti

$$9.3) \quad \vec{S}(x, y, z) = \Theta z \hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j})$$

assomigli molto a un campo circolare, se non fosse per quella dipendenza dalla z nel primo termine del prodotto vettoriale. Questo fa di \vec{S} un campo vettoriale più complesso, che ho voluto studiare nella figura seguente (dove sono presenti riferimenti anche al sistema di deformazioni discusso nel seguito).



• **Deduzioni sulle deformazioni.** Avendo gli spostamenti ottenere le deformazioni è solo una questione di calcolo di derivate parziali. Ecco allora tale calcolo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{\partial yz\Theta}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial xz\Theta}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{\partial yz\Theta}{\partial y} + \frac{\partial xz\Theta}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{\partial yz\Theta}{\partial z} = -y\Theta \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial xz\Theta}{\partial z} = x\Theta\end{aligned}$$

Riassumendo

$$9.4) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = -y\Theta \\ \gamma_{yz} = x\Theta \end{cases} \quad \forall (x, y, z) \in \text{ alla trave}$$

• **Deduzioni sulle tensioni.** Ricavo ora le tensioni a partire dalle deformazioni, utilizzando le leggi di Hooke inverse **6.21**:

$$9.5) \quad \begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = -G\Theta y \\ \tau_{yz} = G\Theta x \end{cases} \quad \forall (x, y, z) \in \text{ alla trave}$$

• **Verifica della soluzione.** Adesso si deve verificare che la soluzione trovata in termini di tensioni e deformazioni (o, se si vuole, di tensioni e spostamenti), verifica il sistema dell'equilibrio elastico discusso nel paragrafo **6.11**. E ci basta verificare le equazioni 1,2,3 (equazioni indefinite dell'equilibrio), le equazioni 10,11,12 (equazioni al contorno per le tensioni) e la 13 (condizioni al contorno per gli spostamenti), essendo le leggi di Hooke verificate in quanto usate direttamente in quanto sopra. Per le equazioni indefinite dell'equilibrio meccanico si ha

$$\begin{aligned}1) \quad & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 = 0 \\ 2) \quad & \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 = 0 \quad \Leftarrow \text{Equazioni indefinite dell'equilibrio} \\ 3) \quad & \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Vediamo ora le condizioni al contorno per le tensioni. Mettiamoci sulla sezione in $z=l$ e calcoliamo il momento totale, rispetto al baricentro, delle tensioni interne sulla superficie interna di tale sezione:

$$\begin{aligned}\bar{M}_G^i &= \int_A \vec{i}(P, -\hat{k}) \times \overrightarrow{PG} dA = \int_A \begin{pmatrix} G\Theta y \\ -G\Theta x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ l \end{pmatrix} dA = \int_A \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ G\Theta y & -G\Theta x & 0 \\ -x & -y & l \end{vmatrix} dA = \\ &= -G\Theta \int_A \begin{pmatrix} xl \\ yl \\ y^2 + x^2 \end{pmatrix} dA = -G\Theta \begin{pmatrix} l \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \\ l \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \\ \int_A (y^2 + x^2) dA \end{pmatrix} = -G\Theta \begin{pmatrix} \frac{lR^2}{2} (\sin \alpha)_0^{2\pi} \\ \frac{lR^2}{2} (\cos \alpha)_0^{2\pi} \\ I_z \end{pmatrix} = -G\Theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

In definitiva si è trovato

$$\bar{M}_G^i = -G\Theta I_z \hat{k}$$

Imponendo la condizione al contorno si ha

$$\bar{M}_G^i + \bar{M} = 0 \Leftrightarrow -G\Theta I_z \hat{k} + M_z \hat{k} = 0 \Leftrightarrow G\Theta I_z = M_z$$

Per cui la soluzione trovata è valida purché sia

$$9.6) \quad \Theta = \frac{M_z}{GI_z}, \quad I_z = \pi R^2 \frac{R^2}{2}$$

Si osserva che se $M_z > 0$ allora anche $\Theta > 0$ e dunque anche $\theta(z) > 0, \forall z \in]0, l[$ il che è congruente con la nostra scelta di considerare positive le rotazioni antiorarie.

Per quanto riguarda la verifica delle condizioni al contorno per gli spostamenti, si consideri che abbiamo solo un vincolo di incastro alla estremità in $z=0$, dunque possiamo considerare verificata anche questa condizione. Con ciò la verifica della soluzione è completa.

• **Tensione massima.** Vediamo dove si registra la massima tensione e quanto vale. Considerando la generica giacitura e il generico punto della trave si ha

$$\vec{i}(P, \hat{n}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{M_z}{I_z} y \\ 0 & 0 & \frac{M_z}{I_z} x \\ -\frac{M_z}{I_z} y & \frac{M_z}{I_z} x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \frac{M_z}{I_z} \begin{pmatrix} -yn_z \\ xn_z \\ -yn_x + xn_y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|\vec{t}(P, \hat{n})| = \left| \frac{M_z}{I_z} \right| \sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + (-y n_x + x n_y)^2} = \left| \frac{M_z}{I_z} \right| \sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + y^2 n_x^2 + x^2 n_y^2 - 2x y n_x n_y}$$

Dobbiamo trovare ora il massimo di questa funzione in x, y, n_x, n_y, n_z vincolato dalle condizione

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \Leftrightarrow n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1 = 0$$

Usiamo allora il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e imponiamo l'annullamento del gradiente della funzione

$$\varphi(x, y, n_x, n_y, n_z, \lambda) = \sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + y^2 n_x^2 + x^2 n_y^2 - 2x y n_x n_y} - \lambda(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{x(n_z^2 + n_y^2) - y n_x n_y}{\sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + y^2 n_x^2 + x^2 n_y^2 - 2x y n_x n_y}} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{y(n_z^2 + n_x^2) - x n_x n_y}{\sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + y^2 n_x^2 + x^2 n_y^2 - 2x y n_x n_y}} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n_x} &= \frac{y^2 n_x - x y n_y}{\sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + y^2 n_x^2 + x^2 n_y^2 - 2x y n_x n_y}} - 2\lambda n_x = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} &= \frac{x^2 n_y - x y n_x}{\sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + y^2 n_x^2 + x^2 n_y^2 - 2x y n_x n_y}} - 2\lambda n_y = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n_z} &= \frac{x^2 n_z}{\sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + y^2 n_x^2 + x^2 n_y^2 - 2x y n_x n_y}} - 2\lambda n_z = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} &= -(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Riscrivendo la 3°, la 4° e la 5° ho

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{y^2 n_x - x y n_y}{2n_x \sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + y^2 n_x^2 + x^2 n_y^2 - 2x y n_x n_y}} \\ \lambda &= \frac{x^2 n_y - x y n_x}{2n_y \sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + y^2 n_x^2 + x^2 n_y^2 - 2x y n_x n_y}} \\ \lambda &= \frac{x^2 n_z}{2n_z \sqrt{y^2 n_z^2 + x^2 n_z^2 + y^2 n_x^2 + x^2 n_y^2 - 2x y n_x n_y}} \end{aligned}$$

Confrontandole a due a due si ha

$$y^2 n_x n_y - x y n_y^2 = x^2 n_x n_y - x y n_x^2$$

$$y^2 n_x n_z - x y n_y n_z = x^2 n_x n_z$$

$$x y n_x n_z = 0 \Leftrightarrow n_x n_z = 0 \quad \leftarrow \text{ a causa della simmetria assiale del problema}$$

E il sistema di equazioni si riscrive

$$x(n_z^2 + n_y^2) - y n_x n_y = 0$$

$$y(n_z^2 + n_x^2) - x n_x n_y = 0$$

$$y^2 n_x n_y - x y n_y^2 = x^2 n_x n_y - x y n_x^2$$

$$n_y n_z = 0$$

$$n_x n_z = 0$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1 = 0$$

Si hanno allora le due possibilità $n_x = n_y = 0$ oppure $n_z = 0$. Considerando la prima si ha

$$x = 0 \quad y = 0 \quad n_x = n_y = 0 \quad n_z = 1$$

Ma per $n_x = n_y = 0$ risulta che il punto $x = y = 0$ è un punto estremo di minimo. Ed essendo, in tale giacitura, la tensione data da

$$\vec{t}(P, \hat{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{M_z}{I_z} y \\ 0 & 0 & \frac{M_z}{I_z} x \\ -\frac{M_z}{I_z} y & \frac{M_z}{I_z} x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{M_z}{I_z} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{t}(P, \hat{k})| = \frac{|M_z|}{I_z} \sqrt{x^2 + y^2}$$

se ne conclude che la **tensione massima si ha nelle giaciture parallele all'asse geometrico, è tutta tangenziale e vale**

$$9.7) \quad \tau_{MAX} = \frac{|M_z|}{I_z} R$$

• **Lavoro di deformazione.** Uso questa volta, per il calcolo del lavoro di deformazione, l'espressione **6.10** del potenziale elastico. Ho

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon_{ij}) &= G \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + 2G \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) = \\ &= \frac{G}{2} (\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) = \frac{G}{2} \left(\frac{M_z^2}{G^2 I_z^2} y^2 + \frac{M_z^2}{G^2 I_z^2} x^2 \right) = \frac{M_z^2}{2GI_z^2} (y^2 + x^2) \end{aligned}$$

Questo è il lavoro di deformazione per unità di volume; integrando sul volume della trave si ha:

$$L_i = \frac{M_z^2}{2GI_z^2} \int_V (y^2 + x^2) dV = \frac{M_z^2}{2GI_z^2} \int_0^l \int_0^R \int_0^{2\pi} (\rho^2 \cos^2 \alpha + \rho^2 \sin^2 \alpha) \rho d\alpha d\rho dz = \frac{M_z^2 l}{2GI_z^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 d\alpha d\rho =$$

$$= \frac{M_z^2 l}{2GI_z^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 d\alpha d\rho = \frac{M_z^2 l 2\pi}{2GI_z^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{M_z^2 l \pi R^4}{GI_z^2 \cdot 4} = \frac{M_z^2 l}{GI_z^2} \pi R^2 \frac{R^2}{2} \frac{1}{2} = \frac{M_z^2 l}{GI_z^2} I_z \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 l}{GI_z}$$

Torsione per sezioni circolari	
Sollecitazione	
Su ciascuna sezione agisce una coppia con piano coincidente con quello della sezione stessa. I due momenti sono dunque paralleli all'asse geometrico della trave.	
Stato tensionale	
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad \tau_{zx} = -\frac{M_z}{I_z} y \quad \tau_{zy} = \frac{M_z}{I_z} x$	
Massima tensione	
La tensione massima si ha nelle giaciture parallele all'asse geometrico, è tutta tangenziale e vale	
$\tau_{\max} = \frac{ M_z }{I_z} R$	
Spostamenti	
$u = -\frac{M_z}{GI_z} yz \quad v = \frac{M_z}{GI_z} xz \quad w = 0$	
Deformazioni	
$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = -\frac{M_z}{GI_z} y \quad \gamma_{zy} = \frac{M_z}{GI_z} x$	
Angolo di torsione	
$\theta(z) = \Theta z = \frac{M_z}{GI_z} z \text{ (radianti)}$	
Sono considerate positive le rotazioni antiorarie rispetto all'asse z	
Lavoro di deformazione della trave	
$L = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 l}{I_z G}$	
Significato dei simboli	
I_z : momento centrale di inerzia della generica sezione della trave rispetto all'asse centrale di inerzia z	

Momento di inerzia utile della sezione
$I_z = \pi R^2 \frac{R^2}{2}$

9.2. Torsione per sezioni qualunque. Abbandoniamo l'ipotesi restrittiva che la sezione sia circolare e cerchiamo la soluzione del problema elastico.

• **Ipotesi sul campo degli spostamenti.** Procedo con il metodo seminverso di soluzione, ipotizzando la soluzione in termini di spostamenti. Faccio le seguenti due ipotesi:

- detta $\theta = \theta(z)$ la funzione la quale fornisce l'angolo di rotazione della sezione in z , intorno all'asse z stesso, rispetto alla sezione in $z = 0$ (che si assume, come al solito, fissa rispetto al sistema di riferimento), allora ipotizzo che sia

$$9.8) \quad \theta(z) = \Theta z, \quad z \in [0, l]$$

dove Θ è una costante reale e dove **si assumono positive le rotazioni antiorarie** (rispetto all'asse z);

- se la sezione non è circolare mi attendo che la sezione si 'ingobbi' almeno un po', ovvero mi attendo che lo spostamento lungo la direzione dell'asse geometrico non sia nullo e in particolare ipotizzo

$$9.9) \quad w(x, y, z) = \Theta f(x, y), \quad \forall x, y, z \in \Omega$$

cioè ipotizzo che l'accartocciamento sia il medesimo per ciascuna sezione della trave.

Nella **9.9** si è messo in evidenza la costante Θ perché nel seguito della trattazione questo semplifica i calcoli. La funzione in **9.9** è anche detta **funzione di ingobbamento**.

• **Deduzioni sugli spostamenti.** Ragionando come nel caso della torsione per travi a sezione circolare (vedi formula **9.2**) e considerando inoltre la **9.9** abbiamo

$$9.10) \quad \begin{cases} u(x, y, z) = -yz\Theta \\ v(x, y, z) = xz\Theta \\ w(x, y, z) = \Theta f(x, y) \end{cases} \quad \forall (x, y, z) \in \text{alla trave}$$

• **Deduzioni sulle deformazioni.** Per derivazione delle **9.10** abbiamo

$$9.11) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z\Theta + z\Theta = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -y\Theta + \Theta \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = x\Theta + \Theta \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{cases}$$

• **Deduzioni sulle tensioni.** Ricavo ora le tensioni a partire dalle deformazioni, utilizzando le leggi di Hooke inverse **6.21**:

$$9.12) \begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = G\Theta \left(-y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = G\Theta \left(x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \end{cases}$$

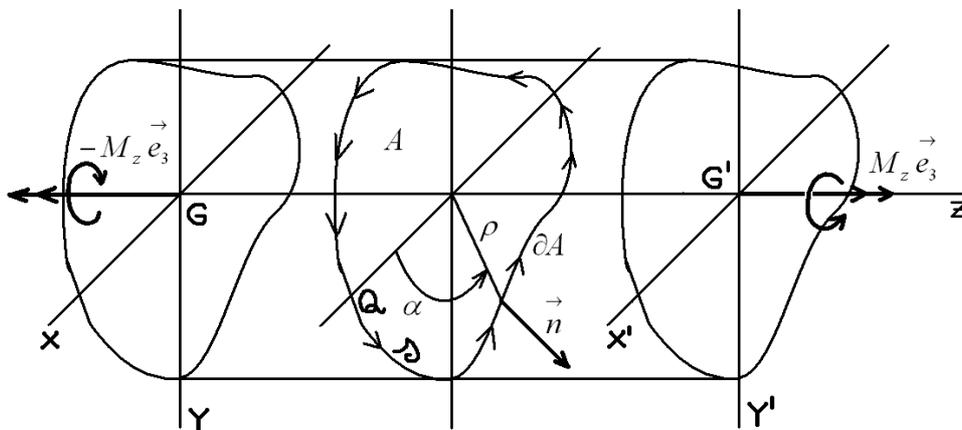
• **Verifica delle equazioni indefinite dell'equilibrio.** Intanto vediamo se la soluzione **9.21** ha una forma tale da soddisfare le equazioni indefinite dell'equilibrio. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 + 0 + 0 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 + 0 + 0 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= G\Theta \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

Dunque le equazioni indefinite dell'equilibrio sono soddisfatte se e solo se la funzione di ingobbamento soddisfa la relativa **equazione di Laplace**¹

$$9.13) \quad \nabla^2 f(x, y) = 0$$

Una cosa interessante da notare è che una funzione che risolva la **9.13** è una cosiddetta **funzione armonica**, caratterizzata dal fatto di assumere i valori massimi e minimi sulla frontiera del suo insieme di definizione (vedi ad esempio Fusco-Marcellini-Sbordone, Analisi Matematica due, pag. 212). Questo ci fornisce una prima idea del tipo di ingobbamento subito dalle sezioni.



• **Verifica delle condizioni al contorno sulla superficie laterale.** Sulla superficie laterale, per le ipotesi stesse del Saint Venant (ipotesi **8.5**) non abbiamo nessuna sollecitazione esterna. Ma allora

¹ Nel caso più generale in cui a secondo membro della **9.13** si abbia una funzione (eventualmente anche costante) si parla di **equazione di Poisson**.

sulla faccia interna della superficie esterna debbono annullarsi le tensioni interne del solido. Dobbiamo cioè avere

$$\begin{aligned} \bar{t}(P, -\hat{n}(P)) = 0 &\Leftrightarrow -\bar{t}(P, \hat{n}(P)) = 0 \Leftrightarrow \bar{t}(P, \hat{n}(P)) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow G\Theta &\begin{pmatrix} 0 & 0 & \left(-y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) \\ 0 & 0 & \left(x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) \\ \left(-y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) & \left(x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(-y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)n_x + \left(x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)n_y = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$9.14) \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}n_x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}n_y = yn_x - xn_y$$

Dove si intende che la funzione $\hat{n} = \hat{n}(P)$ fornisce, punto per punto, il versore normale alla superficie laterale della trave. Per scrivere in maniera più espressiva questa relazione consideriamo la frontiera della generica sezione, cioè la ∂A indicata in figura. Introdotto un sistema di coordinate polari e detta γ la curva che descrive ∂A abbiamo

$$\gamma: \begin{cases} x = x(\alpha) = \rho(\alpha)\cos\alpha \\ y = y(\alpha) = \rho(\alpha)\sin\alpha \end{cases}$$

e dunque il versore tangente, punto per punto, alla frontiera della sezione si scrive

$$\hat{t} = \frac{\dot{x}(\alpha)\hat{i} + \dot{y}(\alpha)\hat{j}}{\sqrt{\left(\dot{x}(\alpha)\right)^2 + \left(\dot{y}(\alpha)\right)^2}}$$

e in definitiva il versore normale, ciò che ci interessa, si scrive

$$9.15) \quad \hat{n} = \frac{\dot{y}(\alpha)\hat{j} - \dot{x}(\alpha)\hat{i}}{\sqrt{\left(\dot{x}(\alpha)\right)^2 + \left(\dot{y}(\alpha)\right)^2}}$$

Dunque sostituendo la **9.15** nella **9.14** abbiamo

$$9.16) \quad \bar{\nabla}f(x, y) \cdot \hat{n} = \frac{y\dot{y}(\alpha) + x\dot{x}(\alpha)}{\sqrt{\left(\dot{x}(\alpha)\right)^2 + \left(\dot{y}(\alpha)\right)^2}}$$

Allo scopo di scrivere la **9.16** in maniera più compatta si consideri che

$$\rho^2(\alpha) = x(\alpha)^2 + y(\alpha)^2 \quad s(\alpha) = \int_0^\alpha \sqrt{\left(\dot{x}(\alpha)\right)^2 + \left(\dot{y}(\alpha)\right)^2} d\alpha$$

dove si intende che $s = s(\alpha)$ è un sistema di ascissa curvilinea. Allora riprendendo la **9.16** si ha

$$\vec{\nabla}f(x, y) \cdot \hat{n} = \frac{y \dot{y}(\alpha) + x \dot{x}(\alpha)}{\sqrt{\left(\dot{x}(\alpha)\right)^2 + \left(\dot{y}(\alpha)\right)^2}} = \frac{1}{2} \frac{d(x(\alpha)^2 + y(\alpha)^2)/d\alpha}{\sqrt{\left(\dot{x}(\alpha)\right)^2 + \left(\dot{y}(\alpha)\right)^2}} = \frac{1}{2} \frac{d\rho^2(\alpha)/d\alpha}{ds(\alpha)/d\alpha} = \rho(\alpha) \frac{d\rho(\alpha)/d\alpha}{ds(\alpha)/d\alpha}$$

Considerando ora la funzione inversa $\alpha = s^{-1}(s) = \alpha(s)$ e ricordando che la derivata di una funzione è pari alla derivata della sua inversa alla meno uno, allora

$$\vec{\nabla}f(x, y) \cdot \hat{n} = \rho(\alpha) \frac{d\rho(\alpha)/d\alpha}{ds(\alpha)/d\alpha} = \rho(\alpha) \frac{d\rho(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha(s)}{ds}$$

Considerando poi la funzione composta $\rho(s) = \rho(\alpha(s))$ e ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte perveniamo alla conclusione che **le condizioni ai limiti per le tensioni relative al mantello della trave si traducono nella seguente condizione per la funzione di ingobbamento:**

$$9.17) \quad \vec{\nabla}f(x, y) \cdot \hat{n} = \rho(s) \frac{d\rho(s)}{ds}$$

• **Tutte le condizioni per la funzione di ingobbamento: problema di Neumann.** Adesso riassumo le condizioni che deve verificare la funzione di ingobbamento affinché la soluzione **9.10** verifichi il problema elastico in esame. La verifica delle equazioni indefinite dell'equilibrio elastico si traduce nella **9.13**, mentre la verifica delle condizioni ai limiti per le tensioni sul mantello della trave si traduce nella **9.17**. Dunque si conclude che la funzione di ingobbamento deve risolvere il problema

$$9.18) \quad \begin{cases} \nabla^2 f(x, y) = 0 & \forall (x, y) \in A \\ \vec{\nabla}f \cdot \hat{n} = \rho(s) \frac{d\rho(s)}{ds} & \forall P \in \partial A \end{cases}$$

Abbiamo dunque una equazione di Laplace con condizioni al contorno sulla derivata direzionale, lungo la direzione normale. Questo genere di problema è detto **problema di Neumann**².

La prima cosa da considerare adesso è vedere se le due equazioni che debbono essere soddisfatte sono compatibili. Poiché il teorema della divergenza ci dice che

$$\int_\gamma \vec{\nabla}f \cdot \hat{n} ds = \int_A \nabla^2 f dA$$

allora condizione **necessaria** affinché la **9.18** sia verificata è che risulti

² Nel caso in cui la condizione al contorno non fosse stata sulla derivata direzionale ma sulla funzione stessa, allora avremmo avuto quello che si chiama un **problema di Dirichlet**.

$$9.19) \int_{\gamma} \vec{\nabla} f \cdot \hat{n} ds = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma} \rho(s) \frac{d\rho(s)}{ds} ds = 0$$

D'altra parte si ha

$$\int_{\gamma} \rho(s) \frac{d\rho(s)}{ds} ds = \int_{\gamma} \rho(s) \frac{d\rho(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha(s)}{ds} ds = \int_0^{2\pi} \rho(\alpha) \frac{d\rho(\alpha)}{d\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\rho^2(\alpha)}{d\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} \rho^2(\alpha) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Dunque la **9.19** è verificata. Se così non fosse stato allora in nessun caso il problema **9.18** avrebbe ammesso soluzione. **Ma allora, dalla Analisi Matematica, sappiamo che il problema di Neumann è risolubile e la sua soluzione è unica.** Per ulteriori approfondimenti in merito si rimanda a testi specializzati.

• **Verifica delle condizioni al contorno sulle sezioni estreme.** Vediamo adesso se la soluzione proposta **9.12** è in grado di soddisfare le condizioni al contorno relative alle sezioni estreme. In pratica, considerata la sezione in $z = l$, dobbiamo provare che le tensioni interne agenti sulla faccia interna della sezione stessa diano luogo a una sollecitazione ridotta che sia equivalente alla coppia torcente cambiata di segno. Studiamo allora prima la risultante delle tensioni interne e poi il momento risultante, calcolato rispetto al baricentro della sezione.

- Il calcolo della risultante porge³

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_A \vec{t}(x, y; -\hat{n}) dA = -G\Theta \int_A \begin{pmatrix} 0 & 0 & -y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ 0 & 0 & x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ -y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \\ &= -G\Theta \int_A \begin{pmatrix} -y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} dA = -G\Theta \begin{pmatrix} -\int_A y dA + \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dA \\ \int_A x dA + \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dA \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= -G\Theta \begin{pmatrix} -Ay_G + \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dA \\ Ax_G + \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dA \\ 0 \end{pmatrix} = -G\Theta \begin{pmatrix} \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dA \\ \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dA \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ricordo ora le formule di Gauss-Green per le quali

³ In questi passaggi si chiarisce per quale motivo nella **9.9** si è messa in evidenza la costante Θ : in questo modo è possibile avere delle formule più semplici e chiare.

$$\int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dA = \int_{\partial A} f(x, y) dy \quad \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dA = - \int_{\partial A} f(x, y) dx$$

Si consideri ora che gli integrali a secondo membro sono integrali di forme differenziali esatte calcolati su curve chiuse: essi sono pertanto nulli. Le forme differenziali integrande sono esatte in quanto la funzione $f(x, y)$ si presume continua e dunque, per il teorema di Torricelli-Barrow ('teorema fondamentale del calcolo integrale'), ammette primitiva. In conclusione abbiamo trovato allora $\vec{F} = 0$, il che rispetta la condizione ai limiti (per le tensioni) sulle sezioni estreme.

- Il calcolo del momento risultante rispetto al baricentro porge

$$\begin{aligned} \bar{M}(G) &= \int_A \vec{r}(P; -\hat{n}) \times \overline{PG} dA = \\ &= -G\Theta \int_A \begin{pmatrix} 0 & 0 & -y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ 0 & 0 & x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ -y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} dA = \\ &= G\Theta \int_A \begin{pmatrix} -y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} dA = G\Theta \int_A \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -y + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} & 0 \\ x & y & 0 \end{pmatrix} dA = \\ &= G\Theta \int_A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y^2 + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} y - x^2 - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} x \end{pmatrix} dA = \\ &= G\Theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \int_A \left(-y^2 + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} y - x^2 - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} x \right) dA \end{pmatrix} = \\ &= G\Theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\int_A (x^2 + y^2) dA + \int_A \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} y - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} x \right) dA \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= G\Theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_z + \int_A \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} y - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} x \right) dA \end{pmatrix}$$

Abbiamo dunque trovato

$$\begin{aligned} 9.20) \quad \bar{M}(G) &= -G\Theta \left(I_z - \int_A \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} y - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} x \right) dA \right) \hat{k} = \\ &= -G\Theta \left(I_z + \int_A \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} x - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} y \right) dA \right) \hat{k} \end{aligned}$$

In definitiva la condizione ai limiti sulle tensioni relativa alle sezione estreme si riduce alla

$$9.21) \quad G\Theta \left(I_z + \int_A \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} x - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} y \right) dA \right) = M_z$$

che, definendo come **fattore torsionale di rigidezza** l'integrando della 9.20

$$9.22) \quad J_t \stackrel{\Delta}{=} I_z + \int_A \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} x - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} y \right) dA$$

si riscrive come

$$9.23) \quad G\Theta J_t = M_z$$

da cui si ricava

$$9.24) \quad \Theta = M_z / GJ_t$$

Si deve osservare che **il fattore torsionale di rigidezza dipende esclusivamente dalla forma della sezione**: infatti la funzione f dipende essa stessa esclusivamente dalla forma della sezione, come si evince dalle condizioni **9.18**, per cui il secondo membro della **9.22** risulta completamente definito allorché sia definita la forma della sezione.

Si possono poi fare le seguenti ulteriori osservazioni:

- a parità del resto Θ è direttamente proporzionale al momento applicato, cosa molto comprensibile se si pensa alla **9.8**;
- a parità del resto Θ è inversamente proporzionale al modulo G , cosa altrettanto comprensibile, se si considera che il modulo di elasticità tangenziale è tanto maggiore quanto maggiore è la resistenza che il materiale offre alle deformazioni di scorrimento;

- a parità del resto Θ è inversamente proporzionale al fattore torsionale di rigidezza J_t , ma questo richiede alcune considerazioni aggiuntive.

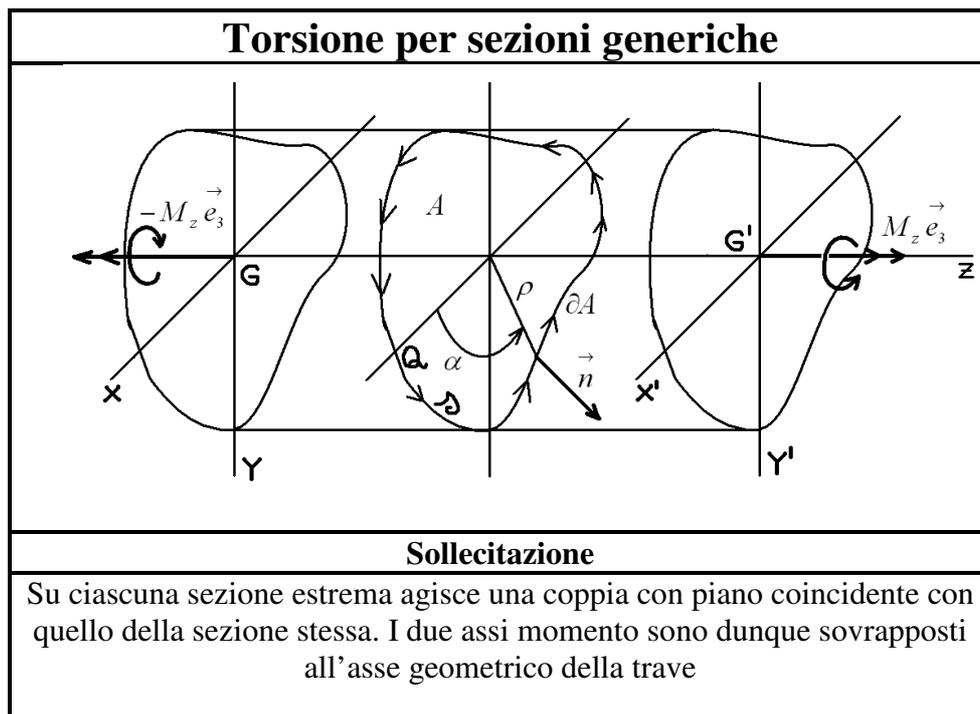
Il primo addendo del fattore torsionale di rigidezza è il momento polare di inerzia della sezione: dunque è comprensibile che all'aumentare di questo, la rotazione della sezione generica intorno all'asse geometrico della trave sarà più difficoltosa, cioè decrescerà Θ .

Il secondo addendo risulta essere l'integrale, sulla sezione, del prodotto scalare fra il gradiente della funzione di ingobbamento e il vettore $(-x, y) \perp \overrightarrow{GP}$: in qualche modo, non immediatamente comprensibile, questo integrale è una misura della capacità della sezione di ingobbarsi, ovvero di assorbire energia elastica nel suo ingobbamento. È evidente che maggiore è la facilità con la quale la sezione si ingobba, maggiore è la frazione di energia fornita dalla coppia che viene assorbita dall'ingobbamento a discapito della rotazione, ovvero di Θ . E dunque Θ decresce al crescere di J_t . Ma per capire meglio come J_t (in particolare il suo secondo addendo) possa indicare la capacità della sezione di assorbire energia nell'ingobbamento è opportuno approfondire le considerazioni energetiche...

• **Lavoro di deformazione.** Utilizzando il teorema di Clapeyron abbiamo che il lavoro di deformazione fatto dalla coppia torcente vale

$$9.25) \quad L_e = \frac{1}{2} \vec{M} \cdot \theta(z=l) \hat{k} = \frac{1}{2} M_z \Theta l = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{J_t G} l$$

Esaminando gli ultimi due membri vediamo che, a parità di lavoro speso dalla sollecitazione esterna (ovvero di energia elastica immagazzinata dal solido) l'aumento di J_t comporta che si abbia una coppia più forte (ultimo membro) ovvero che Θ (e dunque la rotazione della sezione estrema) sia più piccolo (penultimo membro). Dunque effettivamente **il fattore torsionale di rigidezza è tanto maggiore quanto maggiore è la tendenza della sezione a assorbire energia per ingobbarsi piuttosto che per ruotare.**



Stato tensionale
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad \tau_{xz} = \frac{M_z}{J_t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right) \quad \tau_{yz} = \frac{M_z}{J_t} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right)$
Spostamenti
$u = -\frac{M_z}{GJ_t} yz \quad v = \frac{M_z}{GJ_t} xz \quad w = \frac{M_z}{GJ_t} f(x, y)$
Deformazioni
$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{xz} = \frac{M_z}{GJ_t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right) \quad \gamma_{yz} = \frac{M_z}{GJ_t} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right)$
Funzione di ingobbamento
E' la funzione $f : A \rightarrow R, (x, y) \mapsto f(x, y)$ che risolve il problema di Neumann
$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0 \quad \text{in } A; \quad \vec{\nabla} f \cdot \vec{n} = \rho \frac{d\rho}{ds} \quad \text{in } \partial A$
La funzione di ingobbamento è indipendente dalla sezione che si considera; dipende esclusivamente dalla forma della sezione
Angolo di torsione
$\theta(z) = \Theta z$ (radianti)
$\Theta = \frac{M_z}{GJ_t}$ (angolo di rotazione per unità di lunghezza, in radianti/metro)
Fattore torsionale di rigidezza
$J_t = I_z + \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial y} x - \frac{\partial f}{\partial x} y \right) dA$
Il fattore torsionale di rigidezza dipende solo dalla forma della sezione; è proporzionale alla tendenza della sezione ad assorbire energia elastica nell'ingobbamento piuttosto che nella rotazione.
Lavoro di deformazione della trave
$L = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 l}{I_z G}$
Significato dei simboli
I_z : momento centrale di inerzia della sezione rispetto la direzione ortogonale alla sezione stessa (asse z)
l : lunghezza complessiva della trave

9.3. Funzione delle tensioni. Per avere la soluzione completa della torsione, per travi di sezione qualunque, abbiamo visto che si deve risolvere il problema di Neumann

$$9.26) \begin{cases} \nabla^2 f(x, y) = 0 & \forall (x, y) \in A \\ \vec{\nabla} f \cdot \hat{n} = \rho(s) \frac{d\rho(s)}{ds} & \forall P \in \partial A \end{cases}$$

Come si vede le condizioni al contorno sono piuttosto poco agevoli da imporre. Questo suggerisce di spostarsi sulla ricerca di una qualche funzione F , legata in qualche modo alla funzione di ingobbamento, per la quale le condizioni al contorno diventino di più agevole imposizione. Ebbene se definiamo F attraverso le posizioni⁴

$$9.27) \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \stackrel{\Delta}{=} \tau_{xz} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \stackrel{\Delta}{=} -\tau_{yz}$$

e se consideriamo che per le **9.12** risulta in particolare

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G\Theta} + y \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G\Theta} - x$$

otteniamo per le funzioni F, f il legame

$$9.28) \quad \begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + y \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - x \end{cases}$$

Se sostituisco ora le **9.28** nella equazione di Laplace in **9.26** ottengo una identità (per il teorema sulle derivate miste). Questo a causa della forma delle **9.28**. Ma proprio per il teorema sulle derivate miste si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + y \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(-\frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - x \right)}{\partial x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{G\Theta} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + 1 = -\frac{1}{G\Theta} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} - 1 \end{aligned}$$

Otteniamo così come condizione per F l'equazione di Poisson

$$9.29) \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = -2G\Theta$$

Dobbiamo ora vedere quali sono le condizioni al contorno, cioè sul bordo della generica sezione. Ricordo che il nostro obiettivo è quello di avere un problema con condizioni al contorno meno ostiche rispetto a quelle del problema di Neumann **9.26**. A tale riguardo si ricordi che le condizioni al contorno per le tensioni sul mantello impongono che sia

⁴ La logica di queste due posizioni apparirà chiara nello sviluppo delle argomentazioni.

$$\vec{t}(P, -\hat{n}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0, \quad \forall P \in \partial A$$

Dunque, sostituendo le **9.27** abbiamo la condizione al contorno

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} n_x - \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} n_y = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} F(x, y) \cdot \hat{t} = 0, \quad \forall P \in \partial A$$

dove si intende che \hat{t} è il versore tangente punto per punto a ∂A . Dunque la funzione F deve essere costante in tutta ∂A . Poiché poi tale valore costante non ci interessa (a noi interessano le tensioni nelle quali, secondo le **9.27**, tale valore costante è annullato dalla derivazione) imponiamo che la costante sia proprio zero. In tal modo si ottiene la semplice condizione al contorno

$$9.30) \quad F(x, y) = 0, \quad \forall P \in \partial A$$

Dunque mettendo assieme le **9.29** e **9.30** otteniamo il problema di Dirichlet

$$9.31) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = -2G\Theta, & \forall P \in A \\ F(x, y) = 0, & \forall P \in \partial A \end{cases}$$

che va a sostituire il problema di Neumann **9.26**. La funzione che lo risolve prende il nome, in virtù delle **9.27**, di **funzione delle tensioni**. Il problema di Neumann ammette soluzione e la soluzione è unica (vedi ad esempio Fusco-Marcellini-Sbordone, *Analisi Matematica due*, pag. 214). Una volta ricavata la funzione delle tensioni è immediato ricavare le tensioni grazie alle **9.27**. Per quanto riguarda il fattore torsionale di rigidezza, in base alla **9.22** e alle **9.28**, si ha

$$\begin{aligned} J_t &= I_z + \int_A \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} x - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} y \right) dA = I_z + \int_A \left(-\frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} x - x^2 - \frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} y - y^2 \right) dA = \\ &= I_z - \int_A (x^2 + y^2) dA - \frac{1}{G\Theta} \int_A \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} y \right) dA = \\ &= I_z - I_z - \frac{1}{G\Theta} \int_A \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} y \right) dA = -\frac{1}{G\Theta} \int_A \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} y \right) dA = \\ &= -\frac{1}{G\Theta} \int_A \left(\frac{\partial x F}{\partial x} - F + \frac{\partial y F}{\partial y} - F \right) dA = -\frac{1}{G\Theta} \int_A \left(\frac{\partial x F}{\partial x} + \frac{\partial y F}{\partial y} \right) dA + \frac{2}{G\Theta} \int_A F dA = \\ &= (\text{teorema della divergenza}) - \frac{1}{G\Theta} \int_{\partial A} (x F n_x + y F n_y) dA + \frac{2}{G\Theta} \int_A F dA \end{aligned}$$

Poiché la funzione delle tensioni deve essere nulla in ogni punto di ∂A abbiamo in conclusione

$$9.32) \quad J_t = \frac{2}{G\Theta} \int_A F(x, y) dA$$

Questa espressione è in funzione di Θ , tuttavia l'espressione della funzione delle tensioni è (per via della equazione di Poisson che deve soddisfare) il prodotto di una funzione per Θ stesso, il quale dunque si semplifica.

Dovendo valere poi anche 9.24 per la quale $\Theta = M_z / GJ_t$, si ricava lo stesso Θ .

Per le deformazioni si ha poi immediatamente, dalle 9.11, che

$$9.33) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \frac{\partial F}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = -\frac{1}{G} \frac{\partial F}{\partial x} \end{cases}$$

Per avere gli spostamenti è invece necessario ricavare la funzione di ingobbamento attraverso l'integrazione delle 9.28.

Funzione delle tensioni	
Definizione	
Definisco funzione delle tensioni la funzione $F : A \rightarrow R, (x, y) \mapsto F(x, y)$ attraverso le posizioni	
$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \stackrel{\Delta}{=} \tau_{xz} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \stackrel{\Delta}{=} -\tau_{yz}$	
che comportano il seguente legame con la funzione di ingobbamento	
$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + y \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = G\Theta \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - y \right) \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = -G\Theta \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + x \right) \end{cases}$	
Problema di Dirichlet	
In termini di funzione delle tensioni il problema della torsione si traduce nel problema di Dirichlet seguente	
$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} = -2G\Theta \quad \text{in } A; \quad F(x, y) = 0 \quad \text{in } \partial A$	
Si osserva che sebbene l'equazione differenziale della funzione delle tensioni sia più complessa di quella della funzione di ingobbamento, tuttavia le condizioni al contorno sono semplificate.	
Stato tensionale	
Si trova che lo stato tensionale è esprimibile per mezzo della funzione delle tensioni essendo	
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}$	

Deformazioni
$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \frac{\partial F}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = -\frac{1}{G} \frac{\partial F}{\partial x}$
Fattore torsionale di rigidezza
$J_t = \frac{2}{G\Theta} \int_A F(x, y) dA$
La costante Θ si semplifica essendo F il prodotto di una funzione per Θ stesso.
Angolo di torsione
$\theta(z) = \Theta z$ (radianti)
$\Theta = \frac{M_z}{GJ_t}$ (angolo di rotazione per unità di lunghezza, in radianti)
Funzione di ingobbamento
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F}{\partial y} + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F}{\partial x} - x$
La costante Θ si semplifica essendo F il prodotto di una funzione per Θ stesso.
Spostamenti
$u = -\frac{M_z}{GJ_t} yz \quad v = \frac{M_z}{GJ_t} xz \quad w = \frac{M_z}{GJ_t} f(x, y)$
Vanno calcolati dopo aver ricavato la funzione di ingobbamento (per integrazione della funzione delle tensioni).

9.4. Analogia della membrana. Si è visto come l'introduzione della funzione delle tensioni attraverso le posizioni 9.28 permetta di trasformare il problema della torsione per sezioni generiche da un problema di Neumann, caratterizzato da condizioni al contorno sulla derivata direzionale della funzione incognita, a un problema di Dirichlet, caratterizzato da condizioni al contorno molto più maneggevoli.

Ma l'introduzione della funzione delle tensioni comporta un altro significativo quanto inaspettato vantaggio. Consideriamo infatti di stendere su un telaio coincidente con il bordo della generica sezione della trave una membrana omogenea e diciamo che tale membrana sia soggetta alla forza peso supposta diretta come l'asse z (vedi figura). Se indico con la funzione $z = F(x, y)$ lo spostamento che subisce il punto (x, y) della membrana lungo l'asse z , si dimostra⁵ allora che il bilancio meccanico della membrana equivale alla condizione

$$\nabla^2 F(x, y) = -\frac{p}{T} \quad \forall (x, y) \in A$$

⁵ Per la dimostrazione si rimanda a Capurso, Lezioni di Scienza delle costruzioni, pag. 323; oppure alla appendice di questo testo.

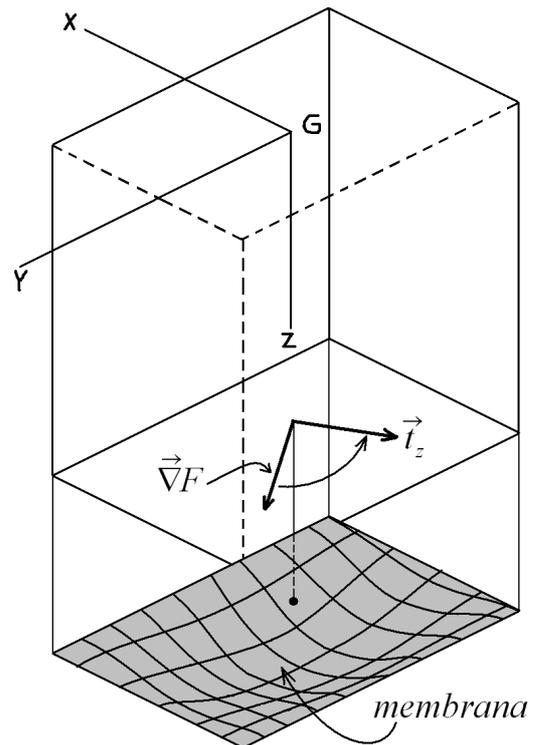
essendo p la forza peso per unità di superficie della membrana e T la tensione che agisce su un bordo di lunghezza unitaria, ovunque si immagini di tagliare la membrana. Inoltre deve essere, per come abbiamo impostato il problema, verificata la condizione ai limiti

$$F(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial A$$

Dunque la funzione che descrive la superficie della membrana coincide, a meno di un fattore moltiplicativo costante, con la funzione delle tensioni della sezione.

Ma la forma assunta da una membrana sottoposta al proprio peso si può intuire qualitativamente, dunque si può intuire qualitativamente il valore del gradiente di F per ogni punto della generica sezione della trave, dunque posso intuire qualitativamente il valore della tensione in ogni punto della sezione. Si fa più precisamente il seguente ragionamento:

- il vettore $\vec{\nabla}F$ indica la direzione e il verso lungo i quali la membrana ‘risale’ le z ; il vettore \vec{t} si ottiene ruotando in senso antiorario il gradiente, e dunque resta determinato (qualitativamente) in direzione e verso;
- il vettore $\vec{\nabla}F$ è tanto più inteso quanto più rapidamente la membrana ‘risale’ le z ; il vettore \vec{t} ha lo stesso modulo del gradiente e dunque resta determinato (qualitativamente) dal punto di vista del modulo.



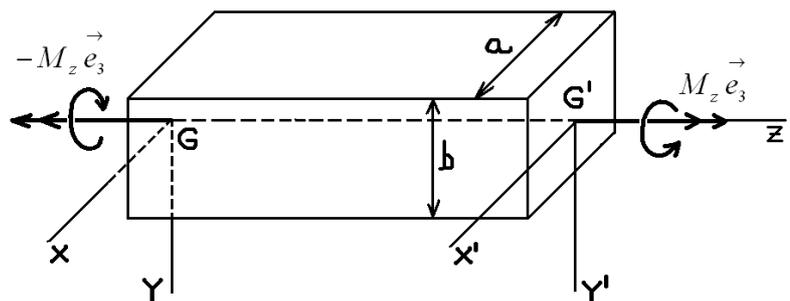
L'affermazione che \vec{t} si ottenga per rotazione antioraria di $\vec{\nabla}F$ è di immediata constatazione: intanto i due vettori hanno lo stesso modulo per le posizioni 9.27; inoltre si ha

$$\vec{\nabla}F \times \vec{t} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & 0 \\ t_x & t_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \tau_{zy} & -\tau_{zx} & 0 \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{pmatrix} = (\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2) \hat{k}$$

e dunque appunto \vec{t} è la rotazione antioraria (rispetto all'asse z) di $\vec{\nabla}F$.

9.5. Torsione per travi a sezione rettangolare.

Ho sperato di trovare, per le travi a sezione rettangolare, la soluzione esatta, ma non ci sono riuscito. In particolare mi sono cimentato sia con il problema di Neumann 9.18 che con il problema di Dirichlet 9.31, procedendo con il metodo della separazione delle variabili e



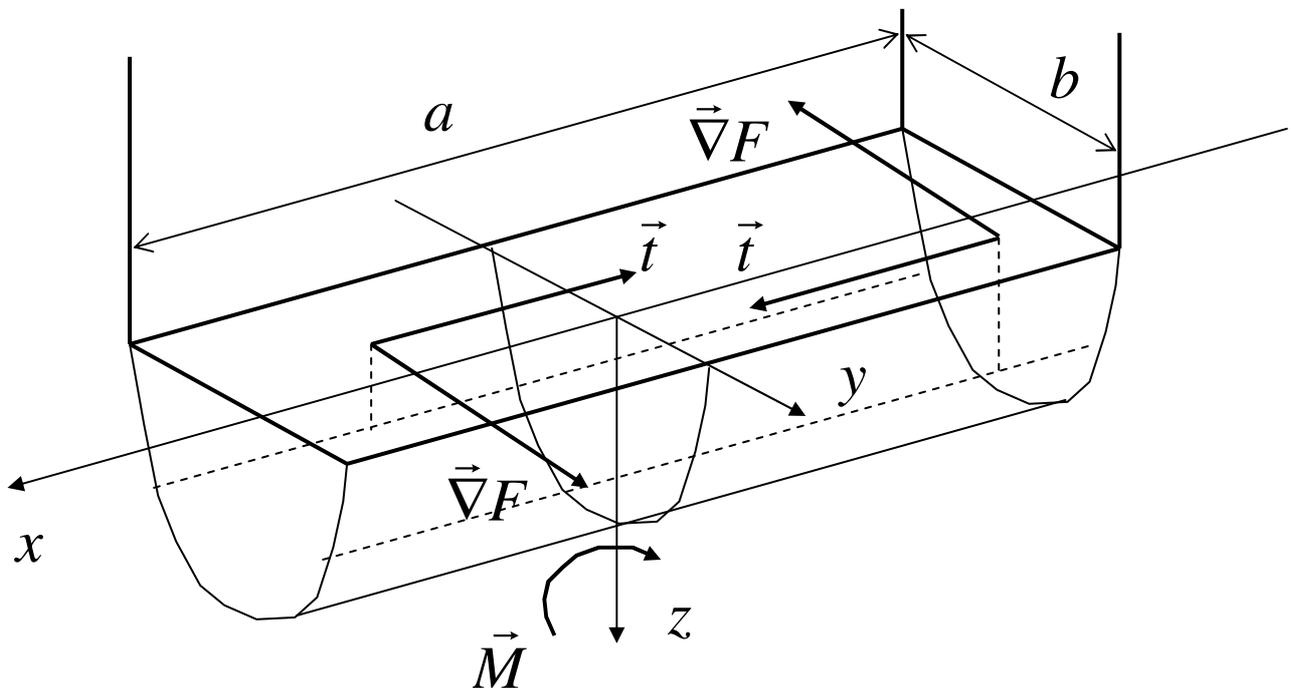
proseguendo poi con i metodi della Analisi di Fourier.

Propongo allora due soluzioni approssimate: la prima, molto semplice, tanto più affidabile quanto più allungata è la sezione della trave; la seconda, un po' meno grossolana, applicabile a ogni sezione rettangolare con buona approssimazione. Naturalmente proporrò il confronto con alcuni valori tabulati ricavati direttamente dalla soluzione esatta, tratti dai testi di riferimento.

• **Prima soluzione approssimata.** Prendendo spunto dalla analogia della membrana propongo per la funzione delle tensioni l'espressione

$$9.34) \quad F(x, y) = G\Theta(-y^2 + (b/2)^2)$$

Si tratta di una superficie a sezione parabolica costante (vedi figura) che evidentemente si discosta grossolanamente da quella che deve essere la soluzione esatta, in prossimità dei punti in $x = \pm a/2$.



Per verificare la soluzione **9.34** dobbiamo sostituirla nel problema di Dirichlet **9.31**. L'equazione differenziale è evidentemente soddisfatta:

$$\nabla^2 F(x, y) = G\Theta \frac{d^2(-y^2 + (b/2)^2)}{dy^2} = G\Theta \frac{d(-2y)}{dy} = -2G\Theta$$

Le condizioni al contorno sono invece soddisfatte solo nei punti per i quali $y = \pm b/2$. Questo significa che la soluzione proposta sarà tanto più affidabile quanto maggiore è il rapporto a/b e quanto più si è lontani dai punti in $x = \pm a/2$.

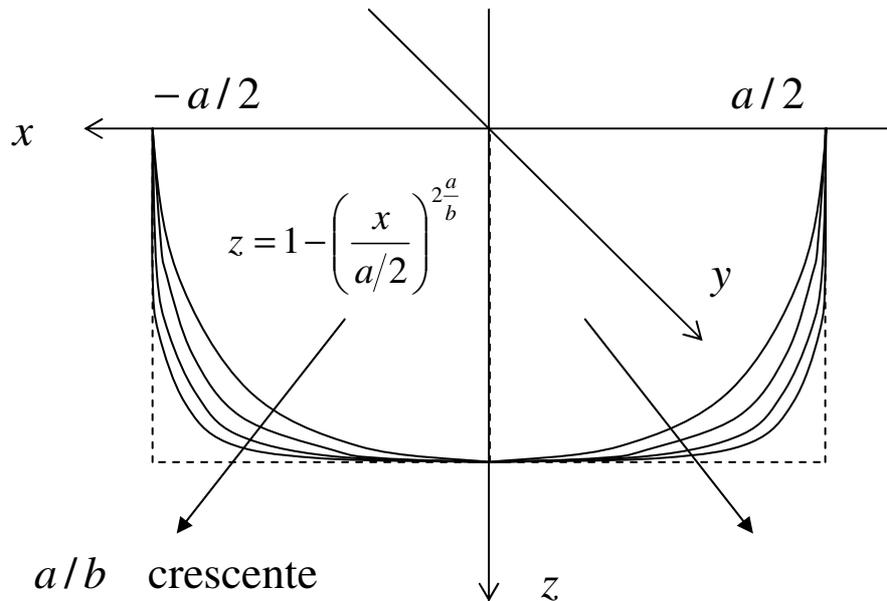
Guardando la figura e ricordando il legame tra funzione delle tensioni e tensione, possiamo dedurre che il campo delle tensioni

- può essere visualizzato come un flusso che gira intorno all'asse geometrico della sezione (con verso concorde a quello del momento torcente);
- ha modulo crescente man mano che ci sia avvicina ai bordi della sezione;
- tende a zero man mano che ci sia avvicina al baricentro della sezione.

Per considerazioni che non siano solo qualitative consideriamo la prossima soluzione approssimata.

• **Seconda soluzione approssimata.** Il difetto della precedente soluzione è evidentemente nei bordi in $x = \pm a/2$. Per farla scendere su tali segmenti si può considerare la **9.34** e moltiplicarla per una opportuna funzione. Non è difficile capire che una superficie del tipo

$$9.35) \quad F(x, y) = C \left(-x^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) \left(-y^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right) = C \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)$$



potrebbe fare al caso nostro (con C costante da determinare). In realtà questa soluzione ha il problema di discostarsi dalla soluzione esatta in modo consistente. Questo perché il suo profilo parabolico lungo la dimensione maggiore (assumo che sia $a \geq b$) risulta avere una curvatura eccessiva. Per ovviare a questo inconveniente si può considerare la seguente soluzione

$$9.36) \quad F(x, y) = C \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{2\frac{a}{b}} \right) \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)$$

Calcoliamo adesso il laplaciano della **9.36**:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= C \left(-2 \frac{a}{b} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{2\frac{a}{b}-1} \frac{2}{a} \right) \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = C \left(-2 \frac{a}{b} \left(2 \frac{a}{b} - 1 \right) \left(\frac{x}{a/2} \right)^{2\frac{a}{b}-2} \frac{4}{a^2} \right) \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= C \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{2\frac{a}{b}} \right) (-2y) \Rightarrow \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = -2C \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{2\frac{a}{b}} \right) \end{aligned} \right. \Rightarrow \\ \nabla^2 F(x, y) &= -2C \left(\left(\frac{2a^2 - ab}{b^2} \right) \left(\frac{x}{a/2} \right)^{2\frac{a}{b}-2} \frac{4}{a^2} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) + 1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{2\frac{a}{b}} \right) \end{aligned}$$

Il laplaciano non è costante, ma d'altra parte non ha molta importanza (stiamo cercando una soluzione approssimata). Per ottenere un valore costante ne calcoliamo allora la media integrale⁶ sulla superficie della sezione. Si ha

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla^2 F}(x, y) &= -2C \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\left(\frac{2a^2 - ab}{b^2} \right) \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-2} \frac{4}{a^2} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) + 1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) dx dy}{ab} = \\
&= -\frac{2C}{ab} \frac{4}{a^2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 \left(\frac{2a^2 - ab}{b^2} \right) \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-2} - y^2 \left(\frac{2a^2 - ab}{b^2} \right) \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-2} \right) dx dy - \frac{2C}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) dx dy = \\
&= -\frac{C}{b} \left(\frac{2a-b}{2} \right) \frac{4}{a^2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-2} dx dy + \frac{2C}{b} \frac{4}{a^2} \left(\frac{2a-b}{b^2} \right) \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(y^2 \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-2} \right) dx dy - \frac{2C}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} dx dy + \\
&+ \frac{2C}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} dx dy = -C \left(\frac{2a-b}{2} \right) \frac{4}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-2} dx + \frac{2C}{b} \left(\frac{2a-b}{b^2} \right) \frac{4}{a^2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-2} dx - \\
&- 2C + \frac{2C}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} dx = -2C \frac{ab}{8} \frac{4}{a^2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-1} \Big|_{-a/2}^{a/2} + 2C \frac{ab}{24} \frac{4}{a^2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-1} \Big|_{-a/2}^{a/2} - 2C + \\
&+ 2C \frac{b}{2(2a+b)} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}+1} \Big|_{-a/2}^{a/2} = -2C \frac{ab}{8} \frac{4}{a^2} \left(\left(\frac{a/2}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-1} - \left(\frac{-a/2}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-1} \right) + 2C \frac{ab}{24} \frac{4}{a^2} \left(\left(\frac{a/2}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-1} - \left(\frac{-a/2}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-1} \right) - \\
&- 2C + 2C \frac{b}{2(2a+b)} \left(\left(\frac{a/2}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}+1} - \left(\frac{-a/2}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}+1} \right) = -2C \frac{b}{a} + 2C \frac{b}{3a} - 2C + 2C \frac{b}{2a+b} = \\
&= -2C \frac{3b}{3a} + 2C \frac{b}{3a} - 4C \frac{a}{2a+b} = -4C \frac{b}{3a} - 4C \frac{a}{2a+b} = -4C \frac{b^2 + 2ab + 3a^2}{3a(2a+b)}
\end{aligned}$$

Imponendo che il valore medio del laplaciano soddisfi l'equazione differenziale del problema di Dirichlet abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla^2 F}(x, y) = -2G\Theta &\Leftrightarrow -4C \frac{b^2 + 2ab + 3a^2}{3a(2a+b)} = -2G\Theta \Leftrightarrow 2C \frac{b^2 + 2ab + 3a^2}{3a(2a+b)} = G\Theta \Leftrightarrow \\
C &= G\Theta \frac{3a(2a+b)}{2(b^2 + 2ab + 3a^2)}
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo la soluzione

$$9.37) \quad F(x, y) = G\Theta \frac{3a(2a+b)}{2(b^2 + 2ab + 3a^2)} \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)$$

⁶ In questo calcolo saremo costretti a imporre che $2a/b$ sia un numero pari.

Ora che ho la funzione delle tensioni procedo alla derivazione della soluzione in termini di angolo di rotazione della sezione, tensioni... Intanto per il fattore torsionale di rigidezza, in base alla **9.32**, si ha⁷

$$\begin{aligned}
 J_t &= \frac{2}{G\Theta} \int_A F(x, y) dA = \frac{2}{G\Theta} G\Theta \frac{3a(2a+b)}{2(b^2+2ab+3a^2)} \int_A \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) dA = \\
 &= 2 \frac{3a(2a+b)}{2(b^2+2ab+3a^2)} \int_A \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} + y^2 \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) dA = \\
 &= \frac{3a(2a+b)}{(b^2+2ab+3a^2)} \left(ab \left(\frac{b}{2} \right)^2 - \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dx dy - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} dx dy + \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} y^2 \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} dx dy \right) = \\
 &= \frac{3a(2a+b)}{(b^2+2ab+3a^2)} \left(ab \left(\frac{b}{2} \right)^2 - \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dx - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} dx + \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} dx \right) = \\
 &= \frac{3a(2a+b)}{(b^2+2ab+3a^2)} \left(ab \left(\frac{b}{2} \right)^2 - a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy - \left(\frac{b}{2} \right)^2 b \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} dx + \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} dx \right) = \\
 &= \frac{3a(2a+b)}{(b^2+2ab+3a^2)} \left(ab \left(\frac{b}{2} \right)^2 - a \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \frac{b^2}{2a+b} \frac{a}{2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}+1} \Big|_{-a/2}^{a/2} + \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} \frac{b}{2a+b} \frac{a}{2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}+1} \Big|_{-a/2}^{a/2} \right) = \\
 &= \frac{3a(2a+b)}{(b^2+2ab+3a^2)} \left(ab \left(\frac{b}{2} \right)^2 - a \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \frac{b^2}{2a+b} \frac{a}{2} + \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} \frac{b}{2a+b} \frac{a}{2} \right) = \\
 &= \frac{3a(2a+b)}{(b^2+2ab+3a^2)} \left(ab \left(\frac{b}{2} \right)^2 - a \frac{b^3}{12} - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \frac{b^2}{2a+b} \frac{a}{2} + \frac{b^3}{12} \frac{b}{2a+b} \frac{a}{2} \right) = \\
 &= \frac{3a(2a+b)}{(b^2+2ab+3a^2)} \left(\frac{3ab^3}{12} - \frac{ab^3}{12} - \frac{3ab^4}{12(2a+b)} + \frac{ab^4}{12(2a+b)} \right) = \frac{3a(2a+b)}{(b^2+2ab+3a^2)} \left(\frac{2ab^3}{12} - \frac{2ab^4}{12(2a+b)} \right)
 \end{aligned}$$

Dunque abbiamo trovato

$$9.38) \quad J_t = \frac{a^3 b^3}{(b^2 + 2ab + 3a^2)}$$

Pertanto l'angolo di rotazione per unità di lunghezza, in base alla **9.24**, vale

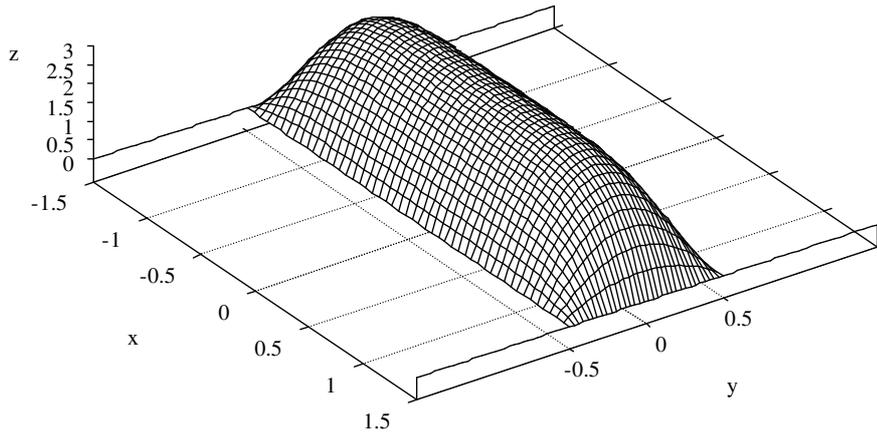
$$9.39) \quad \Theta = \frac{M_z}{GJ_t} = \frac{M_z}{G} \frac{b^2 + 2ab + 3a^2}{a^3 b^3}$$

e la funzione delle tensioni **9.37** (in figura riporto l'andamento per $M = 10, a = 3, b = 1$) si riscrive

⁷ In questo calcolo saremo costretti a imporre che $2a/b$ sia un numero pari.

$$9.40) \quad F(x, y) = M_z \frac{6a + 3b}{2a^2b^3} \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)$$

$$((M*(6*a+3*b)/(2*(a**2)*b**3))*(1-(x/(a/2))**(2*a/b))*((b/2)**2-y**2))$$



Per le tensioni, in base alla **9.27**, abbiamo

$$9.41) \quad \begin{cases} \tau_{xz} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -M_z \frac{3(2a+b)}{a^2b^3} \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) y \\ \tau_{yz} = -\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M_z \frac{3(2a+b)}{ab^4} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-1} \frac{2}{a} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \end{cases}$$

Dunque il modulo della tensione, considerando la giacitura individuata dalla sezione, vale

$$t(P, \hat{k}) = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = M_z \frac{3(2a+b)}{a^2b^3} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right)^2 y^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-1} 4 \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)^2}$$

Il valore massimo di tale modulo è

$$9.42) \quad \tau_{MAX} = t\left(x = \pm \frac{a}{2}, y = 0; \hat{k}\right) = t\left(x = 0, y = \pm \frac{b}{2}; \hat{k}\right) = M_z \frac{3(2a+b)}{a^2b^3} \sqrt{\frac{b^2}{4}} = M_z \frac{(6a+3b)}{2a^2b^2}$$

Per le deformazioni, in base alla **9.33**, si ha

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = -\frac{M_z}{G} \frac{3(2a+b)}{a^2 b^3} \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) y \quad \gamma_{yz} = -\frac{M_z}{G} \frac{3(2a+b)}{ab^4} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-1} \frac{2}{a} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \end{cases}$$

Per quanto riguarda la funzione di ingobbamento, ricordando che per la **9.28** deve essere

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + y \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{G\Theta} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - x$$

si scopre che una espressione, sia pure approssimata, non può essere ricavata. Infatti se la funzione di ingobbamento esistesse continua allora le sue derivate miste dovrebbero essere uguali a prescindere dall'ordine di derivazione (teorema di Schwartz). Invece nel nostro caso abbiamo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{1}{G\Theta} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + 1 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{G\Theta} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{G\Theta} \left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \right) = -2 \Leftrightarrow \nabla^2 F = -2G\Theta$$

E poiché appunto la nostra funzione delle tensioni non risolve esattamente l'equazione di Poisson qui sopra, la funzione di ingobbamento non esiste. Questo vuol dire che se ne ricaviamo le derivate dalle **9.28**, poi non è possibile integrarle per ottenere una funzione in x, y (abbiamo cioè una forma differenziale che non ammette primitiva).

Per quanto riguarda la **soluzione esatta** i libri di testo forniscono esclusivamente dei valori tabulati relativi a Θ, τ_{MAX} , in funzione del rapporto a/b . Per leggere questi valori bisogna porre le due grandezze in esame nella seguente forma

$$9.43) \quad \tau_{MAX} = M_z \frac{1}{ab^2} \frac{1}{c_1} \quad \Theta = \frac{M_z}{G} \frac{1}{ab^3} \frac{1}{c_2}$$

Riscrivo allora in questa forma i relativi valori ottenuti per la soluzione approssimata **9.36**:

Soluzione approssimata	τ_{MAX}	Θ
$F(x, y) = M_z \frac{6a+3b}{2a^2 b^3} \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)$	$M_z \frac{1}{ab^2} \frac{1}{\left(\frac{2(a/b)}{6(a/b)+3} \right)}$	$\frac{M_z}{G} \frac{1}{ab^3} \frac{1}{\left(\frac{1+2a/b+3(a/b)^2}{(a/b)^2} \right)}$
	$c_1 = \frac{2(a/b)}{6(a/b)+3}$	$c_2 = \frac{(a/b)^2}{1+2(a/b)+3(a/b)^2}$

Ecco in fine il confronto fra le costanti c_1, c_2 relative alla soluzione esatta⁸, e quelli relativi alla soluzione approssimata:

rapporto dimensioni sezione	soluzione esatta		soluzione approssimata	
a/b	c_1	c_2	c_1	c_2
1,0	0,208	0,1406	0,222	0,1666
1,2	0,219	0,1661	0,234	0,1864
1,5	0,231	0,1958	0,250	0,2090
2,0	0,246	0,229	0,266	0,235
2,5	0,248	0,249	0,277	0,252
3,0	0,267	0,263	0,286	0,264
4,0	0,282	0,281	0,295	0,281
5,0	0,291	0,291	0,303	0,290
10,0	0,312	0,312	0,316	0,311
∞	0,333	0,333	0,333	0,333

I valori evidenziati non possono essere considerati in quanto nel calcolo di J_z e di $\nabla^2 F$ abbiamo dovuto assumere che $2a/b$ fosse un numero pari (vedi note 6 e 7). Comunque la soluzione proposta pare avere una precisione accettabile e sebbene non possa essere usata per ricavare gli spostamenti (proprio perché il suo laplaciano non è costante), comunque fornisce il campo delle tensioni. Allora riepilogo i risultati legati alla soluzione approssimata.

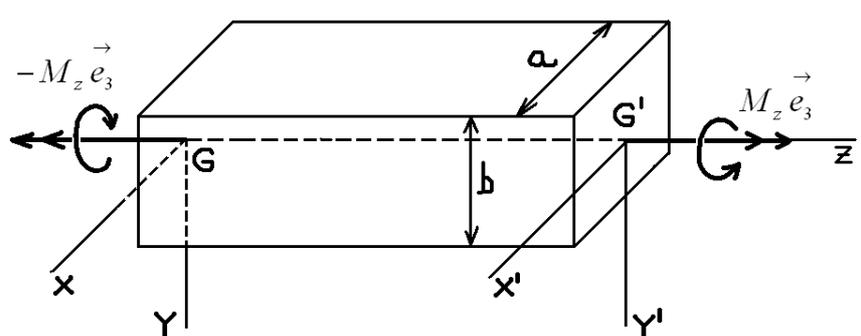
Soluzione approssimata	
Funzione delle tensioni	$F(x, y) = M_z \frac{6a + 3b}{2a^2 b^3} \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)$
Condizione	Si può utilizzare solo se $2a/b$ risulta essere un numero pari
Tensioni	$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy}$ $\tau_{xz} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -M_z \frac{3(2a + b)}{a^2 b^3} \left(1 - \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}} \right) y$ $\tau_{yz} = -\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M_z \frac{3(2a + b)}{ab^4} \left(\frac{x}{a/2} \right)^{\frac{2a}{b}-1} \frac{2}{a} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)$
τ_{MAX}	$M_z \frac{1}{ab^2} \frac{1}{\left(\frac{2(a/b)}{6(a/b)+3} \right)} = M_z \frac{1}{ab^2} \frac{1}{c_1} \quad c_1 = \frac{2(a/b)}{6(a/b)+3}$

⁸ I valori sono tratti da Beer-Johnston, Scienza delle costruzioni, McGraw Hill 1997, pag. 164

\ominus	$\frac{M_z}{G} \frac{1}{ab^3} \frac{1}{\left(\frac{1+2a/b+3(a/b)^2}{(a/b)^2}\right)} = \frac{M_z}{G} \frac{1}{ab^3} \frac{1}{c_2} \quad c_2 = \frac{(a/b)^2}{1+2(a/b)+3(a/b)^2}$		
Coefficienti	a/b	c₁	c₂
	1,0	0,222	0,1666
	2,0	0,266	0,235
	3,0	0,286	0,264
	4,0	0,295	0,281
	5,0	0,303	0,290
	10,0	0,316	0,311
	∞	0,333	0,333
Deformazioni	$\gamma_{xz} = -\frac{M_z}{G} \frac{3(2a+b)}{a^2b^3} \left(1 - \left(\frac{x}{a/2}\right)^{\frac{2a}{b}}\right) y$ $\gamma_{yz} = -\frac{M_z}{G} \frac{3(2a+b)}{ab^4} \left(\frac{x}{a/2}\right)^{\frac{2a}{b}-1} \frac{2}{a} \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2\right)$ $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$		
Funzione di ingobbamento	Non è possibile ricavarla attraverso l'espressione approssimata della funzione delle tensioni, in quanto la sua forma differenziale associata è non chiusa (e dunque non esatta)		

Riporto invece adesso tutto quello che sappiamo sulla soluzione esatta.

Torsione per sezioni rettangolari



Sollecitazione

Su ciascuna sezione agisce una coppia con piano coincidente con quello della sezione stessa. I due momenti sono dunque paralleli all'asse geometrico della trave.

Massima tensione tangenziale

La tensione tangenziale massima si ha sui lati della sezione, in particolare sul lato minore della sezione. Questa tensione vale

$$\tau_{MAX} = M_z \frac{1}{ab^2} \frac{1}{c_1} \quad a \geq b$$

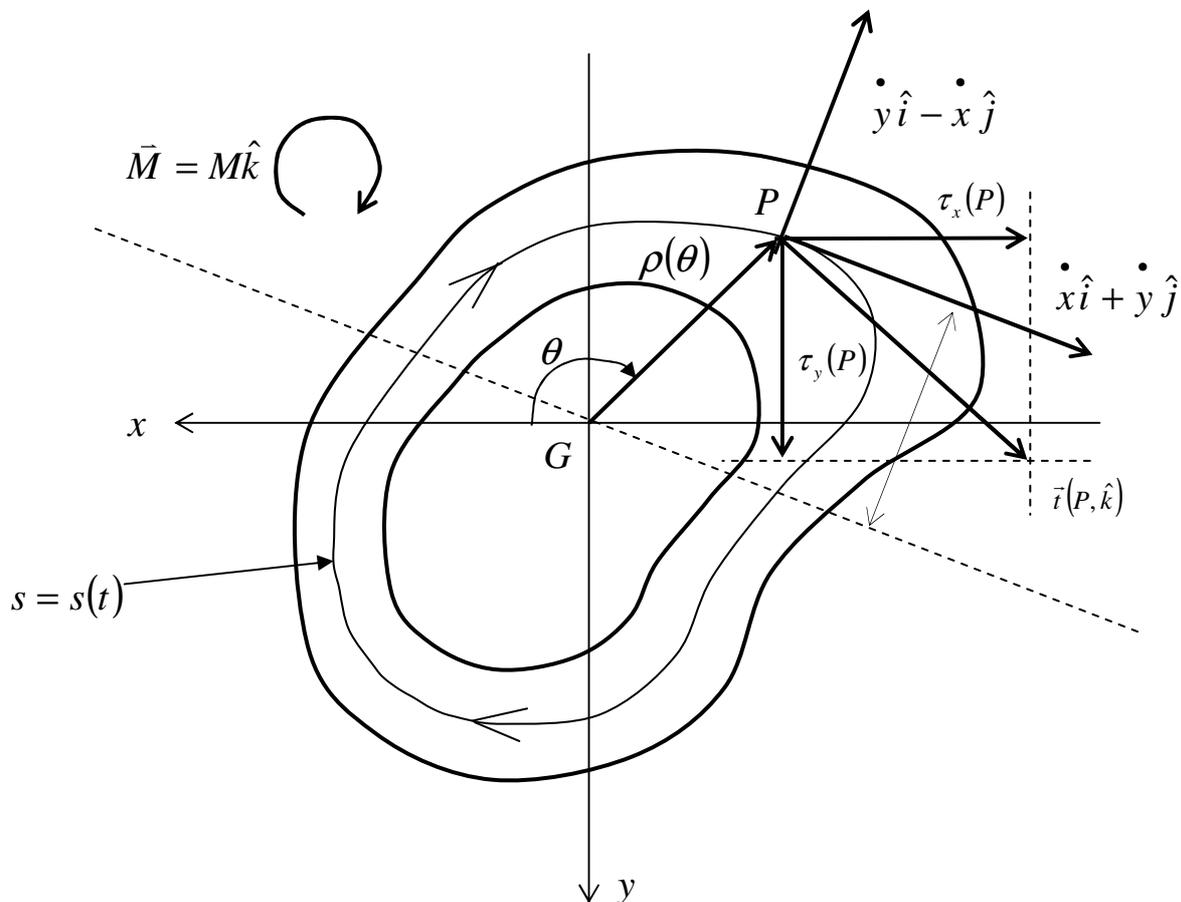
Angolo di torsione		
$\theta(z) = \Theta_z = \frac{M_z}{G} \frac{1}{ab^3} \frac{1}{c_2} z$ (radianti)		
Coefficienti		
a/b	c_1	c_2
1,0	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2,0	0,246	0,229
2,5	0,248	0,249
3,0	0,267	0,263
4,0	0,282	0,281
5,0	0,291	0,291
10,0	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

Capitolo 10. Sollecitazioni semplici: torsione per sezioni sottili aperte o chiuse

10.1. Torsione per sezioni sottili chiuse. Consideriamo la curva chiusa γ la quale descrive la linea mediana della sezione. Diciamo che la sua rappresentazione parametrica sia

$$10.1) \quad \gamma: \begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \end{cases} \quad t \in [0, a]$$

Introduciamo poi su γ l'ascissa curvilinea $s = s(t)$ avente come origine il punto di coordinate



$(x(t=0), y(t=a))$ e come verso quello concorde con la coppia applicata. Sappiamo che l'espressione analitica della ascissa curvilinea è

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\left(\dot{x}(l)\right)^2 + \left(\dot{y}(l)\right)^2} dl$$

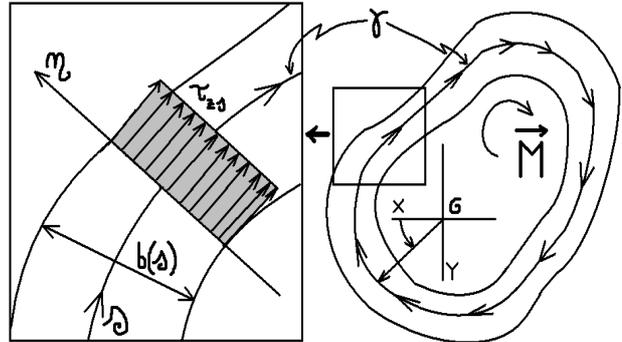
da cui risulta che essa costituisce una funzione continua monotona crescente, dunque invertibile. Possiamo allora considerare la sua funzione inversa $t = g(s)$ che sostituita nella **10.1** permette di riscrivere la rappresentazione parametrica di γ nella forma riparametrizzata

$$10.2) \quad \gamma: \begin{cases} x = \gamma_1(g(s)) = x(s) \\ y = \gamma_2(g(s)) = y(s) \end{cases} \quad s \in [0, L]$$

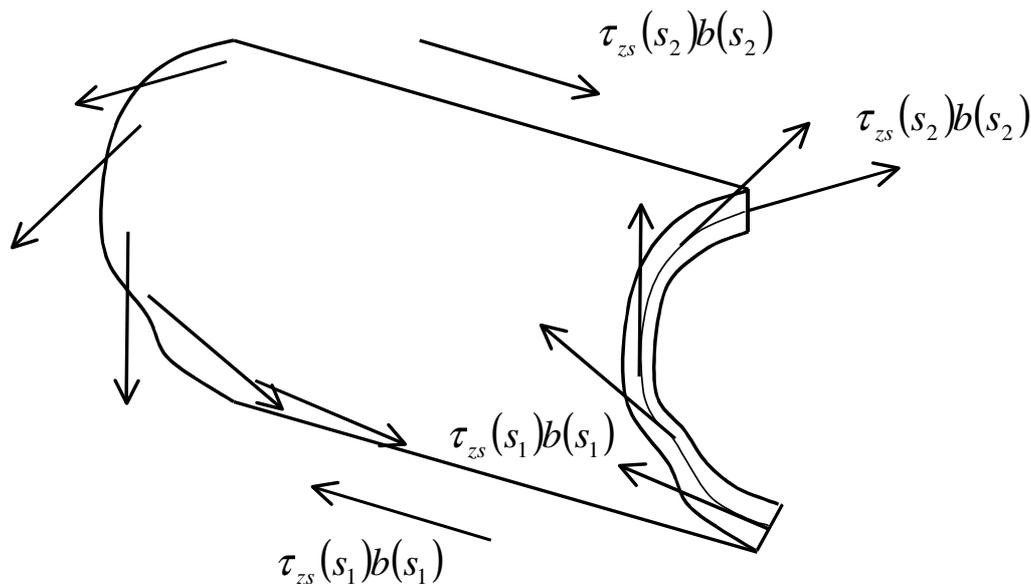
dove L è la lunghezza della curva stessa. Adesso sfruttiamo questa impostazione del problema per ricavare lo stato tensionale e la funzione di ingobbamento.

• **Stato tensionale.** Per poter portare avanti l'analisi si fa l'ipotesi che comunque si prenda un punto P del segmento AB (vedi figura) risulta che $\vec{t}(P, \hat{k}) \cdot \hat{\tau}(s)$ (dove $\hat{\tau}(s)$ è il versore tangente di γ) assume il medesimo valore. Diciamo che questa posizione è tanto più verosimile quanto più sottili sono le pareti della trave. Indicato tale valore con $\tau_{zs}(s)$ si dimostra che

$$10.3) \quad \tau_{zs}(s)b(s) = \text{costante} \quad \forall s \in [0, L]$$



Si consideri a tal proposito la figura seguente in cui viene isolata una sezione della trave. Le tensioni suidue lati lunghi sono state ricavate in base al principio di reciprocità 1.9. Allora se



imponiamo l'equilibrio della sezione di trave alla traslazione, abbiamo immediatamente che $\tau_{zs}(s_1)b(s_1) = \tau_{zs}(s_2)b(s_2)$; e data l'arbitrarietà della sezione scelta la 10.3 risulta dimostrata.

Adesso ricavo la funzione $\tau_{zs}(s)$ imponendo la condizione al contorno per le tensioni, sulla sezione estrema della trave in $z=l$. Facendo riferimento alla prima figura di questo capitolo e considerando l'ulteriore ipotesi che risulta proprio $\vec{t}(x(s), y(s); \hat{k}) = \tau_{zs}(s)\hat{\tau}(s)$, dove si intende che $\hat{\tau}(s)$ è il versore tangente di γ , allora si ha

$$10.4) \quad M = \int_{\gamma} \tau_{zs}(s)b(s)h(s)ds = \tau_{zs}(s)b(s) \int_{\gamma} h(s)ds = \tau_{zs}(s)b(s) \int_0^{2\pi} h(\theta) \sqrt{\left(\dot{x}(\theta)\right)^2 + \left(\dot{y}(\theta)\right)^2} d\theta$$

Per valutare adesso l'integrale a secondo membro consideriamo che

$$\begin{aligned}
h(s) &= \sqrt{\rho^2(\theta) - (\bar{\rho}(\theta) \cdot \hat{t}(\theta))^2} = \sqrt{x^2(\theta) + y^2(\theta) - \frac{(x(\theta)\dot{x}(\theta) + y(\theta)\dot{y}(\theta))^2}{(\dot{x}(\theta))^2 + (\dot{y}(\theta))^2}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \sqrt{x^2(\dot{x})^2 + y^2(\dot{x})^2 + x^2(\dot{y})^2 + y^2(\dot{y})^2 - x^2(\dot{x})^2 - y^2(\dot{y})^2 - 2x\dot{x} + y\dot{y}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \sqrt{y^2(\dot{x})^2 + x^2(\dot{y})^2 - 2x\dot{x} + y\dot{y}} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \sqrt{\rho^2} = \frac{\rho^2(\theta)}{\sqrt{(\dot{x}(\theta))^2 + (\dot{y}(\theta))^2}}
\end{aligned}$$

cioè

$$10.5) \quad h(\theta) = \rho^2(\theta) / \sqrt{(\dot{x}(\theta))^2 + (\dot{y}(\theta))^2}$$

e dunque la **10.4** si riscrive

$$10.6) \quad M = \tau_{zs}(s)b(s) \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2(\theta)}{\sqrt{(\dot{x}(\theta))^2 + (\dot{y}(\theta))^2}} \sqrt{(\dot{x}(\theta))^2 + (\dot{y}(\theta))^2} d\theta = \tau_{zs}(s)b(s) \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta$$

Si ricorda ora che l'area racchiusa dalla curva γ , che chiameremo Ω , è data, secondo la formula per il calcolo dell'area del settore piano, da

$$10.7) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(s) ds$$

per cui la **10.6** diventa $M = 2\tau_{zs}(s)b(s)\Omega$ e in definitiva si trova per la tensione la funzione

$$10.8) \quad \tau_{zs}(s) = \frac{M}{2\Omega b(s)} \quad \mathbf{1^\circ \text{ formula di Bredt}}$$

• **Funzione di ingobbamento.** In base alle **9.12** si ha in particolare

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G\Theta} + y \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G\Theta} - x$$

Dunque il differenziale della funzione di ingobbamento si scrive

$$df(x, y; dx, dy) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = \left(\frac{\tau_{xz}}{G\Theta} + y \right) dx + \left(\frac{\tau_{yz}}{G\Theta} - x \right) dy =$$

$$= \frac{1}{G\Theta} (\tau_{xz} dx + \tau_{yz} dy) + (y dx - x dy)$$

Andando a considerare la restrizione di questa forma differenziale alla curva γ abbiamo

$$\begin{aligned} df(s; ds) &= \frac{1}{G\Theta} \left(\tau_{xz}(s) \dot{x}(s) + \tau_{yz}(s) \dot{y}(s) \right) ds + \left(y(s) \dot{x}(s) ds - x(s) \dot{y}(s) ds \right) = \\ &= \frac{1}{G\Theta} \vec{t}(s, \hat{k}) \cdot \hat{\tau}(s) ds - (x(s) + y(s)) \cdot \left(\dot{y}(s) ds - \dot{x}(s) ds \right) = \frac{1}{G\Theta} \vec{t}(s, \hat{k}) \cdot \hat{\tau}(s) ds - \vec{\rho}(s) \cdot \hat{n}(s) ds = \\ &= \left(\frac{1}{G\Theta} \tau_{zs}(s) - h(s) \right) ds \end{aligned}$$

Sostituendo poi nel differenziale la **10.8** abbiamo

$$10.9) \quad \frac{\partial f(s; ds)}{\partial s} = \left(\frac{M}{2G\Theta\Omega b(s)} - h(s) \right)$$

Dobbiamo adesso imporre che la funzione di ingobbamento esista continua, ovvero che la sua derivata **10.9** ammetta primitiva. Basta imporre per questo che l'integrale su γ (che è una curva chiusa) del differenziale sia nullo. Si ha

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f(s; ds)}{\partial s} ds = \frac{M}{2G\Theta\Omega} \int_{\gamma} \frac{ds}{b(s)} - \int_{\gamma} h(s) ds = \frac{M}{2G\Theta\Omega} \int_{\gamma} \frac{ds}{b(s)} - 2\Omega = 0 \Leftrightarrow \Theta = \frac{M}{4G\Omega^2} \int_{\gamma} \frac{ds}{b(s)}$$

Facendo poi la posizione

$$10.10) \quad \kappa \stackrel{\Delta}{=} \int_{\gamma} \frac{ds}{b(s)}$$

abbiamo in definitiva

$$10.11) \quad \Theta = \frac{M\kappa}{4G\Omega^2} \quad \text{2° formula di Bredt}$$

Per analogia col caso generale della torsione, in base alla **9.23**, poniamo

$$10.12) \quad J_t \stackrel{\Delta}{=} \frac{M}{G\Theta} = \frac{4\Omega^2}{\kappa}$$

La funzione di ingobbamento si ottiene poi integrando la **10.9** in cui sia stata sostituita la **10.11**, ovvero integrando la

$$10.13) \quad \frac{\partial f(s; ds)}{\partial s} = \frac{2\Omega}{\kappa b(s)} - h(s)$$

• **Lavoro di deformazione.** Utilizzando il teorema di Clapeyron abbiamo immediatamente che il lavoro di deformazione fatto dalla coppia torcente vale

$$10.14) L_e = \frac{1}{2} \vec{M} \cdot \theta(z=l) \hat{k} = \frac{1}{2} M_z \Theta l = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{J_t G} l$$

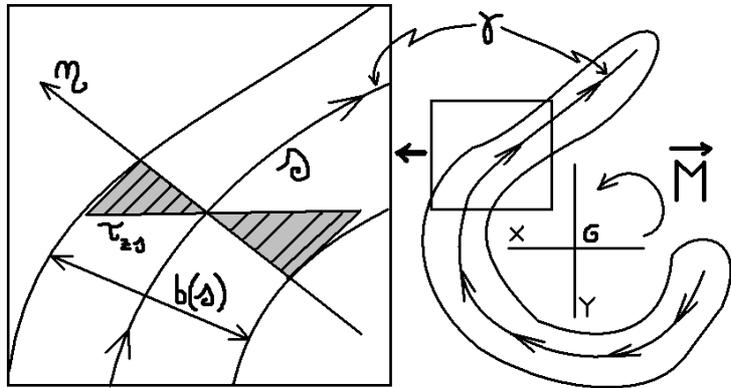
Torsione per sezioni sottili chiuse	
Stato tensionale	
<p>1° formula di Bredt $\tau_{zs}(s) = \frac{M_z}{2\Omega b(s)}$</p> <p>$\tau_{zsMAX} = \frac{M_z}{2\Omega b_{MIN}} \quad \tau_{zs}(s)b(s) = \frac{M_z}{2\Omega}$</p>	
<p>Lo sforzo $\vec{t}_z(s)$ è punto per punto tangente alla curva mediana ed è costante lungo la direzione ortogonale alla curva mediana. Il suo modulo è τ_{zs}. Inoltre il prodotto $\tau_{zs}b$ è costante lungo tutta la sezione.</p>	
Angolo di torsione	
<p>$\theta(z) = z\Theta$ (radianti)</p> <p>2° formula di Bredt $\Theta = \frac{M \int \frac{ds}{\gamma b(s)}}{4G\Omega^2} = \frac{M\kappa}{4G\Omega^2} = \frac{M}{GJ_t}$ (radianti su metro)</p>	
Fattore torsionale di rigidezza	
<p>$J_t = \frac{4\Omega^2}{\kappa} \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\alpha) d\alpha \quad \kappa = \int_{\gamma} \frac{ds}{b(s)}$</p>	
<p>Si precisa che Ω è l'area racchiusa da γ. Si calcola allora con la formula per l'area del settore circolare.</p>	
Lavoro di deformazione	
<p>$L = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{J_t G} l$</p>	

10.2. Torsione per sezioni sottili aperte. Questo caso può essere trattato in maniera relativamente semplice se si ipotizza che nel punto di ascissa curvilinea s (si immagini anche qui di

avere fissato un sistema di ascisse curvilinee sulla linea mediana γ della sezione) la funzione delle tensioni coincide con quella di una sezione rettangolare sottile di spessore $b(s)$. Come funzione delle tensioni si considera la 9.34, che applicata al caso in oggetto diventa

$$10.15) F(x, y) = G\Theta \left(-\eta^2 + \frac{b^2(s)}{4} \right)$$

dove si intende che η è l'ascissa relativa a un asse mobile che scorre lungo γ assumendo punto per punto la direzione ortogonale alla tangente alla curva.



• **Angolo di torsione.** Considerando le 9.24, 9.32 abbiamo

$$10.16) \begin{cases} \Theta = M/GJ_t \\ J_t = \frac{2}{G\Theta} \int_A F(x, y) dA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Theta = \frac{M}{GJ_t} \\ J_t = \frac{2}{G\Theta} \int_A F(x, y) dA \\ M = 2 \int_A F(x, y) dA \end{cases}$$

Procedo allora al calcolo dell'integrale. Si ha

$$\begin{aligned} \int_A F(x, y) dA &= G\Theta \int_A \left(-\eta^2 + \frac{b^2(s)}{4} \right) dA = G\Theta \int_0^L 2 \int_0^{b(s)/2} \left(-\eta^2 + \frac{b^2(s)}{4} \right) d\eta ds = \\ &= 2G\Theta \left(\int_0^L \int_0^{b(s)/2} (-\eta^2) d\eta ds + \frac{1}{4} \int_0^L b^2(s) \int_0^{b(s)/2} d\eta ds \right) = 2G\Theta \left(-\frac{1}{3} \int_0^L \eta^3 \Big|_0^{b(s)/2} ds + \frac{1}{4} \int_0^L b^2(s) \eta \Big|_0^{b(s)/2} ds \right) = \\ &= 2G\Theta \left(-\frac{1}{24} \int_0^L b^3(s) ds + \frac{3}{24} \int_0^L b^3(s) ds \right) = G\Theta \frac{1}{6} \int_0^L b^3(s) ds \end{aligned}$$

Per cui, sostituendo nelle 9.27 abbiamo

$$10.17) \begin{cases} \Theta = \frac{3M}{G \int_0^L b^3(s) ds} = \frac{M}{GJ_t} \\ J_t = \frac{1}{3} \int_0^L b^3(s) ds \end{cases}$$

• **Funzione delle tensioni.** Confrontando la 9.26 e la prima delle 9.28 abbiamo

$$10.18) F(x, y) = \frac{3M}{\int_0^L b^3(s) ds} \left(-\eta^2 + \frac{b^2(s)}{4} \right) = \frac{M}{J_t} \left(-\eta^2 + \frac{b^2(s)}{4} \right)$$

e dunque per le tensioni, in base alla 9.27 si ha

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ \tau_{zy} = -\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \tau_{zs} = \vec{t} \cdot \left(\frac{dx}{ds} \hat{i} + \frac{dy}{ds} \hat{j} \right) = \tau_{zx} \frac{dx}{ds} + \tau_{zy} \frac{dy}{ds} =$$

$$= \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \frac{dy}{ds} = -\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \frac{dx}{ds} = \vec{\nabla} F \cdot \hat{n} = \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

Dunque si può concludere che

$$10.19) \tau_{zs} = -6 \frac{\eta M}{\int_0^L b^3(s) ds}$$

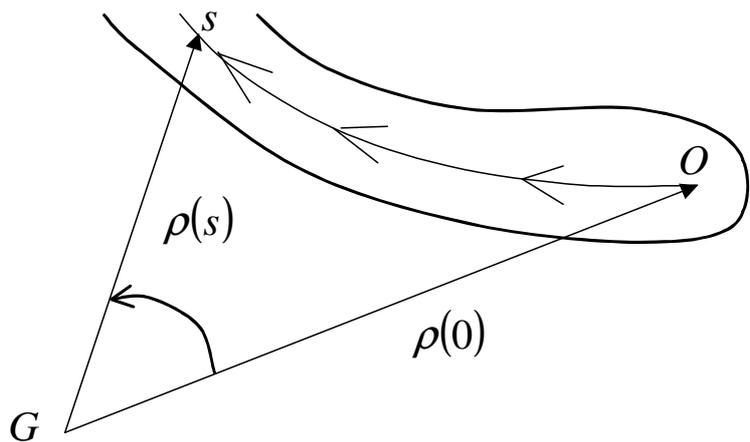
L'andamento delle tensioni è rappresentato in figura. Si osserva che il valore massimo della tensione si registra sui bordi della sezione, esattamente in corrispondenza del tratto in cui la sezione è più larga.

• **Funzione di ingobbamento.** Nel paragrafo 10.1 abbiamo ricavato per la funzione di ingobbamento una espressione (immediatamente sopra la 10.9) senza sfruttare la chiusura della sezione. Questo significa che tale espressione ha validità anche nel caso delle sezioni sottili aperte. Dunque

$$10.20) df(s; ds) = \left(\frac{1}{G\Theta} \tau_{zs}(s) - h(s) \right) ds$$

Sostituendo poi nella 10.20 la 10.19 abbiamo

$$df(s; ds) = \left(-\frac{6}{G\Theta} \frac{\eta M}{\int_0^L b^3(s) ds} - h(s) \right) ds$$



Ma bisogna considerare che la 10.20 è il differenziale della restrizione della funzione di ingobbamento sulla linea mediana γ . Dunque si deve assumere $\eta = 0$ e in definitiva

$$10.21) df(s; ds) = -h(s) ds \Rightarrow f(s) = -\int_{\gamma} h(s) ds + c = -\int_0^s \rho^2(s) ds + c$$

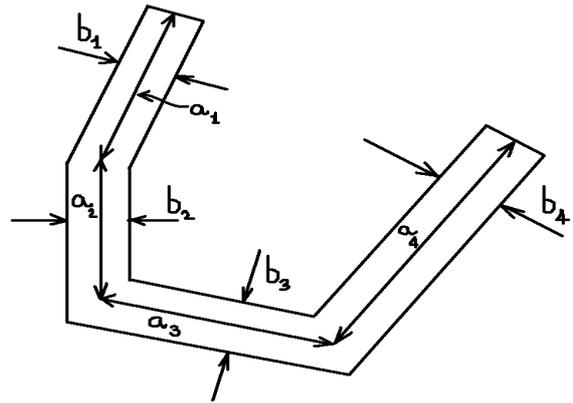
Dunque la funzione di ingobbamento è pari al doppio dell'area spazzata dal raggio vettore dall'origine della ascissa curvilinee fino al punto di ascissa curvilinea s . Essa risulta poi definita a meno di una costante, ciò che è perfettamente in accordo con il suo significato fisico: infatti si ricorda che gli spostamenti che risolvono un problema elastico sono sempre definiti a meno di uno spostamento rigido arbitrario.

• **Il caso delle sezioni poligonali.** Nella pratica è di particolare interesse il caso di sezioni sottili aperte che siano l'unione di più sezioni sottili rettangolari. L'estensione di quanto detto sopra a questa fattispecie di trave è immediato: definite le dimensioni a_i, b_i come indicato in figura si ha

$$10.22) J_t = \frac{1}{3} \int_0^L b^3(s) ds = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n a_i b_i^3$$

$$10.23) \Theta = \frac{M}{GJ_t} = \frac{3M}{G \sum_{i=1}^n a_i b_i^3}$$

$$10.24) \tau_{zi} = -6 \frac{M}{\sum_{i=1}^n a_i b_i^3} \eta \quad \tau_{ziMAX} = -\frac{M}{\sum_{i=1}^n a_i b_i^3} b_i$$



• **Lavoro di deformazione.** Si rimanda a quanto detto nel paragrafo 10.1.

Torsione per sezioni sottili aperte	
Stato tensionale	
$\tau_{zs}(\eta) = -\frac{2M\eta}{J_t} \quad \tau_{zsMAX} = \frac{Mb_{MAX}}{J_t}$	
Angolo di torsione	
$\theta(z) = \Theta z = \frac{M}{GJ_t} z \quad (\text{radianti})$ $\Theta = \frac{M}{GJ_t} \quad (\text{radianti su metro})$	

Fattore torsionale di rigidezza
$J_t = \frac{1}{3} \int_{\gamma} b^3(s) ds$
Torsione per sezioni sottili aperte poligonali
Stato tensionale
$\tau_{zs}(s) = -\frac{2M\eta}{J_t} \quad \tau_{ziMAX} = \frac{Mb_i}{J_t}$
Angolo di torsione
$\theta(z) = \frac{M}{GJ_t} z \text{ (radianti)}$
Fattore torsionale di rigidezza
$J_t = \frac{1}{3} \sum_i a_i b_i^3$
Lavoro di deformazione
$L = \frac{1}{2} \frac{M^2}{J_t G} z l$

10.3. Torsione per sezioni sottili chiuse a più anelli. È una caso di alto interesse pratico, risolvibile con poche considerazioni aggiuntive rispetto a quanto detto nel paragrafo 10.4. Intanto definisco **maglia** di una sezione ciascun insieme di lati della sua linea mediana tali per cui

- ogni lato della maglia può essere raggiunto da ciascun altro lato della maglia percorrendo la maglia stessa;
- in ciascun nodo della maglia concorrono solo due lati della maglia stessa.

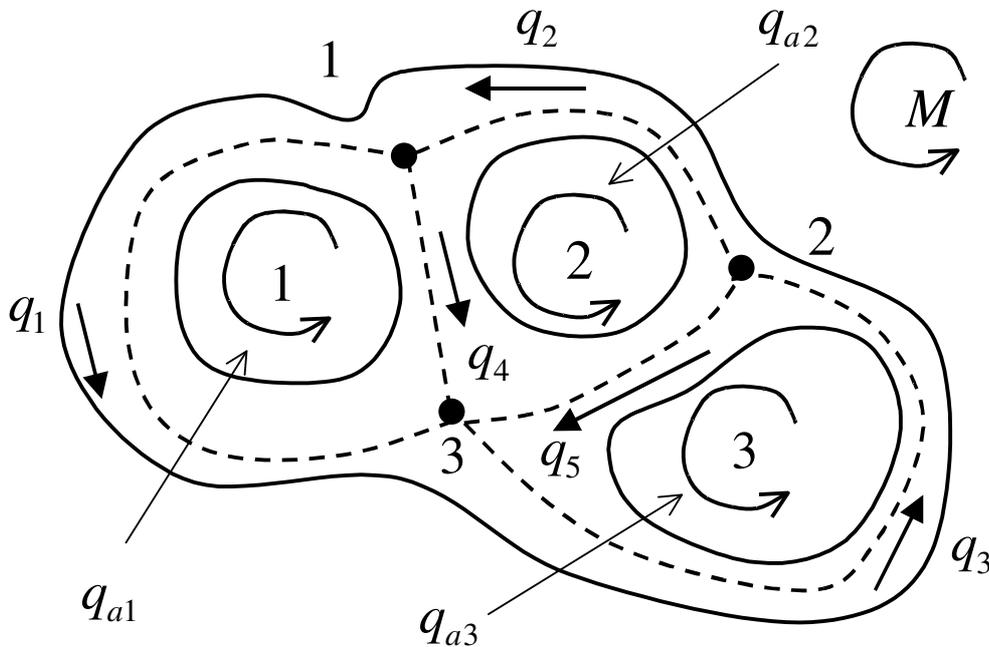
I **nodi** sono tutti quei punti nei quali convergono due o più lati della linea mediana della sezione. Si definisce invece **anello** ogni maglia che orli una superficie del piano della sezione, la quale non sia attraversata da altri lati.

Se indico con n il numero di anelli di una sezione, con l il numero di lati e con m il numero di anelli (non di maglie), allora si dimostra che **il numero di anelli di una rete è dato dal numero dei lati della stessa, meno il numero dei nodi diminuito di uno.** Cioè

$$10.25) \quad m = l - (n - 1)$$

Vediamo ora come si ricava lo stato tensionale e l'angolo di rotazione per unità di lunghezza Θ in questo genere di problema. A tale scopo si consideri la generica sezione a tre anelli (5-(3-1)) indicata in figura. Si proceda poi come segue

- si numerino anelli e nodi;
- si fissi arbitrariamente il verso positivo dei flussi di tensione $q_i = \tau_{zs}(s)b(s)$ in ciascun lato



Intanto si può osservare che i flussi di tensione saranno costanti su ciascuno dei 5 lati, in base alla **10.3**. Essi costituiscono dunque intanto 5 incognite reali (non funzioni). L'ulteriore incognita è costituita dall'angolo di torsione per unità di lunghezza Θ . Abbiamo dunque 6 incognite reali e quindi, in generale, si hanno $l+1$ incognite. Vediamo ora quali equazioni abbiamo a disposizione per ricavarle.

• **Equazioni agli anelli.** Le formule di Bredt risultano applicabili a ciascun anello della maglia. Per applicarle introduciamo dei flussi fittizi di tensione, che chiamiamo **flussi di anello** (che indichiamo q_{a1}, q_{a2}, \dots) i cui versi positivi siano arbitrariamente scelti (nella figura ad esempio tutti e tre i versi sono concordi con quello del momento torcente). Dopodiché immaginiamo che il momento torcente si ripartisca sugli anelli. Così ci siamo ricondotti, per ciascun anello, al caso della torsione per sezioni sottili chiuse e la 1° formula di Bredt **10.8** per l'anello i -mo può scriversi

$$10.26) \quad q_{ai} = \frac{M_i}{2\Omega_i}$$

dove si intende che Ω_i è l'area racchiusa dall'anello i -mo e che M_i è la frazione del momento totale M la quale agisce sull'anello i -mo. Per la 2° formula di Bredt si ha invece

$$10.27) \quad \Theta_i = \frac{M_i \int \frac{ds}{\gamma_i b_i(s_i)}}{4G\Omega_i^2}$$

dove si intende che la funzione $b_i = b_i(s_i)$ descrive lo spessore dell'anello i -mo al variare dell'ascissa curvilinea s_i (su ciascun anello si deve fissare un sistema di ascisse curvilinee); mentre γ_i è la curva mediana dell'anello i -mo. Si capisce che l'angolo di torsione per unità di lunghezza debba essere lo stesso per ciascun anello, dato che tutti gli anelli appartengono alla stessa sezione. Confrontando allora le **10.26**, **10.27** e eliminando M_i otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{ai} = \frac{M_i}{2\Omega_i} \\ \Theta = \frac{M_i \int_{\gamma_i} \frac{ds}{b_i(s_i)}}{4G\Omega_i^2} \Rightarrow M_i = \frac{4G\Omega_i^2 \Theta}{\int_{\gamma_i} \frac{ds}{b_i(s_i)}} \end{array} \right. \Rightarrow q_{ai} = \frac{2G\Omega_i \Theta}{\int_{\gamma_i} \frac{ds}{b_i(s_i)}}$$

Ovvero abbiamo le ulteriori m equazioni

$$10.28) \quad q_{ai} = \frac{2G\Omega_i \Theta}{\int_{\gamma_i} \frac{1}{b_i(s)} ds} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Nel caso della nostra sezione le equazioni agli anelli sono 3 e le equazioni si scrivono

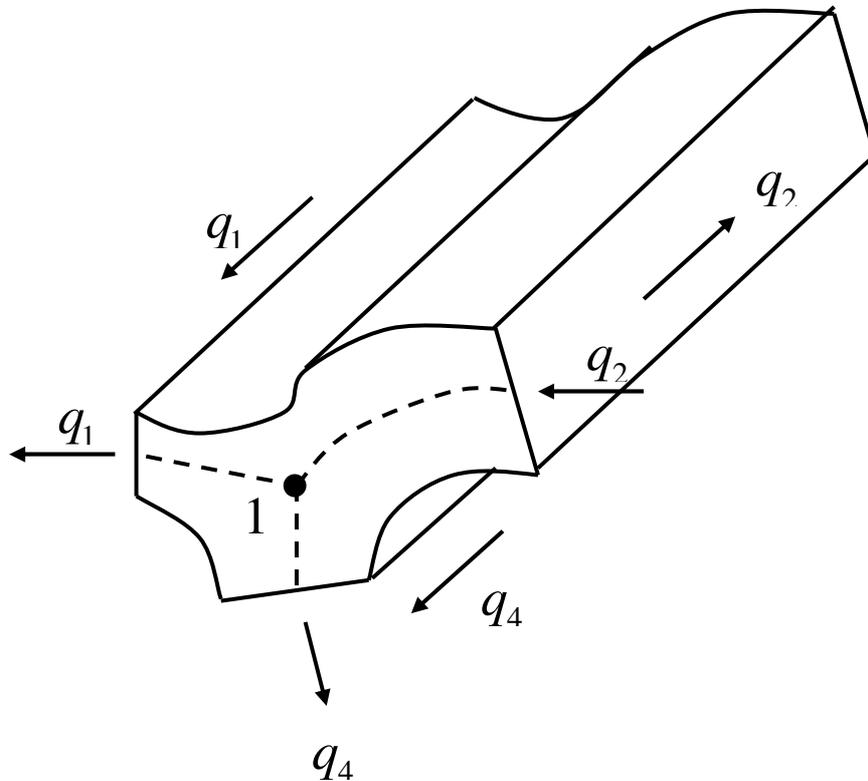
$$10.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{a1} = \frac{2G\Omega_1 \Theta}{\int_{\gamma_1} \frac{1}{b_1(s)} ds} \\ q_{a2} = \frac{2G\Omega_2 \Theta}{\int_{\gamma_2} \frac{1}{b_2(s)} ds} \\ q_{a3} = \frac{2G\Omega_3 \Theta}{\int_{\gamma_3} \frac{1}{b_3(s)} ds} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_{a1} \\ q_2 = q_{a2} \\ q_3 = q_{a3} \\ q_4 = q_{a2} - q_{a1} \\ q_5 = q_{a3} - q_{a2} \end{array} \right.$$

Dove ho anche indicato come ricavare i flussi incogniti dai flussi di anello. Fin qui abbiamo trovato un numero di equazioni pari a $n-1+m = n-1+l-(n-1) = l$ là dove le nostre incognite sono gli l flussi q_1, q_2, \dots, q_l e l'angolo di rotazione per unità di lunghezza Θ . Abbiamo bisogno dunque di una ulteriore equazione.

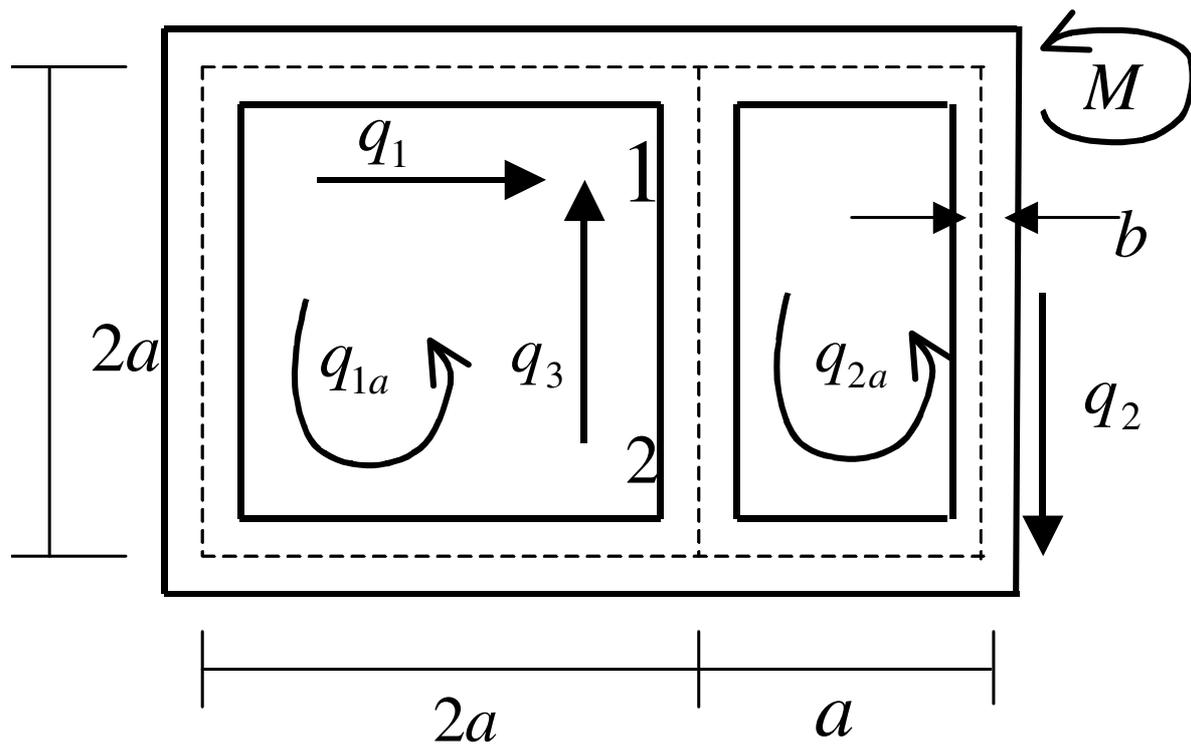
• **Equazione di bilancio meccanico globale.** Possiamo ancora imporre che le tensioni trovate in **10.29** diano luogo ad un momento totale pari al momento torcente applicato. A tale scopo si calcola il momento totale prodotto dalle tensioni, rispetto a un polo a scelta, e si impone l'uguaglianza con il momento applicato. Si tratta di una sola equazione scalare da cui si ricava immediatamente Θ , che sostituito nelle **10.29** completa la soluzione.

Equazioni ai nodi. Per delle verifiche sui risultati ottenuti possono tornare utili le seguenti relazioni fra i flussi, le quali sono molto semplici da ricavare. Immaginiamo di tagliare la trave, per la sua lunghezza, intorno a un nodo, al nodo 1 diciamo. Osservando la figura e ricordando il principio di reciprocità **1.9** l'equilibrio meccanico alla traslazione ci permette di scrivere la relazione

$$q_2 = q_1 + q_4 \Leftrightarrow -q_1 + q_2 - q_4 = 0$$



Ripetendo questo ragionamento per ciascun nodo si avrebbero 3 equazioni, ma in realtà si



scoprirebbe che una è la combinazione lineare delle altre due, cioè che le 3 equazioni sono linearmente dipendenti. Questa circostanza ha carattere generale, cioè le equazioni ai nodi linearmente indipendenti sono sempre $n-1$. Il procedimento generale dunque vuole che: **si scelgono $n-1$ nodi e per ciascuno di essi si impone che la somma algebrica dei flussi che riguardano quel nodo, sia nulla.** Nel caso della nostra sezione, scegliendo ad esempio i nodi 1 e 2, abbiamo le due equazioni L.I.

$$10.26) \begin{cases} -q_1 + q_2 + q_4 = 0 \\ -q_2 + q_3 - q_5 = 0 \end{cases}$$

• **Esempio.** Consideriamo un caso specifico per illustrare meglio il procedimento di calcolo. In figura abbiamo una sezione con 3 lati, 2 nodi e, dunque, due anelli. Fissiamo arbitrariamente i versi dei flussi in ciascun lato; fissiamo altresì i versi arbitrari dei flussi di anello. Applicando le **10.29** al presente caso abbiamo

$$\begin{cases} q_{a1} = \frac{2G\Omega_1\Theta}{\int_{\gamma_1} \frac{1}{b_1(s)} ds} = \frac{2G4a^2\Theta}{\frac{1}{b}8a} = Gab\Theta \\ q_{a2} = \frac{2G\Omega_2\Theta}{\int_{\gamma_2} \frac{1}{b_2(s)} ds} = \frac{2G2a^2\Theta}{\frac{1}{b}6a} = \frac{2Gab\Theta}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = -q_{a1} = -Gab\Theta \\ q_2 = -q_{a2} = -\frac{2Gab\Theta}{3} \\ q_3 = q_{a1} - q_{a2} = \frac{3Gab\Theta - 2Gab\Theta}{3} = \frac{Gab\Theta}{3} \end{cases}$$

Impongo ora il bilancio meccanico globale calcolando il momento totale rispetto, ad esempio al nodo 2:

$$\begin{aligned} -q_1 2a2a - q_2 2aa - q_2 a2a - q_1 2a2a &= M \Leftrightarrow 8q_1 + 4q_2 = -\frac{M}{a^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{24}{3} Gab\Theta - \frac{8}{3} Gab\Theta &= -\frac{M}{a^2} \Leftrightarrow \Theta = \frac{3M}{32Ga^3b} \end{aligned}$$

Dunque abbiamo trovato in conclusione la soluzione

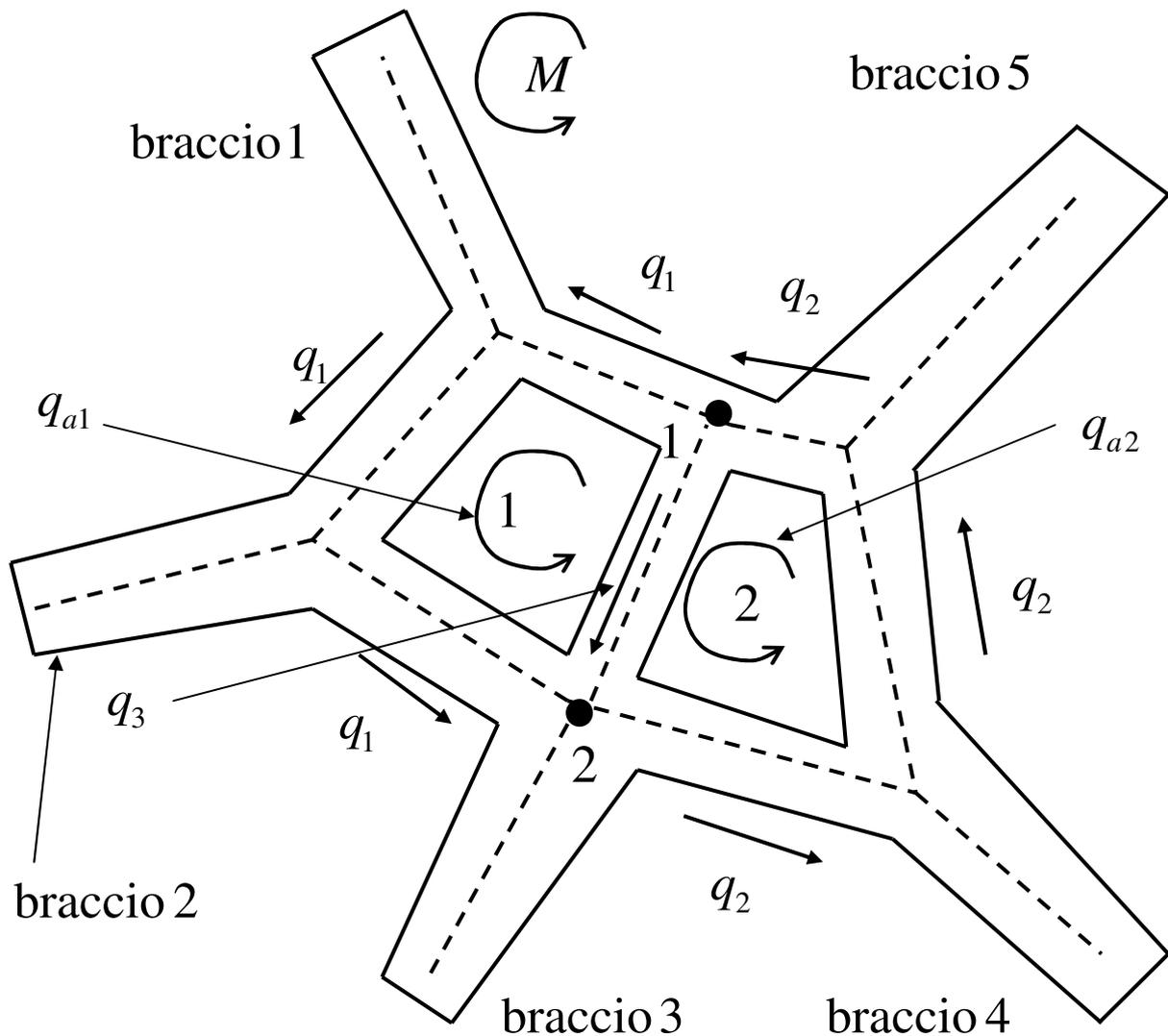
$$\begin{cases} q_1 = -q_{a1} = -\frac{3M}{32a^2} \\ q_2 = -q_{a2} = -\frac{M}{16a^2} \\ q_3 = \frac{M}{32a^2} \\ \Theta = \frac{3M}{32Ga^3b} \end{cases}$$

Possiamo verificare quanto ottenuto anche provando le equazioni ai nodi; considerando entrambi i nodi della sezione abbiamo

$$\begin{cases} q_1 + q_3 = q_2 \\ -\frac{3M}{32a^2} + \frac{M}{32a^2} = -\frac{M}{16a^2} \end{cases} \quad \leftarrow \text{verificata}$$

$$\begin{cases} q_2 = q_1 + q_3 \\ -\frac{M}{16a^2} = -\frac{3M}{32a^2} + \frac{M}{32a^2} \end{cases} \quad \leftarrow \text{verificata}$$

10.4. Torsione per sezioni sottili composite: chiuse e aperte. La trattazione di questo caso si basa sullo stesso concetto di fondo che ha permesso di risolvere il caso delle sezioni a più anelli: **si immagina che su ciascun anello e su ciascun braccio della sezione agisca una frazione (da determinare) del momento torcente complessivo; questo approccio ci permette di trattare ogni anello come una sezione sottile chiusa e ogni braccio come una sezione sottile aperta.**



Consideriamo una generica sezione che abbia due anelli e tre braccia. Per la 10.17 applicata a ciascun braccio abbiamo

$$10.27) \Theta_{braccio_i} = \frac{3M_{braccio_i}}{G \int_0^{L_i} b_{braccio_i}^3(s) ds} \Rightarrow M_{braccio_i} = \Theta_{braccio_i} G \frac{1}{3} \int_0^{L_i} b_{braccio_i}^3(s) ds, \quad i = 1,2,3,4,5$$

Applicando poi la **10.11** (seconda formula di Bredt) a ciascun anello abbiamo

$$10.28) \Theta_{anello_i} = \frac{M_{anello_i} \int_{\gamma_{anello_i}} \frac{ds}{b_{anello_i}(s)}}{4G(\Omega_{anello_i})^2} \Rightarrow M_{anello_i} = \frac{\Theta_{anello_i} 4G(\Omega_{anello_i})^2}{\int_{\gamma_{anello_i}} \frac{ds}{b_{anello_i}(s)}} \quad i = 1,2$$

Ma gli angoli di rotazione per unità di lunghezza di anelli e braccia devono coincidere, essendo tutti questi elementi appartenenti alla stessa sezione. Pertanto le **10.27**, **10.28** si riscrivono

$$10.29) \begin{cases} M_{braccio_i} = \Theta G \frac{1}{3} \int_0^{L_i} (b_{braccio_i})^3(s) ds, & i = 1,2,3,4,5 \\ M_{anello_i} = 4\Theta G \frac{(\Omega_{anello_i})^2}{\int_{\gamma_{anello_i}} \frac{ds}{b_{anello_i}(s)}} & i = 1,2 \end{cases}$$

La somma dei momenti agenti sulle singole parti della sezione deve essere pari al momento torcente agente sulla sezione. Imponendo questa condizione ricaviamo Θ :

$$\sum_{i=1}^5 M_{braccio_i} + \sum_{i=1}^2 M_{anello_i} = M \Leftrightarrow$$

$$10.30) \Theta = \frac{M/G}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^5 \int_0^{L_i} (b_{braccio_i})^3(s) ds + 4 \sum_{i=1}^2 \frac{(\Omega_{anello_i})^2}{\int_{\gamma_{anello_i}} \frac{ds}{b_{anello_i}(s)}}}$$

Noto Θ possiamo ricavare, in base alle **10.29**, i momenti agenti su ciascun braccio e dunque, in base alla **10.19**, le tensioni su ciascun braccio:

$$10.31) \tau_{zs_braccio_i} = -6 \frac{\eta M_{braccio_i}}{L \int_0^L (b_{braccio_i})^3(s) ds}, \quad i = 1,2,3,4,5$$

Possiamo poi ricavare i flussi d'anello usando le **10.28** che riporto

$$10.32) \quad q_{anello_i} = \frac{2G\Omega_{anello_i}\Theta}{\int_{\gamma_i} \frac{1}{b_{anello_i}(s)} ds} \quad i = 1,2$$

È poi immediato risalire ai flussi effettivi, a partire dai flussi d'anello. Per il caso rappresentato in figura si ha ad esempio

$$q_1 = q_{a1}, \quad q_2 = q_{a2}, \quad q_3 = q_{a2} - q_{a1}$$

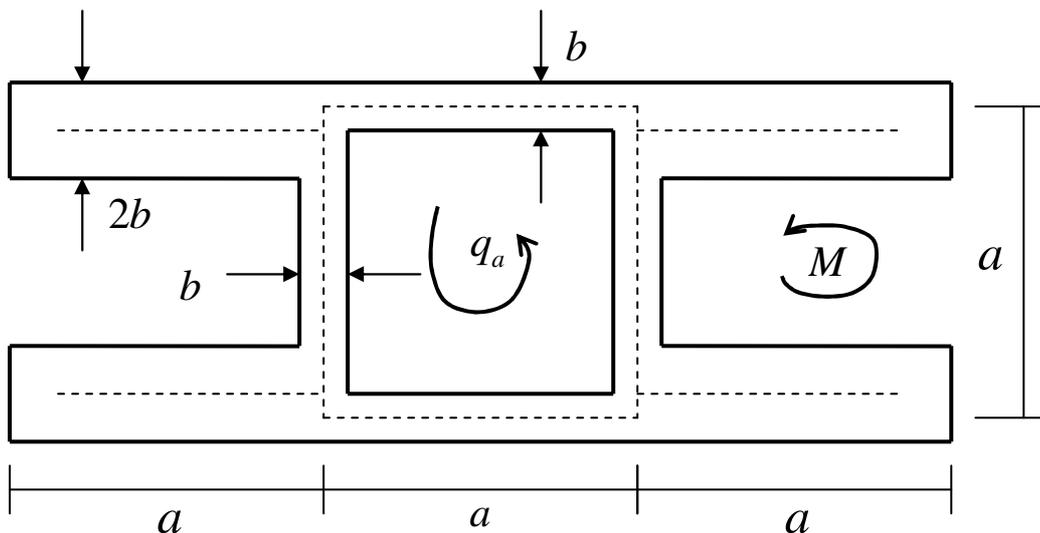
• **Esempio.** Consideriamo un caso specifico per illustrare meglio il procedimento di calcolo. In figura abbiamo una sezione con un anello e quattro braccia identiche. Calcoliamo intanto Θ . Per la **10.30** si ha

$$\Theta = \frac{M/G}{\frac{4}{3} \int_0^a (2b)^3 ds + 4 \frac{(\Omega_{anello})^2}{\int_{\gamma_{anello}} \frac{ds}{b}}} = \frac{M/G}{\frac{32}{3} b^3 a + 4 \frac{a^4}{\frac{1}{b} 4a}} = \frac{M/G}{\frac{32}{3} b^3 a + a^3 b}$$

Adesso, usando le **10.29** possiamo vedere come si distribuisce il momento torcente fra l'anello e le quattro braccia:

$$M_{braccio} = \Theta G \frac{8}{3} ab^3 = \frac{8}{3} \frac{b^2}{\frac{32}{3} b^2 + a^2} M$$

$$M_{anello_i} = \Theta G a^3 b = \frac{a^2}{\frac{32}{3} b^2 + a^2} M$$



Si vede che, essendo per ipotesi $a \gg b$, il momento si concentra sull'anello il quale, pur avendo pareti più sottili delle quattro braccia, è più resistente alla torsione, per forma; dovendo poi essere il medesimo l'angolo di rotazione per anello e braccia, ecco che il momento torcente si concentrerà sulla parte più resistente della sezione, sull'anello appunto.

Possiamo poi usare le **10.31**, **10.32** per ricavare le tensioni sulle braccia e sull'anello, rispettivamente:

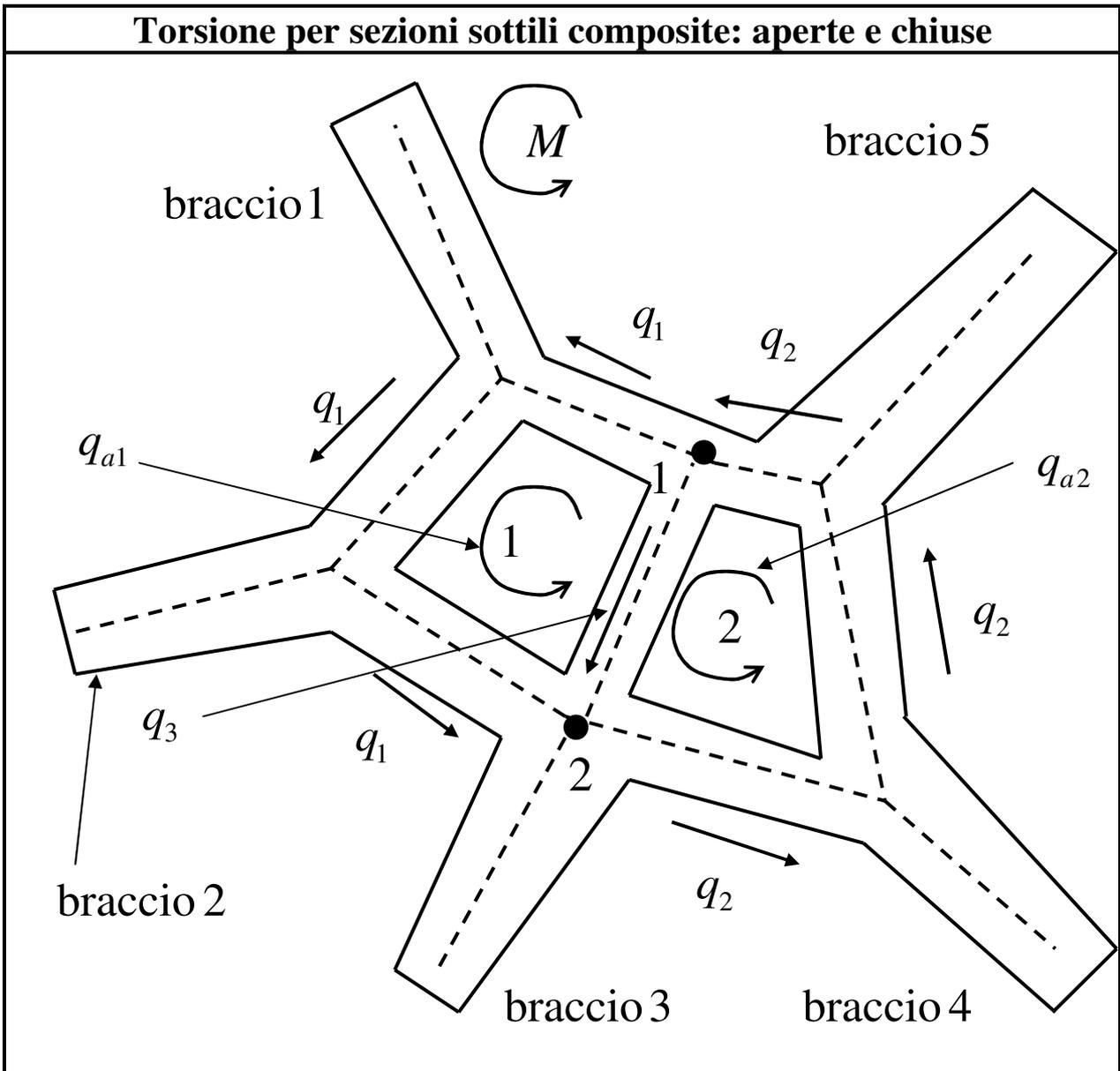
$$\tau_{zs_braccio} = -6 \frac{\eta M_{braccio}}{\int_0^L (b_{braccio})^3 ds} = -6 \frac{\eta M_{braccio}}{8b^3 a} = -\frac{2}{ab} \frac{\eta}{\frac{32}{3} b^2 + a^2} M \Rightarrow \tau_{MAX_braccio} = \frac{2}{a} \frac{M}{\frac{32}{3} b^2 + a^2}$$

$$q_{anello} = \frac{2G\Omega_{anello} \Theta}{\int_{\gamma} \frac{1}{b_{anello}} ds} = \frac{Gab\Theta}{2} = \frac{1}{2} \frac{M}{\frac{32}{3} b^2 + a^2} \Rightarrow \tau_{zs} = \frac{q_{anello}}{b} = \frac{1}{2b} \frac{M}{\frac{32}{3} b^2 + a^2}$$

Si vede come, essendo $a \gg b$, le tensioni sulle quattro braccia sono piccole rispetto a quelle che si registrano sulle pareti dell'anello. Questo appunto perché, come abbiamo visto, il momento torcente si concentra sulla parte della sezione più resistente alla torsione, dovendo poi essere l'angolo di rotazione della sezione stessa uguale per ogni sua parte.

Torsione per sezioni sottili a più anelli
Considerazioni topologiche
<p>Un anello è una maglia la quale delimita una superficie del piano della sezione in non passi nessun lato.</p> <p>Il numero complessivo di anelli è $m = l - (n - 1)$ dove l è il numero di lati e n il numero di nodi.</p>
Procedimento
<ul style="list-style-type: none"> • Si fissano arbitrariamente i versi positivi dei flussi di tensione in ciascun lato. • Si individuano gli anelli. • In ciascun anello si fissa arbitrariamente il verso positivo del relativo flusso di anello. • Si ricavano i flussi di anello (vedi formula) in funzione di Θ (incognito). • Si ricavano i momenti agenti sui singoli anelli (vedi formula). • Si impone che la somma di tali momenti sia pari al momento torcente agente

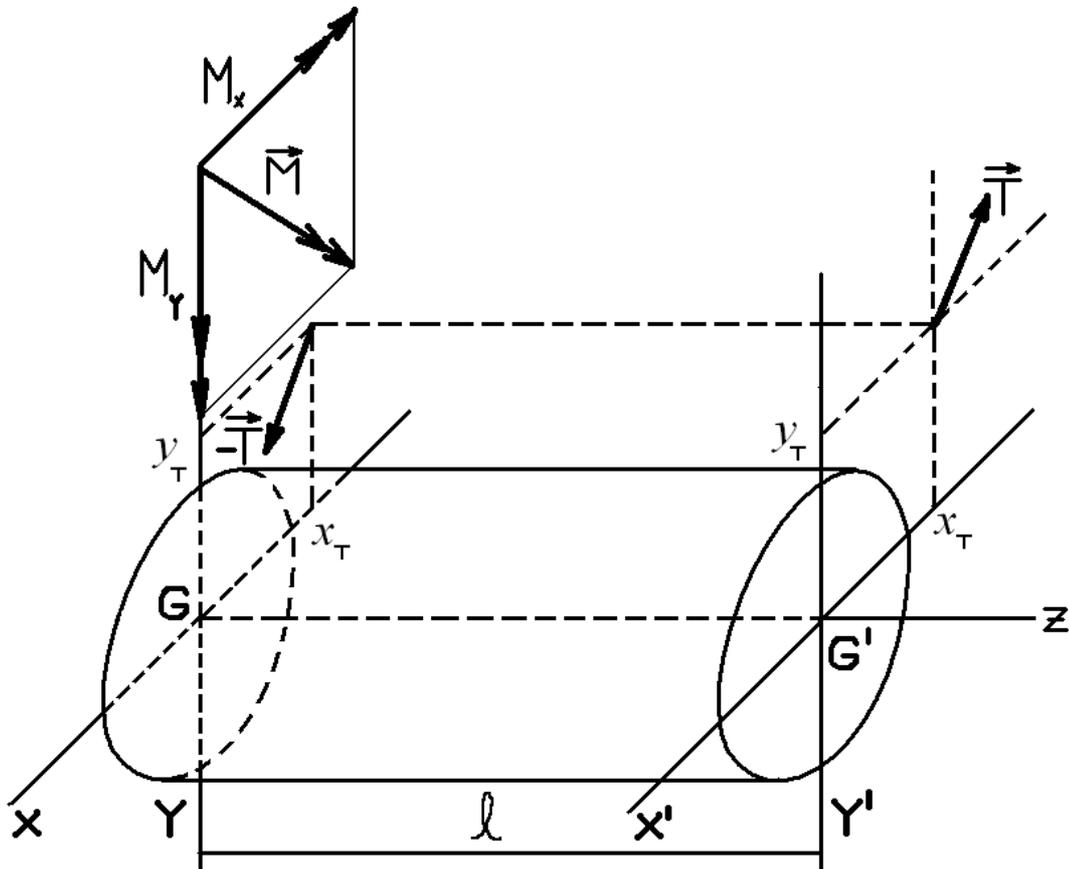
<p>sulla sezione ricavando così Θ .</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si sostituisce Θ nei flussi di anello e si ricavano da questi i flussi di tensione (dunque le tensioni) in ciascun lato.
Flussi di anello
$q_{ai} = \frac{2G\Omega_i\Theta}{\int_{\gamma_i} \frac{1}{b_i(s_i)} ds} \quad i = 1,2,\dots,m$
<p>Ω_i : area racchiusa dall'anello i - mo</p> <p>γ_i : curva chiusa che descrive l'anello i - mo</p> <p>s_i : ascissa curvilinea fissata su γ_i</p> <p>$b_i = b_i(s_i)$: spessore della sezione in corrispondenza dell'anello i - mo</p>
Momenti agenti sui singoli anelli
$M_i = 2\Omega_i q_{ai} \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^m M_i = M$



Momenti agenti sui singoli anelli
$M_{anello_i} = 4\Theta G \frac{(\Omega_{anello_i})^2}{\int_{\gamma_{anello_i}} \frac{ds}{b_{anello_i}(s)}} \quad i = 1, 2, \dots$
Momenti agenti sulle singole braccia
$M_{braccio_i} = \Theta G \frac{1}{3} \int_0^{L_i} b_{braccio_i}^3(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots$
Angolo di torsione per unità di lunghezza
$\Theta = \frac{M/G}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^5 \int_0^{L_i} (b_{braccio_i})^3(s) ds + 4 \sum_{i=1}^2 \frac{(\Omega_{anello_i})^2}{\int_{\gamma_{anello_i}} \frac{ds}{b_{anello_i}(s)}}$
Tensioni relative alle singole braccia
$\tau_{zs_braccio_i} = -2 \frac{\eta M_{braccio_i}}{\frac{1}{3} \int_0^L (b_{braccio_i})^3(s) ds}, \quad i = 1, 2, \dots$
Flussi di anello
$q_{anello_i} = \frac{2G\Omega_{anello_i}\Theta}{\int_{\gamma_i} \frac{1}{b_{anello_i}(s)} ds} \quad i = 1, 2, \dots$

Capitolo 11. Sollecitazioni semplici: flessione e taglio

11.1. Flessione e taglio per sezioni generiche. Nel punto (x_T, y_T, l) è applicato un taglio il quale è bilanciato sull'altra sezione estrema da un taglio uguale e contrario e da una coppia definita da



$$11.1) \quad \vec{M} + \vec{T} \times (-l\hat{k}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M_x = lT_y \\ M_y = -lT_x \end{cases}$$

È facile verificare che la sollecitazione complessiva così definita soddisfa l'equilibrio meccanico del solido.

Questo genere di sollecitazione produrrà, in generale, anche deformazioni di natura torsionale. Tuttavia a noi interessa sapere in quali circostanze queste deformazioni non si hanno, e solo in quei casi parleremo di sollecitazione di flessione e taglio. Procediamo ora con il metodo seminverso di soluzione.

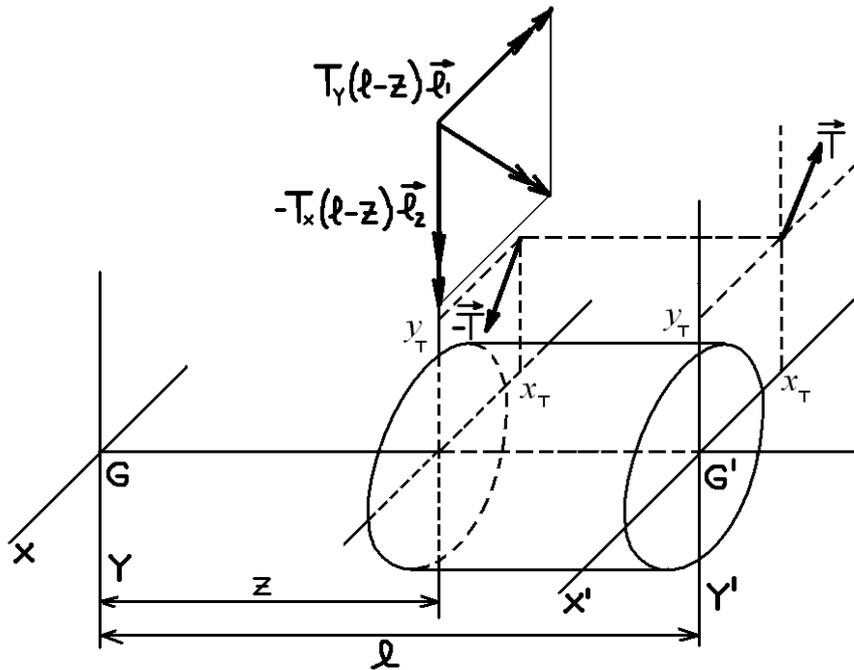
• **Ipotesi sulle tensioni.** La forza di taglio, in generale, produce un effetto di flessione e uno di torsione. Dunque ipotizzo che le uniche componenti di tensione non nulle siano quelle dovute alla flessione e quelle dovute alla torsione. Per le prime, osservando la figura, si ha

$$11.2) \quad \sigma_z = -\frac{M_y(z)}{I_y}x + \frac{M_x(z)}{I_x}y = -\frac{T_x(l-z)}{I_y}x - \frac{T_y(l-z)}{I_x}y$$

dove si è considerato che, come si evince dalla figura (dove però sono indicati i momenti agenti sull'atra faccia della generica sezione, che dunque vanno cambiati di segno per ottenere quelli agenti sulla generica sezione secondo il verso dell'asse z)

$$11.2.bis) \quad M_x(z) = -T_y(l-z) \quad M_y(z) = T_x(l-z)$$

Per quanto riguarda le seconde, facendo riferimento a quanto visto per la torsione della generica sezione, possiamo dire che esso sono le componenti τ_{zx}, τ_{zy} .



• **Verifica delle equazioni indefinite dell'equilibrio.** Le equazioni indefinite di equilibrio si scrivono

$$11.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{T_y y}{I_x} + \frac{T_x x}{I_y} = 0 \end{cases}$$

• **Verifica delle condizioni al contorno sulla superficie laterale.** Indicando con α, β le prime due componenti del versore normale al bordo della superficie della sezione, deve risultare

$$\vec{t}(x, y, z; \hat{n}) \cdot \hat{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \tau_{zx} + \beta \tau_{zy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

il che è evidentemente verificato.

• **Verifica delle condizioni al contorno sulla superficie in $z=l$.** La sollecitazione esterna può

In realtà, per quello che faremo, non è necessario che π_3 contenga l'asse z o che sia parallelo a tale asse, ma questa impostazione semplifica i calcoli. Si consideri adesso la risultante delle tensioni interne che agisce sulla faccia a nostro favore; detta \vec{R} tale forza si ha

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \vec{t}(x, y, z; \hat{n}) d\eta dz = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} d\eta dz = \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\tau_{zx} + b\tau_{zy} \end{pmatrix} d\eta dz = \hat{k} \int_{z_1}^{z_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (a\tau_{zx} + b\tau_{zy}) d\eta dz = \hat{k} \int_{z_1}^{z_2} \tau_{nz} d\eta dz\end{aligned}$$

La risultanti agenti sulle facce A_1, A_2 che diciamo \vec{R}_1, \vec{R}_2 rispettivamente, sono date da

$$\begin{aligned}\vec{R}_1 &= \int_{A_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dA = \int_{A_1} \begin{pmatrix} -\tau_{xz}(x, y, z_1) \\ -\tau_{yz}(x, y, z_1) \\ -\sigma_z(x, y, z_1) \end{pmatrix} dA \\ \vec{R}_2 &= \int_{A_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \int_{A_2} \begin{pmatrix} \tau_{xz}(x, y, z_2) \\ \tau_{yz}(x, y, z_2) \\ \sigma_z(x, y, z_1) + \frac{\partial \sigma_z(x, y, z_1)}{\partial z} \Delta z + o(\Delta z) \end{pmatrix} dA\end{aligned}$$

Imponendo l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse delle z abbiamo allora

$$\begin{aligned}R_z + R_{1z} + R_{2z} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{z_1}^{z_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (a\tau_{zx} + b\tau_{zy}) d\eta dz - \int_{A_1} \sigma_z(x, y, z_1) dA + \int_{A_2} \left(\sigma_z(x, y, z_1) + \frac{\partial \sigma_z(x, y, z_1)}{\partial z} \Delta z + o(\Delta z) \right) dA &= 0\end{aligned}$$

Applico il teorema della media integrale al primo integrale (rispetto la variabile z) e ottengo

$$\Delta z \int_{\eta_1}^{\eta_2} (a\tau_{zx}(\eta, \tilde{z}) + b\tau_{zy}(\eta, \tilde{z})) d\eta - \int_{A_1} \sigma_z(x, y, z_1) dA + \int_{A_2} \left(\sigma_z(x, y, z_1) + \frac{\partial \sigma_z(x, y, z_1)}{\partial z} \Delta z + o(\Delta z) \right) dA = 0$$

Dividendo poi la relazione per Δz ottengo

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} (a\tau_{zx}(\eta, \tilde{z}) + b\tau_{zy}(\eta, \tilde{z})) d\eta + \frac{-\int_{A_1} \sigma_z(x, y, z_1) dA + \int_{A_2} \sigma_z(x, y, z_1) dA}{\Delta z} + \int_{A_2} \left(\frac{\partial \sigma_z(x, y, z_1)}{\partial z} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \right) dA = 0$$

Mandando al limite per $\Delta z \rightarrow 0$ abbiamo che $A_2 \rightarrow A_1$ e dunque otteniamo in fine che l'equilibrio alla traslazione lungo z si scrive

$$11.6) \int_{\eta_1}^{\eta_2} (a\tau_{zx}(\eta, \tilde{z}) + b\tau_{zy}(\eta, \tilde{z})) d\eta + \int_{A_1} \frac{\partial \sigma_z(x, y, z_1)}{\partial z} dA = 0$$

Sostituendo a questa equazione la **11.2** otteniamo

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} (a\tau_{zx}(\eta, \tilde{z}) + b\tau_{zy}(\eta, \tilde{z})) d\eta + \int_{A_1} \left(\frac{T_y y}{I_x} + \frac{T_x x}{I_y} \right) dA = 0 \Leftrightarrow \int_{\eta_1}^{\eta_2} \tau_{nz}(\eta, \tilde{z}) d\eta + \int_{A_1} \left(\frac{T_y y}{I_x} + \frac{T_x x}{I_y} \right) dA = 0$$

Se applico ancora il teorema della media integrale al primo integrale ottengo

$$11.7) \tau_{nz}(\tilde{\eta}, \tilde{z}) = -\frac{1}{\Delta \eta} \frac{T_y}{I_x} \int y dA - \frac{1}{\Delta \eta} \frac{T_x}{I_y} \int x dA$$

Gli integrali rappresentano i cosiddetti **momenti statici** della figura individuata da A_1 . In analogia con i momenti di inerzia si dice che il primo integrale rappresenta il momento statico rispetto la x e il secondo quello rispetto la y . In genere i momenti statici sono indicati con la lettera S , per cui abbiamo

$$11.8) S_x = \int_{A_1} y dA \quad S_y = \int_{A_1} x dA$$

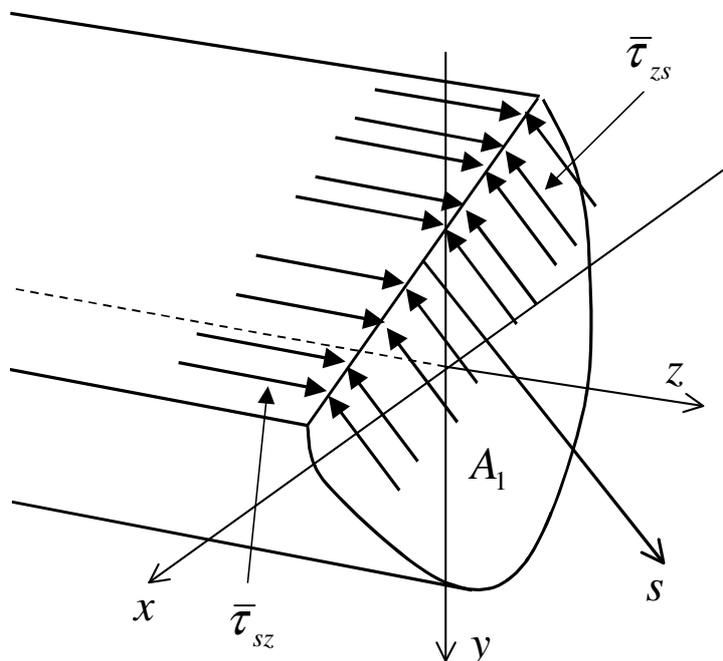
Posto poi $\tau_{nz}(\tilde{\eta}, \tilde{z}) = \bar{\tau}_{nz}$ abbiamo che la **11.7** si scrive

$$11.9) \bar{\tau}_{nz} = -\frac{1}{\Delta \eta} \frac{T_y}{I_x} S_x - \frac{1}{\Delta \eta} \frac{T_x}{I_y} S_y$$

Adesso si consideri che in genere nella pratica si preferisce utilizzare un asse s avente verso positivo opposto a quello del versore \hat{n} fin qui considerato. Inoltre è anche consuetudine usare b al posto di $\Delta \eta$. Con queste posizioni la **11.9** si riscrive

$$11.10) \bar{\tau}_{sz} = \bar{\tau}_{zs} = \frac{1}{b} \frac{T_y}{I_x} S_x + \frac{1}{b} \frac{T_x}{I_y} S_y$$

Quello che si fa nella pratica è considerare questo valore medio per le tensioni tangenziali relative alla giacitura individuata da \hat{k} , ottenendo dunque una distribuzione di tensioni tangenziali come quella indicata in figura.



• **Condizione di annullamento delle deformazioni torsionali.** Si è detto che si parla di sollecitazione di flessione e taglio quando le deformazioni di natura torsionale (rotazione della sezione e suo ingobbamento) sono nulle. Ma come facciamo a sapere quali sono le condizioni in cui

ciò si verifica? La considerazione più semplice da fare è che le deformazioni di torsione sono nulle se e solo se il lavoro di deformazione di torsione è nullo. Ma questo è fatto solo dalle componenti di tensione τ_{zx}, τ_{zy} . Dunque la sua espressione è

$$L_T = \frac{1}{2} \int_V (\tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy}) dV = \frac{1}{2} \int_V \left(\tau_{zx} \frac{M_z}{J_x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right) + \tau_{zy} \frac{M_z}{J_y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right) \right) dV$$

dove abbiamo anche sostituito le espressioni delle deformazioni di torsione, secondo le **9.11**. Dunque la condizione di annullamento delle deformazioni di torsione si scrive

$$\begin{aligned} \int_V \left(\tau_{zx} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right) + \tau_{zy} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right) \right) dV = 0 &\Leftrightarrow \int_A \left(\tau_{zx} \frac{\partial f}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial f}{\partial y} - \tau_{zx} y + \tau_{zy} x \right) dA = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_A \left(\tau_{zx} \frac{\partial f}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA + \int_A (-\tau_{zx} y + \tau_{zy} x) dA = 0 \end{aligned}$$

dove si è considerato che gli integrandi sono tutti indipendenti dalla variabile z . Se si ricorda poi la **11.4** abbiamo ancora

$$11.11) \int_A \left(\tau_{zx} \frac{\partial f}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA = T_x y_T - T_y x_T$$

Adesso riscrivo l'integrale in una forma diversa:

$$\begin{aligned} \int_A \left(\tau_{zx} \frac{\partial f}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA &= \int_A \left(\frac{\partial(\tau_{zx} f)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{zy} f)}{\partial y} - f \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) \right) dA = \\ &= \int_A \left(\frac{\partial(\tau_{zx} f)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{zy} f)}{\partial y} \right) dA - \int_A \left(-f \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) \right) dA \end{aligned}$$

Ricordando quindi la terza delle **11.3** abbiamo che l'integrale si scrive

$$\int_A \left(\tau_{zx} \frac{\partial f}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA = \int_A \left(\frac{\partial(\tau_{zx} f)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{zy} f)}{\partial y} \right) dA - \int_A \left(f \left(\frac{T_y y}{I_x} + \frac{T_x x}{I_y} \right) \right) dA$$

Sostituendo quanto trovato nella **11.11** abbiamo

$$\int_A \left(\frac{\partial(\tau_{zx} f)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{zy} f)}{\partial y} \right) dA - \int_A f \left(\frac{T_y y}{I_x} + \frac{T_x x}{I_y} \right) dA = T_x y_T - T_y x_T$$

Possiamo poi applicare il teorema della divergenza al primo integrale del primo membro ottenendo

$$\int_{\partial A} f (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y) dA - \int_A f \left(\frac{T_y y}{I_x} + \frac{T_x x}{I_y} \right) dA = T_x y_T - T_y x_T$$

Il primo integrale è nullo in accordo con le condizioni al contorno, per le tensioni, sulla superficie laterale della trave. E in definitiva, riarrangiando, abbiamo ottenuto

$$\frac{T_y}{I_x} \int_A y f dA + \frac{T_x}{I_y} \int_A x f dA = -T_y x_T + T_x y_T$$

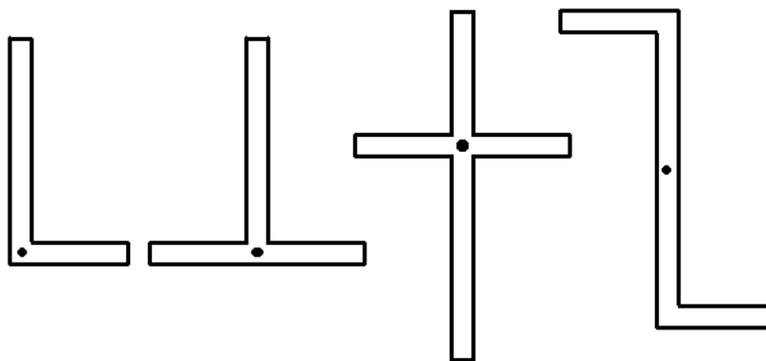
Attribuendo alternativamente valore nullo a una delle due componenti del taglio si trova che questa relazione equivale alle due seguenti

$$11.12) \begin{cases} x_T = -\frac{1}{I_x} \int_A y f(x, y) dA \\ y_T = \frac{1}{I_y} \int_A x f(x, y) dA \end{cases}$$

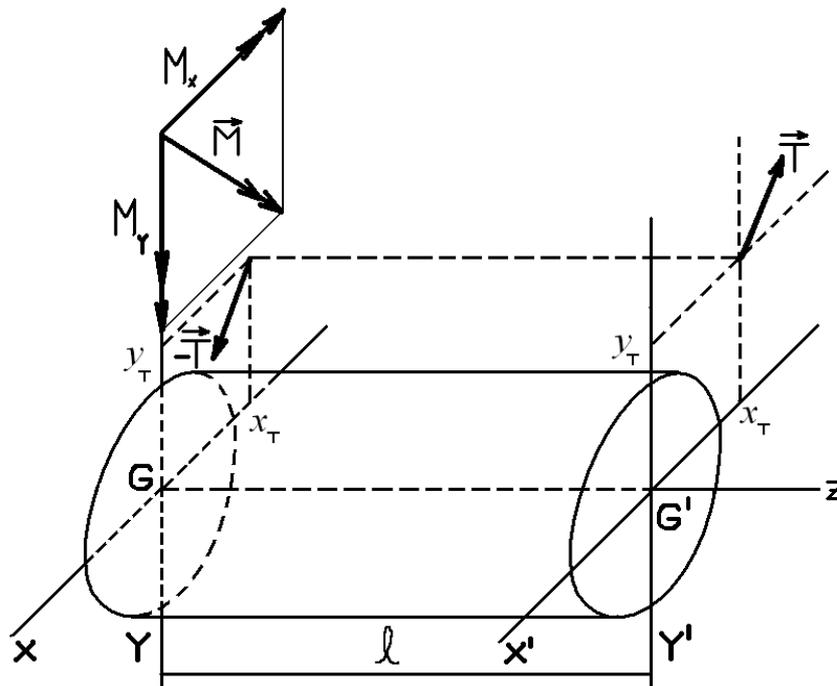
Possiamo allora concludere che un taglio \vec{T} non dà luogo a deformazioni di torsione (e dunque dà luogo a una sollecitazione di flessione e taglio) se e solo se è applicato nel punto definito dalle **11.12**. Tale punto prende il nome di **centro di taglio**.

• **Proprietà di ubicazione del centro di taglio.** A partire dalle **11.12** è possibile dimostrare le seguenti proprietà che permettono di collocare immediatamente la posizione del centro di taglio:

- se vi è un asse di simmetria, il centro di taglio si trova su di esso;
- se vi sono due assi di simmetria, il centro di taglio coincide con la loro intersezione, ovvero coincide col baricentro;
- se c'è un centro di simmetria, quello è il centro di taglio (a destra nella figura);
- se la sezione è formata da più elementi rettangolari che si intersecano in un punto (vedi figura), quel punto è centro di taglio.



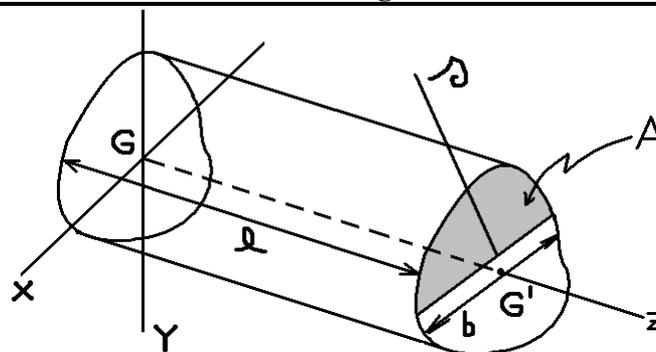
Flessione e taglio per sezioni generiche



Sollecitazione

La trave è soggetta a due tagli uguali ed opposti. In una delle due facce è applicata una coppia il cui momento bilancia quello determinato dalla coppia dei tagli. I due tagli sono applicati sul centro di taglio. Si dimostra che ciò comporta l'assenza di deformazioni di torsione.

Tensioni tangenziali



$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y}{I_x b_{A'}} \int y dA + \frac{T_x}{I_y b_{A'}} \int x dA$$

Si precisa che il verso positivo di s è entrante nell'area A' . Si precisa inoltre che i momenti di inerzia **si intendono della sezione intera** e non di A' . Si precisa infine che questo valore di tensione tangenziale è il valore medio in b .

Momenti statici

Definisco momento statico dell'area A' rispetto all'asse x l'integrale

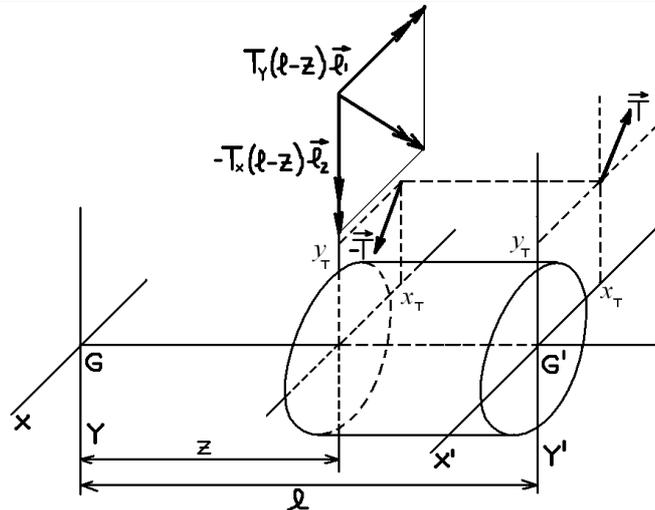
$$S_x = \int_{A'} y dA$$

Definisco momento statico dell'area A' rispetto all'asse y l'integrale

$$S_y = \int_{A'} x dA$$

Il primo momento statico indicato è il prodotto dell'area di A' per la distanza del suo baricentro dall'asse centrale x ; il secondo momento statico è il prodotto dell'area A' per la distanza del suo baricentro dall'asse centrale y .

Tensione normale



$$\sigma_z = -\frac{T_x(l-z)x}{I_y} - \frac{T_y(l-z)y}{I_x}$$

Rotazione della generica sezione

$$d\varphi_x(z) = \frac{|T_y|(l-z)}{I_x E} dz \Rightarrow \varphi_x(z) = \frac{|T_y|}{I_x E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z$$

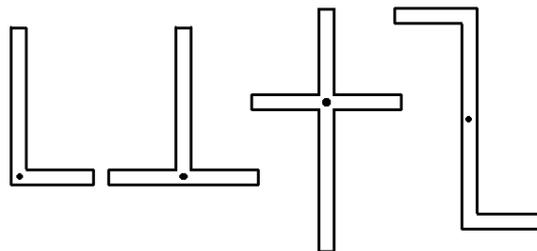
$$d\varphi_y(z) = \frac{|T_x|(l-z)}{I_y E} dz \Rightarrow \varphi_y(z) = \frac{|T_x|}{I_y E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z$$

Coordinate del centro di taglio

$$x_T = -\frac{1}{I_x} \int_A y f(x, y) dA \quad y_T = \frac{1}{I_y} \int_A x f(x, y) dA$$

Proprietà di ubicazione del centro di taglio

- se vi è un asse di simmetria, il centro di taglio si trova su di esso;
- se vi sono due assi di simmetria, il centro di taglio coincide con la loro intersezione, ovvero coincide col baricentro;
- se c'è un centro di simmetria, quello è il centro di taglio (a destra nella figura);
- se la sezione è formata da più elementi rettangolari che si intersecano in un punto (vedi figura), quel punto è centro di taglio.



11.2. Flessione e taglio per sezioni compatte con un piano di simmetria e con taglio contenuto in tale piano. Osserviamo intanto che il taglio risulta applicato nel centro di taglio, dunque ci si trova realmente in un caso di sollecitazione di flessione e taglio.

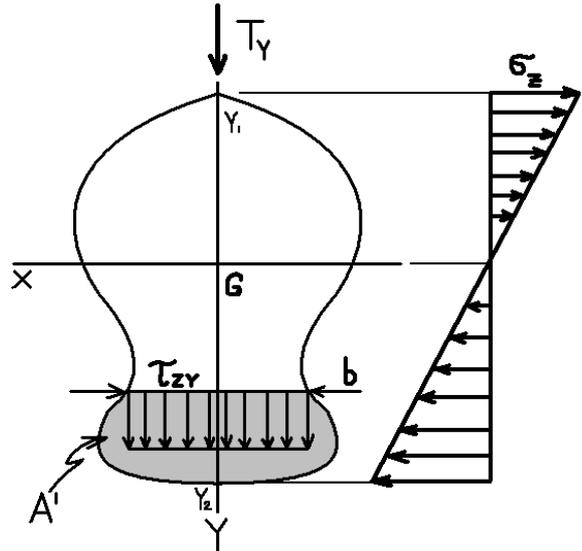
• **Tensione normale.** Per quanto riguarda la componente σ_z la 11.2 si scrive

$$11.13) \sigma_z(y, z) = -\frac{T_y(l-z)y}{I_x}$$

e l'andamento è quello indicato in figura.

• **Tensioni tangenziali.** Considerata l'area A' evidenziata in figura, la 11.10 si scrive

$$11.14) \bar{\tau}_{zy}(y) = \frac{1}{b(y)} \frac{T_y}{I_x} S_x(y) = \frac{1}{b(y)} \frac{T_y}{I_x} \int_{A'} y dA$$



Cerchiamo ora il valore di y per il quale si ha il valore massimo. Derivando si ha

$$\frac{d\bar{\tau}_{zy}(y)}{dy} = \frac{T_y}{I_x} \left(-\frac{db(y)}{dy} \frac{1}{b^2(y)} \int_{A'} y dA + \frac{1}{b(y)} \frac{d \int_{A'} y dA}{dy} \right)$$

Ma si può scrivere $\int_{A'} y dA = \int_{y_2}^y tb(t) dt$ e dunque

$$\frac{d\bar{\tau}_{zy}(y)}{dy} = \frac{T_y}{I_x} \left(-\frac{db(y)}{dy} \frac{1}{b^2(y)} \int_{A'} y dA + \frac{1}{b(y)} (-yb(y)) \right) = \frac{T_y}{I_x} \left(-\frac{db(y)}{dy} \frac{1}{b^2(y)} \int_{A'} y dA - y \right)$$

dove si sono sfruttate le regole di derivazione per funzioni integrali. Se ne conclude pertanto che la componente $\bar{\tau}_{zy}$ massima si ha in

$$11.15) y = -\frac{db(y)}{dy} \frac{1}{b^2(y)} \int_{A'} y dA$$

Per ricavare la componente τ_{zy} si può applicare di nuovo la 11.10, ma si può anche procedere in modo diverso e cioè imponendo la condizione al contorno:

$$11.16) \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$$

con \hat{n} vettore normale al bordo della sezione. Questa condizione impone che il vettore di componenti τ_{zx}, τ_{zy} sia tangente punto per punto al bordo della sezione. Dunque abbiamo intanto trovato (vedi figura) che

$$11.17) \quad \tau_{zx}\left(\frac{b(y)}{2}, y\right) = -\tau_{zy}(y)\tan(\alpha(y)) \quad \tau_{zx}\left(-\frac{b(y)}{2}, y\right) = \tau_{zy}(y)\tan(\alpha(y))$$

Questo però vale solo sulla frontiera della sezione. Adesso consideriamo che la terza delle **11.3** si scrive in questo caso

$$\frac{\partial \tau_{zx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}(y)}{\partial y} + \frac{T_y \cdot y}{I_x} = 0$$

Derivando rispetto x e successivamente integrando, sempre rispetto x , otteniamo

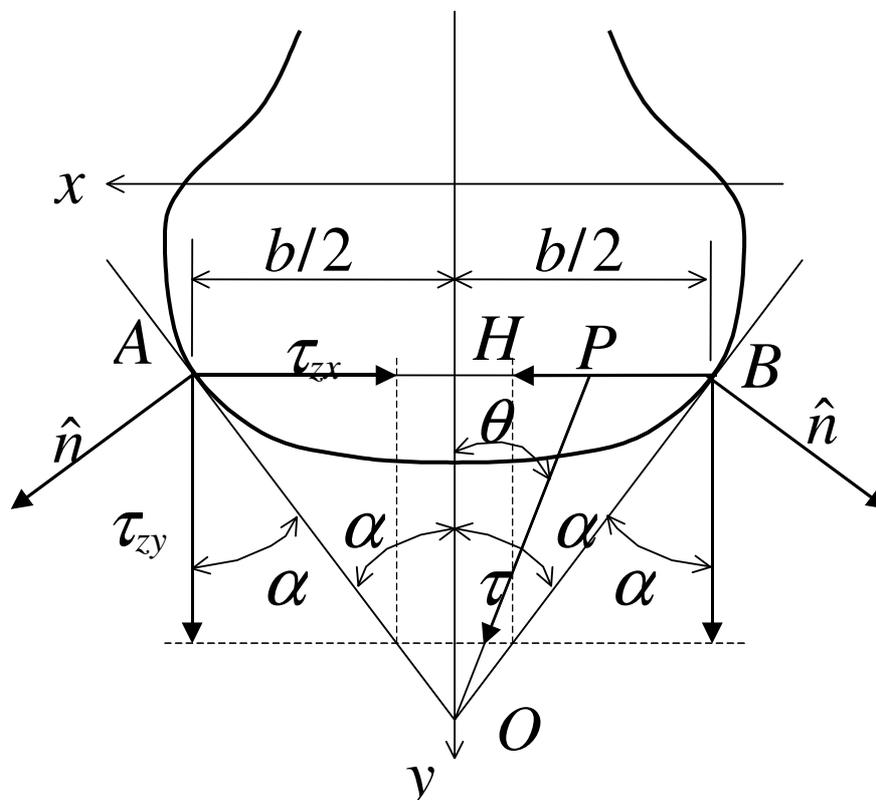
$$11.18) \quad \frac{\partial^2 \tau_{zx}(x, y)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}(x, y)}{\partial x} = \varphi(y) \Rightarrow \tau_{zx}(x, y) = x\varphi_1(y) + \varphi_2(y)$$

Sostituendo quanto ottenuto nelle **11.16** si ha

$$\frac{b(y)}{2}\varphi_1(y) + \varphi_2(y) = -\tau_{zy}(y)\tan(\alpha(y)) \quad -\frac{b(y)}{2}\varphi_1(y) + \varphi_2(y) = \tau_{zy}(y)\tan(\alpha(y))$$

Supponendo $\varphi_2(y) = 0$ abbiamo allora

$$\varphi_1(y) = -\frac{2}{b(y)}\tau_{zy}(y)\tan(\alpha(y))$$



Sostituendo questo risultato nella **11.17** abbiamo in conclusione

$$11.19) \tau_{zx}(x, y) = -\frac{2x}{b(y)} \tau_{zy}(y) \tan(\alpha(y))$$

Voglio adesso provare che comunque prendo un punto P , il vettore di coordinate $\tau_{zx}(P), \tau_{zy}(P)$ punta sempre il polo O . A tale scopo basterà dimostrare che

$$11.20) \frac{\tau_{zx}(P)}{\tau_{zy}(P)} = \tan \theta = \frac{\overline{HP}}{\overline{OH}}$$

Ma, considerando la figura, abbiamo

$$\begin{cases} \overline{OH} = \overline{OB} \cos \alpha \\ \overline{OB} \sin \alpha = \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \overline{OH} = \frac{b}{2 \tan \alpha} \Rightarrow \frac{\overline{HP}}{\overline{OH}} = \frac{2(-x) \tan \alpha}{b}$$

Dunque la **11.20**, considerando la **11.19**, si scrive

$$\frac{-\frac{2x}{b(y)} \tau_{zy}(y) \tan(\alpha(y))}{\tau_{zy}(y)} = \frac{2(-x) \tan \alpha(y)}{b(y)}$$

Ed è immediato constatare che l'uguaglianza è verificata.

• **Angolo di rotazione delle sezioni.** Nella sollecitazione di flessione e taglio ci si aspetta, in analogia col caso della flessione, che la generica sezione subisca una rotazione a causa dell'azione del momento flettente. Ma il caso della flessione e taglio è caratterizzato, come sappiamo (vedi le **11.2.bis**) da un momento flettente che varia linearmente con la z . In ogni caso resta valida la **8.61** (o la **8.48** se si preferisce) la quale, in considerazione del fatto che è presente solo la componente x del momento flettente e che deve essere applicata a un tratto infinitesimo di trave (per il quale il momento flettente si considera costante), si scrive

$$d\varphi_x(z) = \frac{|M_x|}{I_x E} dz$$

Considerando poi la prima delle **11.2.bis** si ha

$$11.21) d\varphi_x(z) = \frac{|T_y|(l-z)}{I_x E} dz$$

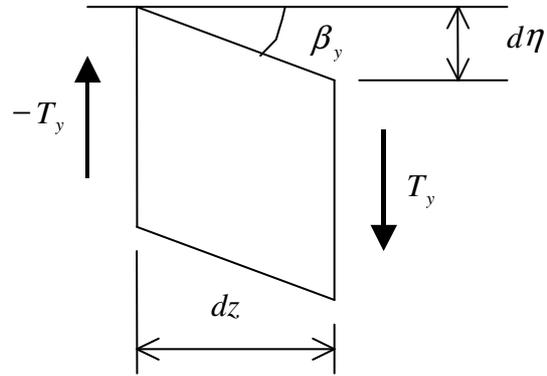
Integrando abbiamo il valore dell'angolo di rotazione della sezione in z

$$\varphi_x(z) = \frac{|T_y|}{I_x E} \int_0^z (l-t) dt = -\frac{|T_y|}{I_x E} \int_0^z (l-t) d(l-t) = -\frac{|T_y|}{I_x E} \left. \frac{(l-t)^2}{2} \right|_0^z = -\frac{|T_y|}{I_x E} \frac{(l-z)^2 - l^2}{2} = -\frac{|T_y|}{I_x E} \frac{z^2 - 2lz}{2}$$

Dunque in definitiva

$$11.22) \varphi_x(z) = \frac{|T_y|}{I_x E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z$$

Si può osservare che la sezione in $z=l$ subisce una rotazione pari a quella che, in una flessione retta subirebbe se fosse sottoposta a un momento $M_x = T_y l$, mentre per $z < l$ la rotazione è sempre inferiore a quella che si avrebbe nel caso della flessione retta citata. Queste considerazioni valgono in generale per la flessione e taglio, dunque sono applicabili anche al caso della sezione generica, dove però, in generale, la sezione ruoterà sia intorno all'asse x che intorno all'asse y , essendovi in generale due componenti del taglio.



• **Slittamento relativo fra le sezioni.** Nella sollecitazione di flessione e taglio si capisce intuitivamente come ci si debba aspettare uno slittamento relativo fra le sezioni. Vogliamo valutare l'entità dello slittamento e per farlo ricorriamo a considerazioni di carattere energetico. Prendendo un elemento della trave di lunghezza infinitesima dz il lavoro che il taglio fa per far slittare di $d\eta$ la sezione in $z + dz$, rispetto alla sezione in z , è dato, secondo il teorema di Clapeyron, da

$$11.23) dL = \frac{1}{2} T_y d\eta = \frac{1}{2} T_y \beta_y dz$$

Usando invece l'espressione **6.26** del potenziale elastico complementare, questo stesso lavoro si scrive

$$\begin{aligned} dL &= \int_z^{z+dz} \int_A \Psi dAdz = \frac{1}{2G} \int_z^{z+dz} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dAdz = \frac{1}{2G} \int_z^{z+dz} \int_A \left(\frac{4x^2}{b^2(y)} \tau_{zy}^2(y) \tan^2(\alpha(y)) + \tau_{zy}^2(y) \right) dAdz = \\ &= \frac{1}{2G} dz \int_{y_1}^{y_2} \int_{-b(y)/2}^{b(y)/2} \tau_{zy}^2(y) \left(1 + \frac{4x^2}{b^2(y)} \tan^2(\alpha(y)) \right) dx dy = \frac{1}{2G} dz \int_{y_1}^{y_2} \tau_{zy}^2(y) \left(x + \frac{4x^3}{3b^2(y)} \tan^2(\alpha(y)) \right) \Big|_{-b(y)/2}^{b(y)/2} dy = \\ &= \frac{1}{2G} dz \int_{y_1}^{y_2} \tau_{zy}^2(y) \left(\frac{b(y)}{2} + \frac{4b(y)}{24} \tan^2(\alpha(y)) + \frac{b(y)}{2} + \frac{4b(y)}{24} \tan^2(\alpha(y)) \right) dy = \\ &= \frac{1}{2G} dz \int_{y_1}^{y_2} \tau_{zy}^2(y) b(y) \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\alpha(y)) \right) dy \end{aligned}$$

dove ho sostituito la **11.19**. Sostituendo anche la **11.14** si ha

$$11.24) dL = \frac{1}{2G} \frac{T_y^2}{I_x^2} dz \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{A'} y dA \right)^2 \frac{1}{b(y)} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\alpha(y)) \right) dy$$

Confrontando le **11.23**, **11.24** abbiamo allora

$$11.25) \beta_y = \frac{1}{G} \frac{T_y}{I_x^2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{A'} y dA \right)^2 \frac{1}{b(y)} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\alpha(y)) \right) dy$$

Se definisco **fattore di taglio** χ_y la grandezza adimensionale

$$11.26) \chi_y \stackrel{\Delta}{=} \frac{\beta_y GA}{T_y} = \frac{A}{I_x^2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{A'} y dA \right)^2 \frac{1}{b(y)} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\alpha(y)) \right) dy$$

ottengo infine per lo slittamento relativo $d\eta = \beta_y dz$ l'espressione

$$11.27) d\eta = \chi_y \frac{T_y}{GA} dz$$

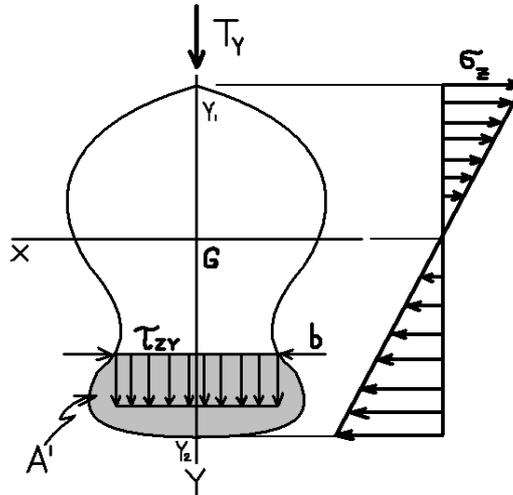
• **Lavoro di deformazione.** Calcolo il lavoro di deformazione attraverso l'espressione **6.26** del potenziale elastico complementare

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2E} \sigma_z^2 + \frac{1}{2G} (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = \frac{1}{2E} \left(-\frac{T_y(l-z)y}{I_x} \right)^2 + \frac{1}{2G} \bar{\tau}_{zy}^2 \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \tan^2 \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{2E} \left(\frac{T_y(l-z)y}{I_x} \right)^2 + \frac{1}{2G} \frac{1}{b^2(y)} \frac{T_y^2}{I_x^2} \left(\int_{A'} y dA \right)^2 \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \tan^2 \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{2E} \frac{T_y^2(l-z)^2 y^2}{I_x^2} + \frac{1}{2G} \frac{1}{b^2(y)} \frac{T_y^2}{I_x^2} \left(\int_{A'} y dA \right)^2 \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \tan^2 \alpha \right) \Rightarrow \\ L &= \frac{1}{2E} \int_A \int_0^l \frac{T_y^2(l-z)^2 y^2}{I_x^2} dz dA + \frac{1}{2G} \int_0^l \int_A \frac{1}{b^2(y)} \frac{T_y^2}{I_x^2} \left(\int_{A'} y dA \right)^2 \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \tan^2 \alpha \right) dA dz = \\ &= -\frac{1}{2E} \int_A \left(\frac{T_y^2(l-z)^3 y^2}{3I_x^2} \right)_{z=0}^{z=l} dA + \frac{1}{2G} \int_0^l \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{b^2(y)} \frac{T_y^2}{I_x^2} \left(\int_{A'} y dA \right)^2 \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \tan^2 \alpha \right) b(y) dy dz = \\ &= \frac{l^3}{6E} \frac{T_y^2}{I_x^2} \int_A y^2 dA + \frac{T_y^2}{2GA} \int_0^l \frac{A}{I_x^2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{b(y)} \left(\int_{A'} y dA \right)^2 \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \tan^2 \alpha \right) dy dz \end{aligned}$$

Nell'integrale del primo addendo si riconoscono il momento centrale di inerzia rispetto x . Nel secondo addendo si riconosce subito, in base alla **11.26**, il fattore di taglio χ_y . Dunque si ha

$$11.28) L = \frac{l^3}{6E} \frac{T_y^2}{I_x} + \frac{l}{2GA} T_y^2 \chi_y$$

Flessione e taglio per sezioni con un piano di simmetria e taglio giacente in tale piano



Centro di taglio

Il centro di taglio si trova sull'asse di simmetria, dunque il taglio è applicato nel centro di taglio.

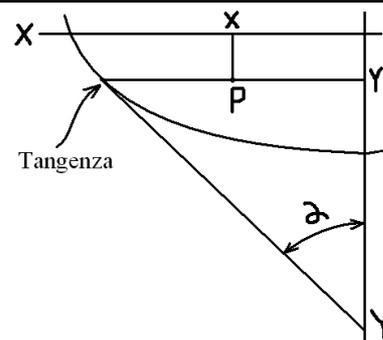
Tensioni tangenziali

$$\bar{\tau}_{zy}(y) = \frac{1}{b(y)} \frac{T_y}{I_x} S_x(y) = \frac{1}{b(y)} \frac{T_y}{I_x} \int_{A'} y dA$$

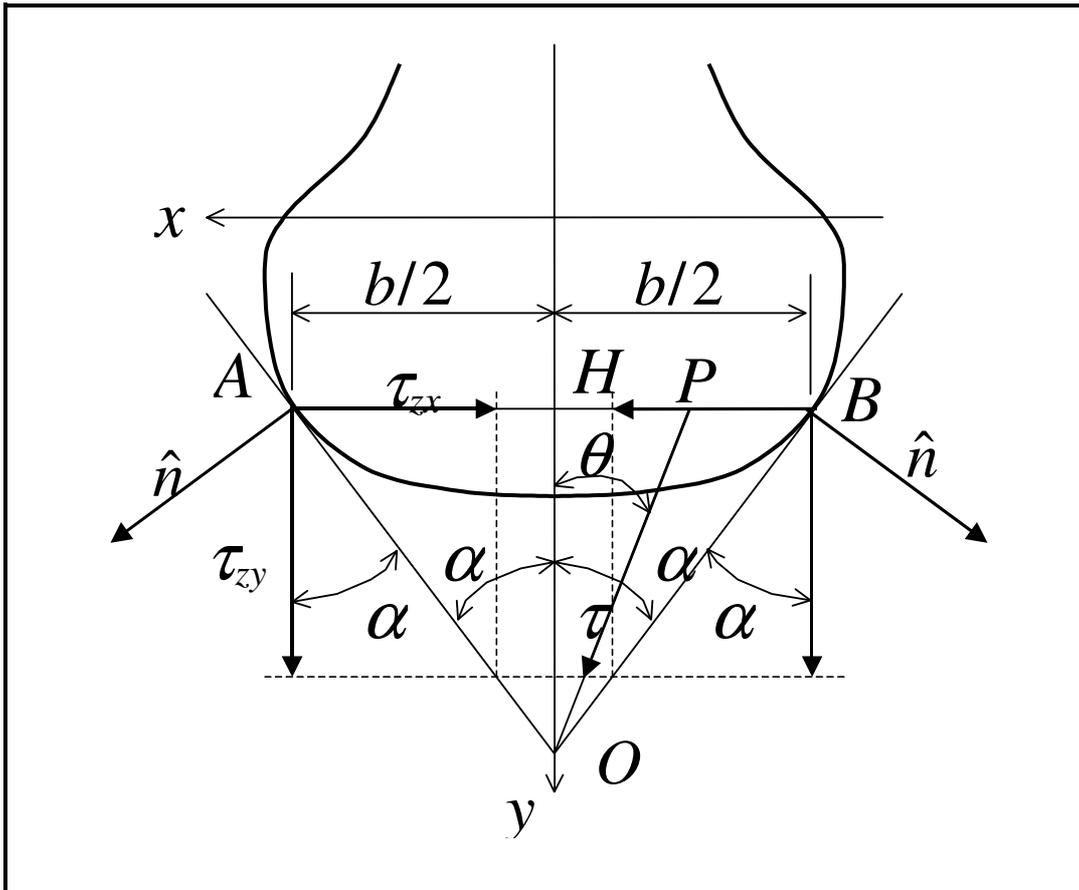
$$MAX(\bar{\tau}_{zy}) \quad per \quad y = \frac{db(y)}{dy} \frac{1}{b^2(y)} \int_{A'} y dA$$

L'altra componente della tensione tangenziale si può ricavare o seguendo il procedimento consueto, o utilizzando la formula seguente:

$$\tau_{zx}(P) = -\frac{2x\bar{\tau}_{zy}}{b} \tan \alpha$$



Inoltre il vettore $(\tau_{zx}(P), \tau_{zy}(P))$ ha sempre la direzione della retta che passa per i punti O, P .



Tensioni normali

$$\sigma_z = -\frac{T_y(l-z)y}{I_x}$$

Angolo di rotazione della sezione intorno all'asse x

$$d\varphi_x(z) = \frac{|T_y|(l-z)}{I_x E} dz \Rightarrow \varphi_x(z) = \frac{|T_y|}{I_x E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z$$

Slittamento relativo e Fattore di taglio

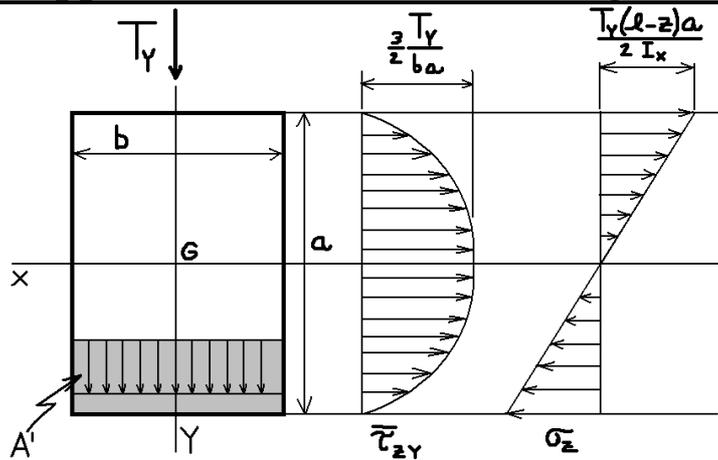
$$d\eta = \chi_y \frac{T_y}{GA} dz \quad \text{con} \quad \chi_y = \frac{A}{I_x^2} \int_{y_1}^{y_2} S_x^2(y) \frac{1}{b(y)} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\alpha(y)) \right) dy$$

Lavoro di deformazione

$$L = \frac{l^3 T_y^2}{6EI_x} + \frac{l T_y^2 \chi_y}{2GA}$$

Ho indicato l la lunghezza della trave.

Applicazione alla sezione rettangolare



Centro di taglio

Il centro di taglio si trova su entrambi gli assi di simmetria, ovvero coincide con il baricentro.

Tensioni tangenziali

$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{3 T_y}{2 b a^3} (a^2 - 4 y^2) \quad \text{MAX}(\bar{\tau}_{zy}) = \frac{3 T_y}{2 b a} \quad \text{per } y = 0$$

$$\bar{\tau}_{zx} = 0$$

Tensioni normali

$$\sigma_z = -\frac{T_y (l - z) y}{I_x}$$

Angolo di rotazione della sezione intorno all'asse x

$$d\varphi(z) = \frac{|T_y| (l - z)}{I_x E} dz \Rightarrow \varphi(z) = \frac{|T_y|}{I_x E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z$$

Slittamento relativo e Fattore di taglio

$$d\eta = \chi_y \frac{T_y}{GA} dz \quad \text{con } \chi_y = \frac{6}{5}$$

Momento statico e Momento di inerzia

$$S_x = \frac{b}{2} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) \quad I_x = ab \frac{b^2}{12}$$

Lavoro di deformazione

$$L = 2 \frac{l^3 T_y^2}{E a b^3} + \frac{3 l T_y^2}{5 GA}$$

Ho indicato l la lunghezza della trave.

$$\chi_y = \frac{A}{I_x^2} \int_{y_1}^{y_2} S_x^2(y) \frac{1}{b(y)} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\alpha(y)) \right) dy = \frac{A}{I_x^2} \int_{-a/2}^{a/2} S_x^2(y) \frac{1}{b} dy = \frac{A}{I_x^2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(b \left(\frac{a}{2} - y \right) \left(\frac{a}{2} - \frac{\frac{a}{2} - y}{2} \right) \right)^2 \frac{1}{b} dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{I_x^2} \int_{-a/2}^{a/2} b \left(\left(\frac{a}{2} - y \right) \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4} + \frac{y}{2} \right) \right)^2 dy = \frac{A}{I_x^2} \int_{-a/2}^{a/2} b \left(\frac{a}{2} - y \right)^2 \left(\frac{a}{4} + \frac{y}{2} \right)^2 dy = \frac{A}{I_x^2} \int_{-a/2}^{a/2} b \left(\frac{a^2}{8} + \frac{ay}{4} - \frac{ay}{4} - \frac{y^2}{2} \right)^2 dy = \\
&= \frac{A}{I_x^2} \frac{b}{4} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right)^2 dy = \frac{ab^2}{4I_x^2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{a^4}{16} + y^4 - \frac{a^2 y^2}{2} \right) dy = \frac{ab^2}{4I_x^2} \left(\frac{a^4 y}{16} + \frac{y^5}{5} - \frac{a^2 y^3}{6} \right)_{-a/2}^{a/2} = \\
&= \frac{ab^2}{4I_x^2} \left(\frac{a^5}{32} + \frac{a^5}{32 \cdot 5} - \frac{a^5}{8 \cdot 6} \right)_{-a/2}^{a/2} = \frac{ab^2}{4I_x^2} \left(\frac{a^5}{32} + \frac{a^5}{32 \cdot 5} - \frac{a^5}{8 \cdot 6} + \frac{a^5}{32} + \frac{a^5}{32 \cdot 5} - \frac{a^5}{8 \cdot 6} \right) = \frac{ab^2}{4I_x^2} \left(\frac{2a^5}{32} + \frac{2a^5}{32 \cdot 5} - \frac{2a^5}{8 \cdot 6} \right) = \\
&= \frac{ab^2}{4I_x^2} \left(\frac{10a^5}{32 \cdot 5} + \frac{2a^5}{32 \cdot 5} - \frac{4a^5}{32 \cdot 3} \right) = \frac{ab^2}{4I_x^2} \left(\frac{30a^5}{32 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6a^5}{32 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{20a^5}{32 \cdot 3 \cdot 5} \right) = \frac{144}{1} \frac{1}{8 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

Applicazione alla sezione circolare	
Centro di taglio	
Il centro di taglio si trova su entrambi gli assi di simmetria, ovvero coincide con il baricentro.	
Tensioni tangenziali	
$\bar{\tau}_{zy} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin^2 \varphi \quad \text{MAX}(\bar{\tau}_{zy}) = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \quad \text{per } y=0$ $\tau_{zx} = -\frac{2x}{b} \bar{\tau}_{zy} \cot \varphi = -\frac{4T_y}{3\pi R^3} x \cos \varphi \quad \text{MAX}(\tau_{zx}) = \pm \frac{4T_y}{3\pi R^2} \sin \varphi \cos \varphi \quad \text{per } x = \pm \frac{b}{2}$	
Tensioni normali	
$\sigma_z = -\frac{T_y(l-z)y}{I_x}$	
Angolo di rotazione della sezione intorno all'asse x	
$d\varphi(z) = \frac{ T_y (l-z)}{I_x E} dz \Rightarrow \varphi(z) = \frac{ T_y }{I_x E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z$	
Slittamento relativo e Fattore di taglio	
$d\eta = \chi_y \frac{T_y}{GA} dz \quad \text{con } \chi_y = \frac{32}{27}$	

Momento statico e Momento di inerzia
$S_x = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \varphi \quad I_x = \pi R^2 \frac{R^2}{4}$
Lavoro di deformazione
$L = \frac{2}{3} \frac{l^3 T_y^2}{E \pi R^4} + \frac{16}{27} \frac{l T_y^2}{GA}$
Ho indicato l la lunghezza della trave.

Applicazione alla sezione a doppio T
Centro di taglio
Il centro di taglio si trova su entrambi gli assi di simmetria, ovvero coincide con il baricentro.
Tensioni tangenziali sull'ala inferiore
$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x}{I_x b} \quad S_x = \frac{bH\xi}{2} \quad I_x = bB \frac{H^2}{2} + \frac{\delta H^3}{12}$
Tensioni tangenziali sull'ala superiore
In modulo uguali alle precedenti ma di verso opposto.
Tensioni tangenziali sull'anima
$\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y S_x}{I_x \delta} \quad S_x = \frac{BbH}{2} + \delta \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) \quad I_x = bB \frac{H^2}{2} + \frac{\delta H^3}{12}$
Tensioni normali
$\sigma_z = -\frac{T_y (l-z)y}{I_x}$
Angolo di rotazione della sezione intorno all'asse x
$d\varphi(z) = \frac{ T_y (l-z)}{I_x E} dz \Rightarrow \varphi(z) = \frac{ T_y }{I_x E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z$

Slittamento relativo e Fattore di taglio

$$d\eta = \chi_y \frac{T_y}{GA} dz \quad \text{con} \quad \chi_y = \frac{A}{H\delta} \frac{1}{10 + \frac{bB}{\delta H} + 3 \frac{b^2 B^2}{\delta^2 H^2} + \frac{1}{2} \frac{bB^3}{\delta H^3}} \frac{1}{12 \left(1 + 6 \frac{bB}{\delta H}\right)^2}$$

In particolare per $b = \delta, B = H$ si ha $\chi_y = 3,379$

Momento di inerzia

$$I_x = bB \frac{H^2}{2} + \frac{\delta H^3}{12}$$

Lavoro di deformazione

$$L = \frac{l^3 T_y^2}{6EI_x} + \frac{l T_y^2 \chi_y}{2GA}$$

Ho indicato l la lunghezza della trave.

$$\begin{aligned} \chi_y &= \frac{A}{I_x^2} \int_0^L \frac{S_x^2(s)}{b(s)} ds = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\int_0^{B/2} \frac{1}{b} \left(2(b\xi) \frac{H}{2} \right)^2 d\xi + \frac{1}{\delta} \int_{H/2}^{-H/2} \left(bB \frac{H}{2} + \delta \left(\frac{H}{2} - y \right) \left(y + \frac{H}{2} - y \right) \right)^2 ds + \int_0^{B/2} \frac{1}{b} \left((bB) \frac{H}{2} - 2(b\xi) \frac{H}{2} \right)^2 d\xi \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{bH^2 B^3}{24} + \frac{1}{\delta} \int_{-H/2}^{H/2} \left(bB \frac{H}{2} + \frac{\delta}{2} (H - 2y) \left(\frac{y}{2} + \frac{H}{4} \right) \right)^2 ds + \frac{bH^2}{4} \int_0^{B/2} (B - 2\xi)^2 d\xi \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{bH^2 B^3}{24} + \frac{1}{\delta} \int_{-H/2}^{H/2} \left(bB \frac{H}{2} + \frac{\delta}{2} (H - 2y) \left(\frac{y}{2} + \frac{H}{4} \right) \right)^2 ds + \frac{bH^2}{4} \int_0^{B/2} (B^2 + 4\xi^2 - 4B\xi) d\xi \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{bH^2 B^3}{24} + \frac{1}{\delta} \int_{-H/2}^{H/2} \left(\frac{bBH}{2} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) \right)^2 ds + \frac{bH^2}{4} \left(\frac{6B^3}{12} + \frac{2B^3}{12} - \frac{6B^3}{12} \right) \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{bH^2 B^3}{24} + \frac{1}{\delta} \int_{-H/2}^{H/2} \left(\frac{bBH}{2} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) \right)^2 ds + \frac{bH^2 B^3}{24} \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{1}{\delta 4} \int_{-H/2}^{H/2} \left(bBH + \frac{H^2 \delta}{4} - y^2 \delta \right)^2 ds + \frac{2B^3 bH^2}{24} \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{1}{\delta 4} \int_{-H/2}^{H/2} \left(b^2 B^2 H^2 + \frac{H^4 \delta^2}{16} + y^4 \delta^2 + \frac{bBH^3 \delta}{2} - 2bBHy^2 \delta - \frac{H^2 \delta}{2} y^2 \delta \right) ds + \frac{B^3 bH^2}{12} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{1}{\delta 4} \left(b^2 B^2 H^2 y + \frac{H^4 \delta^2}{16} y + \frac{\delta^2}{5} y^5 + \frac{b B H^3 \delta}{2} y - \frac{2 b B H \delta}{3} y^3 - \frac{H^2 \delta^2}{6} y^3 \right)_{-H/2}^{H/2} + \frac{B^3 b H^2}{12} \right) = \\
&\quad \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{1}{\delta 4} \left(b^2 B^2 H^3 + \frac{\delta^2 H^5}{2^4} + \frac{\delta^2 H^5}{2^4 \cdot 5} + \frac{3 b B H^4 \delta}{6} - \frac{b B H^4 \delta}{6} - \frac{\delta^2 H^5}{2^3 \cdot 3} \right) + \frac{B^3 b H^2}{12} \right) \\
&= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{1}{\delta 4} \left(b^2 B^2 H^3 + 8 \frac{\delta^2 H^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{b B H^4 \delta}{3} \right) + \frac{B^3 b H^2}{12} \right) = \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{\delta H^5}{12} \left(\frac{3 b^2 B^2}{\delta^2 H^2} + \frac{1}{10} + \frac{b B}{\delta H} \right) + \frac{\delta H^5}{12} \frac{B^3 b}{\delta H^3} \right) = \\
&= \frac{A}{I_x^2} \frac{\delta H^5}{12} \left(\frac{3 b^2 B^2}{\delta^2 H^2} + \frac{1}{10} + \frac{b B}{\delta H} + \frac{3 b B^3}{2 \delta H^3} \right) = \frac{A}{\delta^2 H^6} \frac{\delta H^5}{12} \left(\frac{3 b^2 B^2}{\delta^2 H^2} + \frac{1}{10} + \frac{b B}{\delta H} + \frac{3 b B^3}{2 \delta H^3} \right) = \\
&= \frac{A}{\delta H} \frac{3 b^2 B^2 + \frac{1}{10} + \frac{b B}{\delta H} + \frac{3 b B^3}{2 \delta H^3}}{\frac{1}{12} \left(\frac{6 b B}{\delta H} + 1 \right)^2}
\end{aligned}$$

Si rileva che questo risultato differisce da quello indicato in tabella (preso da Capurso, pag.405). Tuttavia a me sembra corretto quello qui calcolato.

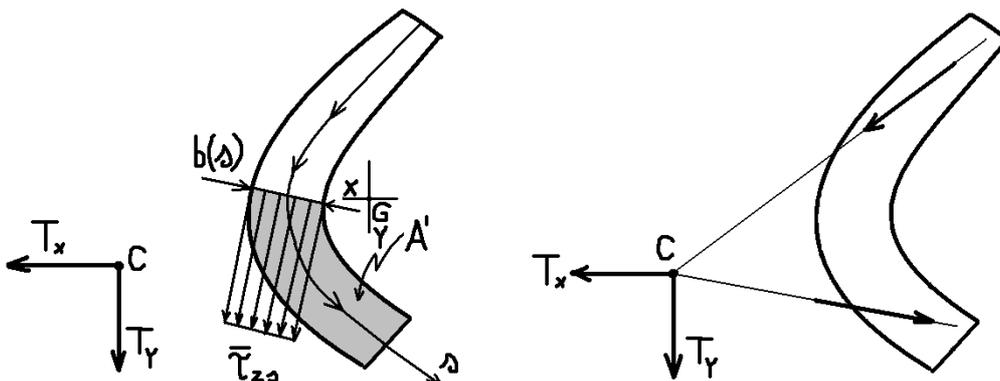
Applicazione alla sezione a T	
Centro di taglio	
Il centro di taglio si trova sulla intersezione fra ala e anima.	
Tensioni tangenziali sull'ala	
$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x}{I_x b} \quad S_x = -b d \xi \quad d = \frac{\delta H^2}{2(bB + \delta H)}$	
Tensioni tangenziali sull'anima	
$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x}{I_x \delta} \quad S_x = \frac{\delta}{2} \left((H-d)^2 - y^2 \right) \quad d = \frac{\delta H^2}{2(bB + \delta H)}$	

Tensioni normali
$\sigma_z = -\frac{T_y(l-z)y}{I_x}$
Angolo di rotazione della sezione intorno all'asse x
$d\varphi(z) = \frac{ T_y (l-z)}{I_x E} dz \Rightarrow \varphi(z) = \frac{ T_y }{I_x E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z$
Slittamento relativo e Fattore di taglio
$d\eta = \chi_y \frac{T_y}{GA} dz \quad \text{con} \quad \chi_y = \frac{A}{I_x^2} \int_0^L \frac{S_x^2(s)}{b(s)} ds$
Da calcolare...
Momento di inerzia
$I_x = \frac{b^3 B + \delta H^3}{12} + \frac{bB\delta H^3}{4(bB + \delta H)}$
Lavoro di deformazione
$L = \frac{l^3 T_y^2}{6EI_x} + \frac{l T_y^2 \chi_y}{2GA}$
Ho indicato l la lunghezza della trave.

11.3. Flessione e taglio per sezioni sottili aperte. Si parte ammettendo che il taglio sia applicato al centro di taglio della sezione. Se poi si vuole conoscere la posizione del centro di taglio si impone, a calcoli ultimati, che la sollecitazione esterna agente sulla sezione estrema (cioè la forza di taglio) sia equivalente alla sollecitazione delle tensioni interne, calcolata su tale sezione. Assumendo come incognite le coordinate del centro di taglio è allora possibile determinare tali incognite.

• **Tensioni tangenziali.** Si applica direttamente la 11.10

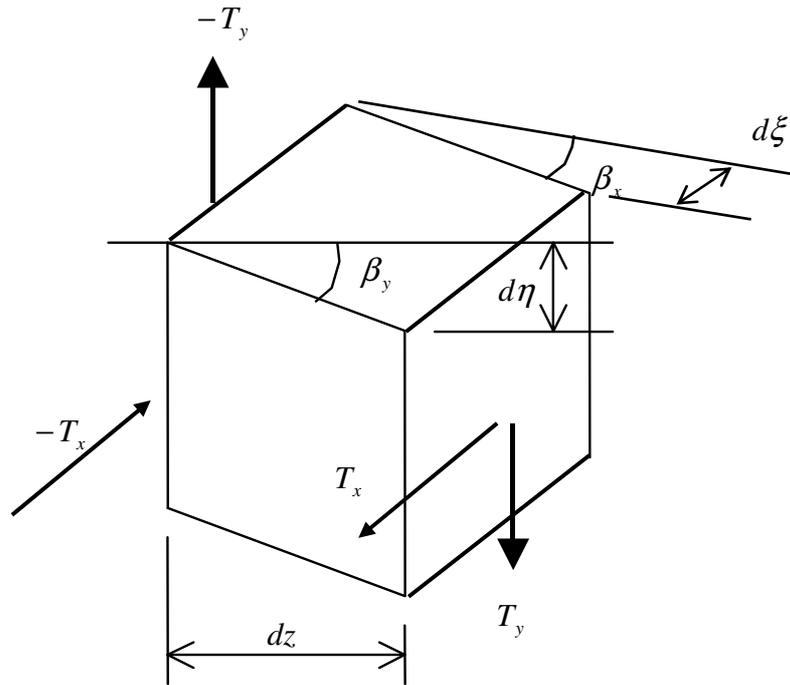
$$11.29) \quad \bar{\tau}_{zs}(s) = \frac{1}{b(s)} \frac{T_y}{I_x} \int_{A'(s)} y dA + \frac{1}{b(s)} \frac{T_x}{I_y} \int_{A'(s)} x dA = \frac{1}{b(s)} \frac{T_y}{I_x} S_x(s) + \frac{1}{b(s)} \frac{T_x}{I_y} S_y(s)$$



Con la considerazione aggiuntiva che in questo caso questa componente è l'unica componente tangenziale e che più è sottile lo spessore della sezione è più è giustificata l'operazione di media.

• **Slittamento relativo fra le sezioni.** Considerando un elemento della trave di lunghezza infinitesima dz il lavoro che il taglio fa per far slittare di $d\eta$ la sezione in $z + dz$, rispetto alla sezione in z , è dato, secondo il teorema di Clapeyron, da

$$11.30) \quad dL = \frac{1}{2}(T_y d\eta + T_x d\xi) = \frac{1}{2}(T_y \beta_y + T_x \beta_x) dz$$



Se consideriamo che gli angoli β_x, β_y possono dipendere ciascuno da entrambe le componenti del taglio, possiamo provare a scriverli come una combinazione lineare delle componenti stesse:

$$11.31) \quad \beta_x = a_{xx} T_x + a_{xy} T_y \quad \beta_y = a_{yx} T_x + a_{yy} T_y$$

Si può dimostrare che con questa posizione deve essere $a_{xy} = a_{yx}$, infatti per il teorema di Betti si ha che il lavoro di T_x sulle deformazioni di T_y , dato da $T_x \beta_x = T_x a_{xy} T_y$, deve essere uguale al lavoro di T_y sulle deformazioni di T_x , dato da $T_y \beta_y = T_y a_{yx} T_x$. Dunque appunto $a_{xy} = a_{yx}$. Allora la **11.31** si scrive

$$11.32) \quad dL = \frac{1}{2}(T_y \beta_y + T_x \beta_x) dz = \frac{1}{2}(a_{xx} T_x^2 + a_{yy} T_y^2 + 2a_{xy} T_x T_y) dz$$

Usando invece l'espressione **6.26** del potenziale elastico complementare, questo stesso lavoro si scrive

$$11.33) \quad dL = \int_z^{z+dz} \int_A \Psi dAdz = \frac{1}{2G} \int_z^{z+dz} \int_0^L b(s) \bar{\tau}_{zs}^2(s) ds dz = \frac{dz}{2G} \int_0^L b(s) \bar{\tau}_{zs}^2(s) ds$$

dove ho indicato L la lunghezza della curva che descrive la linea mediana della sezione. Considerando poi la **11.33** la **11.32** si scrive

$$dL = \frac{dz}{2G} \int_0^L b(s) \left(\frac{1}{b(s)} \frac{T_y}{I_x} S_x(s) + \frac{1}{b(s)} \frac{T_x}{I_y} S_y(s) \right)^2 ds = \frac{dz}{2G} \int_0^L \frac{1}{b(s)} \left(\frac{T_y}{I_x} S_x(s) + \frac{T_x}{I_y} S_y(s) \right)^2 ds =$$

$$= \frac{dz}{2G} \int_0^L \frac{1}{b(s)} \left(\frac{T_y}{I_x} S_x(s) + \frac{T_x}{I_y} S_y(s) \right)^2 ds = \frac{dz}{2G} \int_0^L \frac{1}{b(s)} \left(\frac{T_y^2}{I_x^2} S_x^2(s) + \frac{T_x^2}{I_y^2} S_y^2(s) + 2 \frac{T_y T_x}{I_x I_y} S_x(s) S_y(s) \right) ds$$

In definitiva abbiamo trovato

$$11.34) \quad dL = \frac{dz}{2G} \left(\frac{T_y^2}{I_x^2} \int_0^L \frac{S_x^2(s)}{b(s)} ds + \frac{T_x^2}{I_y^2} \int_0^L \frac{S_y^2(s)}{b(s)} ds + 2 \frac{T_y T_x}{I_x I_y} \int_0^L \frac{S_x(s) S_y(s)}{b(s)} ds \right)$$

E facendo le posizioni

$$11.35) \quad \chi_x = \frac{\Delta}{I_y^2} \int_0^L \frac{S_y^2(s)}{b(s)} ds \quad \chi_y = \frac{\Delta}{I_x^2} \int_0^L \frac{S_x^2(s)}{b(s)} ds \quad \chi_{xy} = \frac{\Delta}{I_x I_y} \int_0^L \frac{S_x(s) S_y(s)}{b(s)} ds$$

la **11.34** si scrive

$$11.36) \quad dL = \frac{dz}{2GA} (T_y^2 \chi_y + T_x^2 \chi_x + 2T_x T_y \chi_{xy})$$

Confrontando la **11.36** con la **11.32** otteniamo allora

$$(a_{xx} T_x^2 + a_{yy} T_y^2 + 2a_{xy} T_x T_y) = \frac{1}{GA} (T_y^2 \chi_y + T_x^2 \chi_x + 2T_x T_y \chi_{xy}) \Rightarrow \begin{cases} a_{xx} = \chi_x / GA \\ a_{xy} = \chi_{xy} / GA \\ a_{yy} = \chi_y / GA \end{cases}$$

Dunque sostituendo nelle **11.31** abbiamo

$$11.37) \quad \beta_x = \frac{\chi_x}{GA} T_x + \frac{\chi_{xy}}{GA} T_y \quad \beta_y = \frac{\chi_{xy}}{GA} T_x + \frac{\chi_y}{GA} T_y$$

e in definitiva, riconducendoci in termini di spostamenti di slittamento, abbiamo

$$11.38) \quad d\xi = \left(\frac{\chi_x T_x}{GA} + \frac{\chi_{xy} T_y}{GA} \right) dz \quad d\eta = \left(\frac{\chi_{xy} T_x}{GA} + \frac{\chi_y T_y}{GA} \right) dz$$

• **Angolo di rotazione delle sezioni.** Procedendo come nel paragrafo **11.2** si conclude che la sezione in $z + dz$ ruota intorno ai propri assi centrali, rispetto alla sezione in z , degli angoli

$$11.39) \quad d\varphi_x(z) = \frac{|T_y|(l-z)}{I_x E} dz \quad d\varphi_y(z) = \frac{|T_x|(l-z)}{I_y E} dz$$

Il primo indica appunto la rotazione intorno all'asse x , il secondo quella intorno all'asse y . Integrando si hanno i due angoli di rotazione della sezione in z

$$11.40) \quad \varphi_x(z) = \frac{|T_y|}{I_x E} \left(l - \frac{z}{2}\right) z \quad \varphi_y(z) = \frac{|T_x|}{I_y E} \left(l - \frac{z}{2}\right) z$$

• **Lavoro di deformazione.** Calcolo il lavoro di deformazione attraverso l'espressione **6.26** del potenziale elastico complementare

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2E} \sigma_z^2 + \frac{1}{2G} \tau_{zs}^2 = \frac{1}{2E} \left(-\frac{T_x(l-z)x}{I_y} - \frac{T_y(l-z)y}{I_x} \right)^2 + \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{b(s)} \frac{T_y}{I_x} S_x(s) + \frac{1}{b(s)} \frac{T_x}{I_y} S_y(s) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2E} \left(\frac{T_x^2(l-z)^2 x^2}{I_y^2} + \frac{T_y^2(l-z)^2 y^2}{I_x^2} + 2 \frac{T_x T_y x y (l-z)^2}{I_x I_y} \right) + \\ &+ \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{b^2(s)} \frac{T_y^2}{I_x^2} S_x^2(s) + \frac{1}{b^2(s)} \frac{T_x^2}{I_y^2} S_y^2(s) + 2 \frac{1}{b^2(s)} \frac{T_x T_y}{I_x I_y} S_x(s) S_y(s) \right) \Rightarrow \\ L &= \frac{1}{2E} \int_0^l \int_A \left(\frac{T_x^2(l-z)^2 x^2}{I_y^2} + \frac{T_y^2(l-z)^2 y^2}{I_x^2} + 2 \frac{T_x T_y x y (l-z)^2}{I_x I_y} \right) dz dA + \\ &+ \frac{1}{2G} \int_0^l \int_0^L \left(\frac{1}{b^2(s)} \frac{T_y^2}{I_x^2} S_x^2(s) + \frac{1}{b^2(s)} \frac{T_x^2}{I_y^2} S_y^2(s) + 2 \frac{1}{b^2(s)} \frac{T_x T_y}{I_x I_y} S_x(s) S_y(s) \right) b(s) ds dz = \\ &= -\frac{1}{2E} \int_A \left(\frac{T_x^2(l-z)^3 x^2}{3I_y^2} + \frac{T_y^2(l-z)^3 y^2}{3I_x^2} + 2 \frac{T_x T_y x y (l-z)^3}{3I_x I_y} \right)_{z=0}^{z=l} dA + \\ &+ \frac{1}{2G} l \int_0^L \left(\frac{1}{b(s)} \frac{T_y^2}{I_x^2} S_x^2(s) + \frac{1}{b(s)} \frac{T_x^2}{I_y^2} S_y^2(s) + 2 \frac{1}{b(s)} \frac{T_x T_y}{I_x I_y} S_x(s) S_y(s) \right) ds = \\ &= \frac{l^3}{6E} \int_A \left(\frac{T_x^2 x^2}{I_y^2} + \frac{T_y^2 y^2}{I_x^2} + 2 \frac{T_x T_y x y}{I_x I_y} \right) dA + \\ &+ \frac{1}{2GA} l \left(\frac{T_y^2 A}{I_x^2} \int_0^L \frac{S_x^2(s)}{b(s)} ds + \frac{T_x^2 A}{I_y^2} \int_0^L \frac{S_y^2(s)}{b(s)} ds + 2 \frac{T_x T_y A}{I_x I_y} \int_0^L \frac{S_x(s) S_y(s)}{b(s)} ds \right) = \\ &= \frac{l^3}{6E} \left(\frac{T_x^2}{I_y^2} \int_A x^2 dA + \frac{T_y^2}{I_x^2} \int_A y^2 dA + 2 \frac{T_x T_y}{I_x I_y} \int_A x y dA \right) + \frac{1}{2GA} l \left(T_y^2 \chi_y + T_x^2 \chi_x + 2 T_x T_y \chi_{xy} \right) \end{aligned}$$

Negli integrali del primo addendo si riconoscono i due momenti centrali di inerzia e il momento misto, il quale è nullo. Dunque

$$11.41) L = -\frac{l^3}{6E} \left(\frac{T_x^2}{I_y} + \frac{T_y^2}{I_x} \right) + \frac{1}{2GA} l (T_y^2 \chi_x + T_x^2 \chi_y + 2T_x T_y \chi_{xy})$$

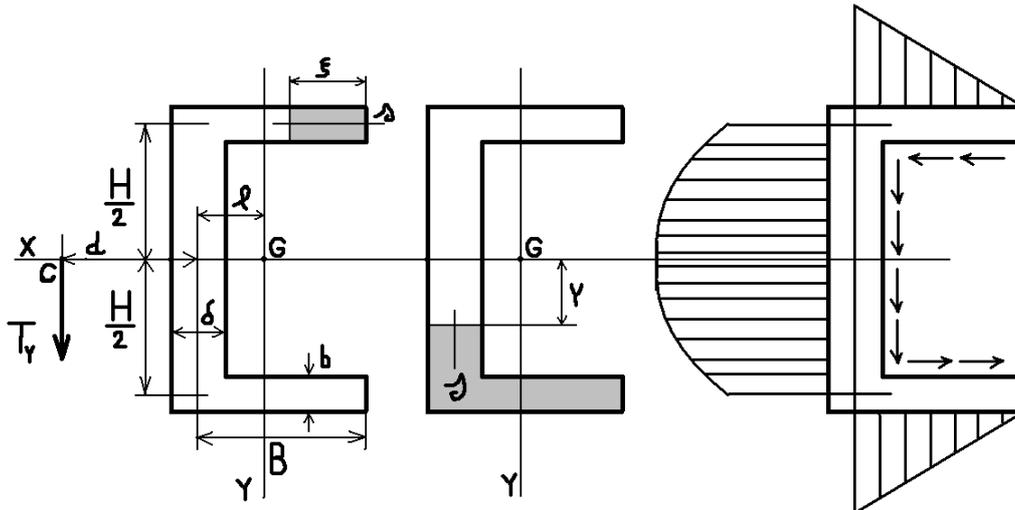
Flessione e taglio per sezioni sottili aperte, taglio applicato nel centro di taglio	
Centro di taglio	
<p>Il metodo di determinazione del centro di taglio è suggerito dalla figura a destra: le sollecitazioni tangenziali nel seguito indicate sono quelle calcolate assumendo che il taglio sia applicato nel centro di taglio, dunque il taglio applicato nel centro di taglio deve essere equivalente alla sollecitazione che andiamo calcolando. Questo vincolo permette di valutare la posizione del centro di taglio.</p>	
Tensioni tangenziali	
$\bar{\tau}_{zs}(s) = \frac{1}{b(s)} \frac{T_y}{I_x} \int_{A'(s)} y dA + \frac{1}{b(s)} \frac{T_x}{I_y} \int_{A'(s)} x dA = \frac{1}{b(s)} \frac{T_y}{I_x} S_x(s) + \frac{1}{b(s)} \frac{T_x}{I_y} S_y(s)$	
Tensioni normali	
$\sigma_z = -\frac{T_x(l-z)x}{I_y} - \frac{T_y(l-z)y}{I_x}$	
Angolo di rotazione della sezione	
$d\varphi_x(z) = \frac{ T_y (l-z)}{I_x E} dz \quad d\varphi_y(z) = \frac{ T_x (l-z)}{I_y E} dz \quad \Rightarrow$ $\varphi_x(z) = \frac{ T_y }{I_x E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z \quad \varphi_y(z) = \frac{ T_x }{I_y E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z$	
Slittamenti relativi e Fattori di taglio	
$d\xi = \left(\frac{\chi_x T_x}{GA} + \frac{\chi_{xy} T_y}{GA} \right) dz \quad d\eta = \left(\frac{\chi_{xy} T_x}{GA} + \frac{\chi_y T_y}{GA} \right) dz$ $\chi_x = \frac{A}{I_y^2} \int_0^L \frac{S_y^2(s)}{b(s)} ds \quad \chi_y = \frac{A}{I_x^2} \int_0^L \frac{S_x^2(s)}{b(s)} ds \quad \chi_{xy} = \frac{A}{I_x I_y} \int_0^L \frac{S_x(s) S_y(s)}{b(s)} ds$	
<p>Ho indicato L la lunghezza della curva che descrive la linea mediana della sezione.</p>	

Lavoro di deformazione

$$L = -\frac{l^3}{6E} \left(\frac{T_x^2}{I_y} + \frac{T_y^2}{I_x} \right) + \frac{1}{2GA} l (T_y^2 \chi_y + T_x^2 \chi_x + 2T_x T_y \chi_{xy})$$

Ho indicato l la lunghezza della trave.

Applicazione alla sezione a C con taglio verticale



Centro di taglio

Il centro di taglio si trova sull'asse di simmetria x , dalla parte della convessità della sezione, a una distanza dall'asse dell'anima pari a

$$d = \frac{H^2 b B^2}{4I_x}$$

Baricentro

$$l = \frac{bB^2}{H\delta + 2bB}$$

Tensioni tangenziali sull'ala superiore

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x}{I_x b} \quad S_x = -\frac{bH\xi}{2} \quad I_x = \frac{bBH^2}{2} + \frac{\delta H^3}{12}$$

Tensioni tangenziali sull'ala inferiore

In modulo uguali alle precedenti ma di verso opposto.

Tensioni sull'anima

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x}{I_x \delta} \quad S_x = \frac{bBH}{2} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) \quad I_x = \frac{bBH^2}{2} + \frac{\delta H^3}{12}$$

Tensioni normali

$$\sigma_z = -\frac{T_y (l-z)y}{I_x}$$

Slittamento relativo e Fattore di taglio

$$d\eta = \chi_y \frac{T_y}{GA} dz \quad \text{con} \quad \chi_y = \frac{A}{H\delta} \frac{\frac{1}{10} + \frac{bB}{\delta H} + 3 \frac{b^2 B^2}{\delta^2 H^2} + 2 \frac{bB^3}{\delta H^3}}{\frac{1}{12} \left(1 + 6 \frac{bB}{\delta H}\right)^2}$$

In particolare per $b = \delta, B = H$ si ha $\chi_y = 4,482$

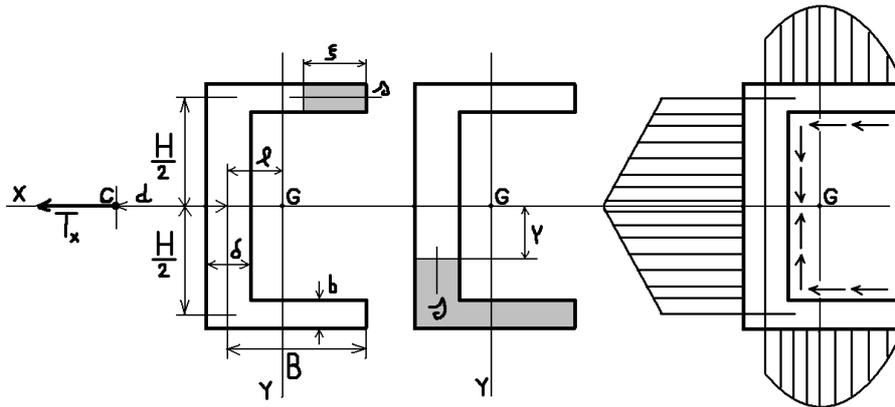
Lavoro di deformazione

$$L = -\frac{l^3 T_y^2}{6E I_x} + \frac{l T_y^2 \chi_y}{2GA}$$

Ho indicato l la lunghezza della trave.

$$\begin{aligned} \chi_y &= \frac{A}{I_x^2} \int_0^L \frac{S_x^2(s)}{b(s)} ds = \frac{A}{I_x^2} \left(\int_0^B \frac{1}{b} \left(b\xi \frac{H}{2} \right)^2 d\xi + \int_0^H \frac{1}{\delta} \left(\frac{bBH}{2} + \delta s \left(\frac{H}{2} - \frac{s}{2} \right) \right)^2 ds + \int_0^B \frac{1}{b} \left(bB \frac{H}{2} - b\xi \frac{H}{2} \right)^2 d\xi \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{bH^2 \xi^3}{4 \cdot 3} \Big|_0^B + \frac{b^2 B^2 H^3}{4\delta} + \frac{\delta}{4} \int_0^H (H^2 s^2 + s^4 - 2Hs^3) ds + \frac{bBH}{2} \int_0^H (Hs - s^2) ds + \frac{bH^2}{4} \int_0^B (B^2 + \xi^2 - 2B\xi) d\xi \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{bH^2 B^3}{12} + \frac{b^2 B^2 H^3}{4\delta} + \frac{\delta}{4} \left(\frac{H^2 s^3}{3} + \frac{s^5}{5} - \frac{2Hs^4}{4} \right) \Big|_0^H + \frac{bBH}{2} \left(\frac{Hs^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right) \Big|_0^H + \frac{bH^2}{4} \left(B^2 \xi + \frac{\xi^3}{3} - B\xi^2 \right) \Big|_0^B \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{bH^2 B^3}{12} + \frac{b^2 B^2 H^3}{4\delta} + \frac{\delta}{4} \left(\frac{H^5}{3} + \frac{H^5}{5} - \frac{H^5}{2} \right) + \frac{bBH}{2} \left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right) + \frac{bH^2}{4} \left(B^3 + \frac{B^3}{3} - B^3 \right) \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{bH^2 B^3}{12} + \frac{b^2 B^2 H^3}{4\delta} + \frac{\delta}{4} \left(\frac{10H^5}{30} + \frac{6H^5}{30} - \frac{15H^5}{30} \right) + \frac{bBH}{2} \left(\frac{3H^3}{6} - \frac{2H^3}{6} \right) + \frac{bH^2}{4} \left(\frac{3B^3}{3} + \frac{B^3}{3} - \frac{3B^3}{3} \right) \right) = \\ &= \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{bH^2 B^3}{12} + \frac{b^2 B^2 H^3}{4\delta} + \frac{\delta H^5}{120} + \frac{bBH^4}{12} + \frac{bH^2 B^3}{12} \right) = \frac{A}{I_x^2} \left(\frac{b^2 B^2 H^3}{4\delta} + \frac{\delta H^5}{120} + \frac{bBH^4}{12} + \frac{2bH^2 B^3}{12} \right) = \\ &= \frac{A \delta H^5}{12 I_x^2} \left(\frac{3b^2 B^2}{H^2 \delta^2} + \frac{1}{10} + \frac{bB}{\delta H} + \frac{2bB^3}{\delta H^3} \right) = \frac{A \delta H^5}{12 \frac{\delta^2 H^6}{144} \left(1 + \frac{6bB}{\delta H} \right)^2} \left(\frac{3b^2 B^2}{H^2 \delta^2} + \frac{1}{10} + \frac{bB}{\delta H} + \frac{2bB^3}{\delta H^3} \right) = \\ &= \frac{A}{\delta H} \frac{\frac{3b^2 B^2}{H^2 \delta^2} + \frac{1}{10} + \frac{bB}{\delta H} + \frac{2bB^3}{\delta H^3}}{\frac{1}{12} \left(1 + \frac{6bB}{\delta H} \right)^2} \end{aligned}$$

Applicazione alla sezione a C con taglio orizzontale



Centro di taglio

Il centro di taglio si trova sull'asse di simmetria x , dalla parte della convessità della sezione, ad una distanza dall'asse dell'anima pari a

$$d = \frac{H^2 b B^2}{4I_x}$$

Baricentro

$$l = \frac{bB^2}{H\delta + 2bB}$$

Tensioni tangenziali sull'ala superiore

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_x S_y}{I_y b} \quad S_x = -\frac{b}{2} \left((B-l)^2 - x^2 \right) \quad I_y = \frac{1}{12} \delta H^3 + \delta H + \frac{1}{6} B b^3$$

Tensioni tangenziali sull'ala inferiore

In modulo uguali alle precedenti.

Tensioni sull'anima

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_x S_y}{I_y \delta} \quad S_y = -\frac{bB}{2} (B-2l) - \delta \left(\frac{H}{2} - y \right) \quad I_y = \frac{1}{12} \delta H^3 + \delta H + \frac{1}{6} B b^3$$

Tensioni normali

$$\sigma_z = -\frac{T_x (l-z)x}{I_y} - \frac{T_y (l-z)y}{I_x}$$

Slittamento relativo e Fattore di taglio

$$d\xi = \chi_x \frac{T_x}{GA} dz \quad \text{con} \quad \chi_x = \frac{A}{I_y^2} \int_0^L \frac{S_y^2(s)}{b(s)} ds$$

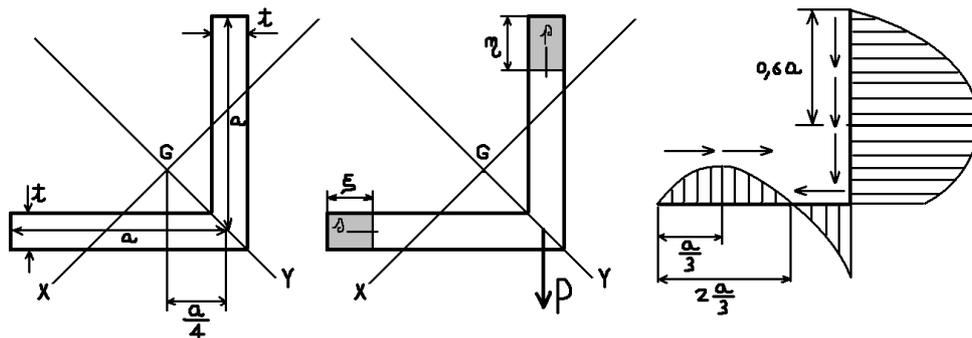
Da calcolare ...

Lavoro di deformazione

$$L = -\frac{l^3}{6E} \frac{T_x^2}{I_y} + \frac{l T_x^2}{2GA} \chi_x$$

Ho indicato l la lunghezza della trave.

Applicazione alla sezione ad L



Centro di taglio

Il centro di taglio si trova sulla intersezione delle due ali.

Baricentro

La posizione del baricentro è indicata nel disegno a sinistra.

Tensioni tangenziali

$$\bar{\tau}_{zs} = -\frac{3P\xi}{4a^3t}(2a-3\xi) \quad \bar{\tau}_{zp} = \frac{3P\eta}{4a^3t}(6a-5\eta)$$

Momenti statici

$$S_x = \frac{\sqrt{2}}{4}t\xi(a-\xi) \quad S_y = \frac{\sqrt{2}}{4}t\xi(2a-\xi)$$

Momenti di inerzia

$$I_x = \frac{a^3t}{12} \quad I_y = \frac{a^3t}{3}$$

Tensioni normali

$$\sigma_z = -\frac{T_x(l-z)x}{I_y} - \frac{T_y(l-z)y}{I_x}$$

Slittamenti relativi e Fattori di taglio

$$d\xi = \left(\chi_x \frac{T_x}{GA} + \chi_x \chi_y \frac{T_x T_y}{GA} \right) dz \quad \text{con} \quad \chi_x = \frac{A}{I_y^2} \int_0^L \frac{S_y^2(s)}{b(s)} ds$$

$$d\eta = \left(\chi_y \frac{T_y}{GA} + \chi_x \chi_y \frac{T_x T_y}{GA} \right) dz \quad \text{con} \quad \chi_y = \frac{A}{I_x^2} \int_0^L \frac{S_x^2(s)}{b(s)} ds$$

$$\chi_{xy} = \frac{A}{I_x I_y} \int_0^L \frac{S_x(s) S_y(s)}{b(s)} ds$$

Da calcolare ...

Lavoro di deformazione

$$L = -\frac{l^3}{6E} \left(\frac{T_x^2}{I_y} + \frac{T_y^2}{I_x} \right) + \frac{1}{2GA} l (T_y^2 \chi_y + T_x^2 \chi_x + 2T_x T_y \chi_{xy})$$

Ho indicato l la lunghezza della trave.

11.4. Flessione e taglio per sezioni sottili chiuse con asse di simmetria e taglio sovrapposto a esso. Si procede analogamente al caso delle sezioni sottili aperte e a quello delle sezioni compatte con taglio per l'asse di simmetria. Applicando la 11.10, per la tensione tangenziale (vedi figura) si ha

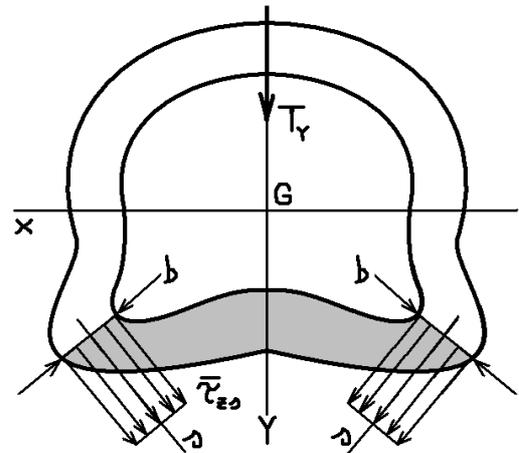
$$11.42) \bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y}{2bI_x} \int_{A'} y dA = \frac{T_y S_x}{2bI_x}$$

dove si deve notare il 2 a denominatore dovuto al fatto che b è lo spessore della sezione, mentre la corda che delimita A' , se ci si pensa, è lunga $2b$.

In base a questa stessa considerazione è evidente che il fattore di taglio, in accordo con la 11.35, si scriverà

$$11.43) \chi_y = \frac{A}{I_x^2} \int_0^{L/2} \frac{S_x^2(s)}{b(s)} ds$$

dove con $L/2$ ho indicato metà della lunghezza della linea mediana della sezione.



Flessione e taglio per sezioni sottili chiuse con asse di simmetria e taglio sovrapposto a esso	
Centro di taglio	
<p>Il centro di taglio si trova in un punto dell'asse di simmetria. Avendo il taglio retta di azione coincidente con l'asse di simmetria si ha che esso è applicato al centro di taglio.</p>	
Tensioni tangenziali	
$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x}{2bI_x}$	
Tensioni normali	
$\sigma_z = -\frac{T_y (l-z)y}{I_x}$	

Angolo di rotazione della sezione
$d\varphi_x(z) = \frac{ T_y (l-z)}{I_x E} dz \quad \Rightarrow \quad \varphi_x(z) = \frac{ T_y }{I_x E} \left(l - \frac{z}{2} \right) z$
Slittamenti relativi e Fattori di taglio
$d\eta = \frac{\chi_y T_y}{GA} dz \quad \chi_y = \frac{A}{I_x^2} \int_0^{L/2} \frac{S_x^2(s)}{b(s)} ds$
Ho indicato $L/2$ la metà della lunghezza della curva che descrive la linea mediana della sezione.
Lavoro di deformazione
$L = -\frac{l^3}{6E} \frac{T_y^2}{I_x} + \frac{1}{2GA} l T_y^2 \chi_y$
Ho indicato l la lunghezza della trave.

Applicazione alla sezione circolare cava
Centro di taglio
Il centro di taglio si trova su entrambi gli assi di simmetria, ovvero coincide con il baricentro. Poiché il taglio ha retta di azione coincidente con uno dei due assi di simmetria allora esso è applicato al centro di taglio.
Tensioni tangenziali
$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x}{2b I_x} = \frac{T_y \sin \omega}{b \pi R} \quad S_x = 2R^2 b \sin \omega \quad I_x = \pi R^3 b$
Tensioni normali
$\sigma_z = -\frac{T_y (l-z)y}{I_x}$

Slittamenti relativi e Fattori di taglio
$d\eta = \frac{\chi_y T_y}{GA} dz \quad \chi_y = 2$
<p>Ho indicato $L/2$ la metà della lunghezza della curva che descrive la linea mediana della sezione.</p>
Lavoro di deformazione
$L = -\frac{l^3}{6E} \frac{T_y^2}{I_x} + \frac{1}{2GA} l T_y^2 \chi_y$
<p>Ho indicato l la lunghezza della trave.</p>

11.5. Fattori di taglio in sezioni simmetriche. Se abbiamo una sezione simmetrica rispetto all'asse y siamo portati a pensare che T_y non possa determinare uno slittamento anche lungo l'asse x , proprio per questioni di simmetria: infatti dove slitterebbe la sezione, verso le x positive o verso quelle negative? D'altra parte si ha pure, per le **11.38**, che

$$d\xi = \frac{\chi_{xy}}{GA} T_y dz$$

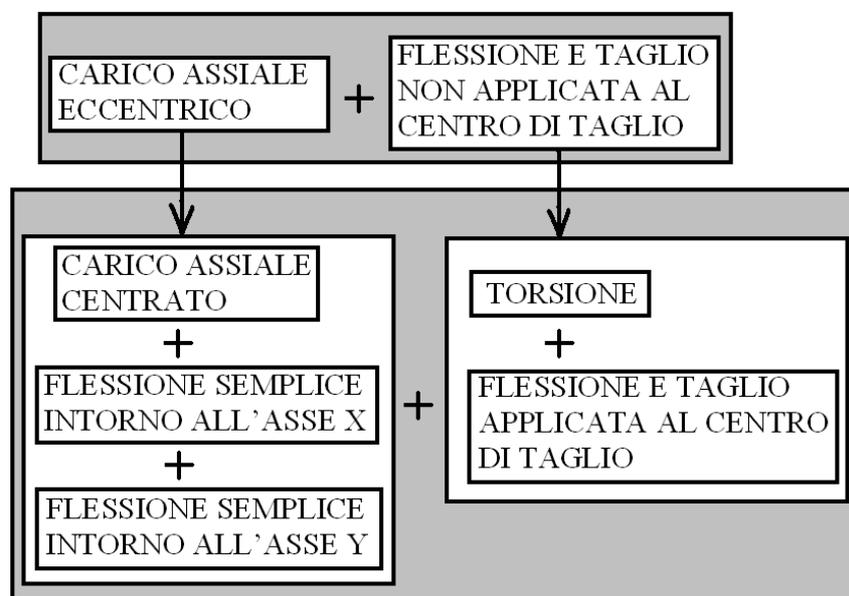
e dunque necessariamente deve essere $\chi_{xy} = 0$. In conclusione nelle sezioni con un asse di simmetria il fattore di taglio misto si annulla e dunque

$$11.44) \quad d\xi = \frac{\chi_x T_x}{GA} dz \quad d\eta = \frac{\chi_y T_y}{GA} dz$$

$$11.45) \quad L = -\frac{l^3}{6E} \left(\frac{T_x^2}{I_y} + \frac{T_y^2}{I_x} \right) + \frac{1}{2GA} l (T_y^2 \chi_y + T_x^2 \chi_x)$$

Capitolo 12. La sollecitazione composta generica

12.1. Riduzione della sollecitazione composta. In generale il solido di Saint Venant sarà soggetto a un carico assiale eccentrico e a un taglio non applicato nel centro di taglio. Come abbiamo visto queste due sollecitazioni vengono ridotte secondo lo schema indicato in figura.



In tal modo ci si ritrova in definitiva con le 5 sollecitazioni semplici illustrate:

- carico normale centrato
- flessione retta intorno all'asse x
- flessione retta intorno all'asse y
- flessione e taglio (cioè con taglio applicato nel centro di taglio)
- torsione

12.2. Spostamenti. Per quanto riguarda lo spostamento a cui è soggetta la sezione in $z + dz$ rispetto alla sezione in z abbiamo che esso è descritto, riassumendo qui tutto quello che è stato dimostrato nella trattazione delle sollecitazioni semplici, dai seguenti 6 parametri, tre spostamenti e tre angoli:

$$12.1) \left[\begin{array}{l} d\xi = \left(\frac{\chi_x T_x}{GA} + \frac{\chi_{xy} T_y}{GA} \right) dz \quad d\eta = \left(\frac{\chi_y T_y}{GA} + \frac{\chi_{xy} T_x}{GA} \right) dz \quad d\zeta = \frac{N}{EA} dz \\ d\varphi_x = \frac{M_x}{EI_x} dz \quad d\varphi_y = \frac{M_y}{EI_y} dz \quad d\theta = \frac{M_t}{GJ_t} dz \end{array} \right]$$

Nelle rotazioni intorno agli assi x, y mancano i contributi dovuti al taglio \vec{T} . Non so per quale motivo si escludano quei contributi, comunque queste formule sono tratte da Capurso, pag. 423.

Da notare che in presenza di un asse di simmetria, per quanto visto nel paragrafo 11.5, il fattore di taglio misto si annulla e le 12.1 si scrivono

$$12.2) \left[\begin{array}{l} d\xi = \frac{\chi_x T_x}{GA} dz \quad d\eta = \frac{\chi_y T_y}{GA} dz \quad d\zeta = \frac{N}{EA} dz \\ d\varphi_x = \frac{M_x}{EI_x} dz \quad d\varphi_y = \frac{M_y}{EI_y} dz \quad d\theta = \frac{M_t}{GJ_t} dz \end{array} \right]$$

12.3. Lavoro di deformazione. Nel paragrafo 35.2 si dimostrerà (all'interno della dimostrazione della espressione del PLV per travi rettilinee) che in base al teorema di Clapeyron applicato al concio di trave di lunghezza dz , il lavoro di deformazione elementare (da integrare lungo z) nel caso di una sollecitazione composta generica si scrive

$$12.3) \quad dL = \frac{1}{2} (Nd\zeta + M_x d\varphi_x + M_y d\varphi_y + T_x d\xi + T_y d\eta + M_t d\theta) dz$$

Considerando allora le 12.1 tale lavoro assume la forma

$$12.4) \quad dL = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{\chi_x T_x^2}{GA} + \frac{\chi_y T_y^2}{GA} + 2 \frac{\chi_{xy} T_x T_y}{GA} + \frac{M_t^2}{GJ_t} \right) dz$$

Da notare che

- le sollecitazioni di carico centrato, flessione retta, e torsione non presentano lavori mutui, cioè sono ortogonali energeticamente
- le due componenti del taglio hanno un lavoro mutuo il quale si annulla però nel caso in cui la sezione abbia almeno un asse di simmetria

Nel caso in cui la sezione abbia almeno un asse di simmetria il fattore di taglio mutuo si annulla e la 12.4 si scrive

$$12.5) \quad dL = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{\chi_x T_x^2}{GA} + \frac{\chi_y T_y^2}{GA} + \frac{M_t^2}{GJ_t} \right) dz$$

12.4. Stato tensionale. Nel caso generale avremo uno sforzo normale centrato, una flessione deviata con momento in generale variabile da sezione e sezione (per l'eventuale presenza del taglio), una torsione e un taglio. Comunque, in definitiva, la sollecitazione composta si riconduce a una sollecitazione descritta da un tensore delle tensioni di tipo analogo a quello della flessione e taglio, ovvero a un tensore del tipo

$$12.6) \quad T(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz}(P) \\ 0 & 0 & \tau_{yz}(P) \\ \tau_{zx}(P) & \tau_{zy}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix}$$

Analizzando il tensore 12.6 è possibile fare delle importanti deduzioni.

12.7) Lo stato tensionale -in caso di sollecitazioni semplici- è sempre piano, infatti è immediato constatare che il determinante del 12.6 è nullo.

12.8) Il piano delle tensioni è -punto per punto- quello parallelo all'asse z e contenente $\vec{t}(P, \hat{k}) = T(P) \cdot \hat{k}$, infatti se consideriamo un asse ξ passante per P e contenente la componente tangenziale di $T(P) \cdot \hat{k}$, allora (si osservi la figura) possiamo scrivere

$$\vec{t}(P, \hat{k}) \cdot \hat{n} = (T(P) \cdot \hat{k}) \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz}(P) \\ 0 & 0 & \tau_{yz}(P) \\ \tau_{zx}(P) & \tau_{zy}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xz}(P) \\ \tau_{yz}(P) \\ \sigma_z(P) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

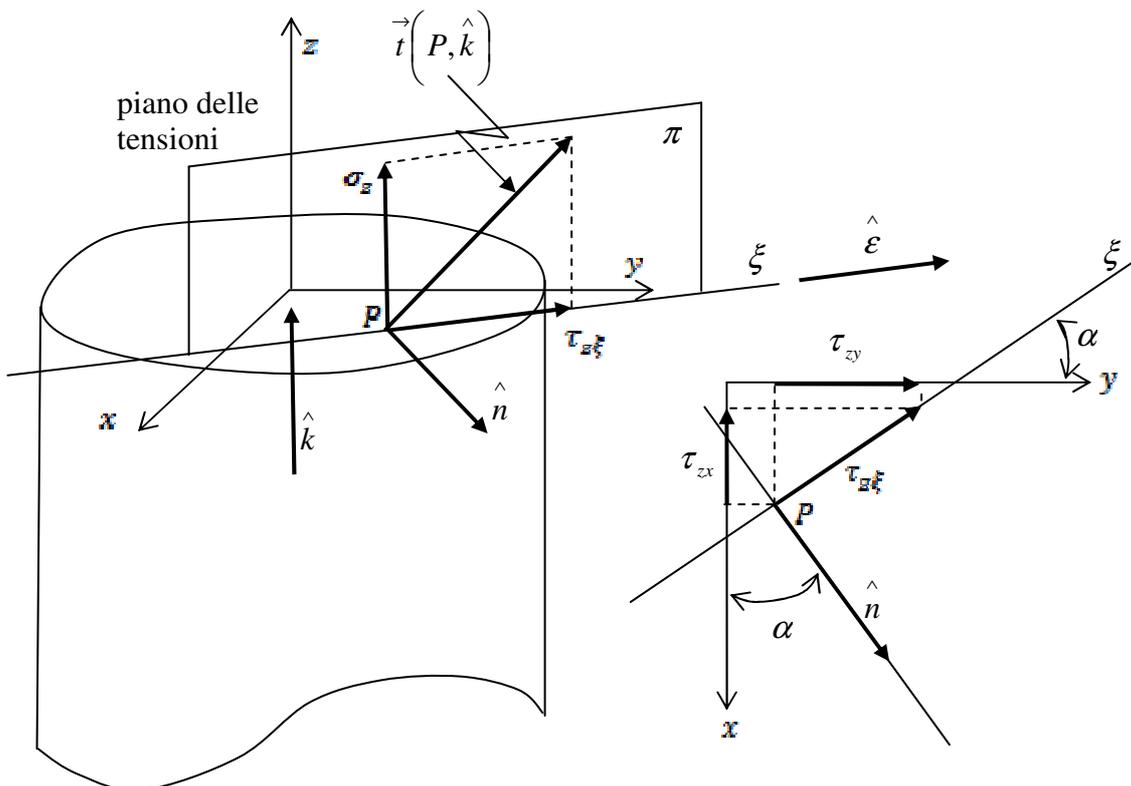
dove si intende che il versore $\hat{n} = (\cos \alpha \ \sin \alpha \ 0)$ è il versore normale alla direzione ξ . Si osservi ora che essendo

$$\begin{cases} \tau_{zx} = -\tau_{z\xi} \sin \alpha \\ \tau_{zy} = \tau_{z\xi} \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\tau_{zx} / \tau_{z\xi} \\ \cos \alpha = \tau_{zy} / \tau_{z\xi} \end{cases}$$

possiamo riscrivere quanto sopra come segue:

$$\vec{t}(P, \hat{k}) \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} \tau_{xz}(P) \\ \tau_{yz}(P) \\ \sigma_z(P) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{zy}(P) / \tau_{z\xi}(P) \\ -\tau_{zx}(P) / \tau_{z\xi}(P) \\ 0 \end{pmatrix} = \tau_{zy}(P) \tau_{xz}(P) - \tau_{yz}(P) \tau_{zx}(P) = 0$$

Questo significa che la direzione definita da \hat{n} è direzione principale con componente principale nulla, ovvero (proprietà B dello stato tensionale piano) il piano π è appunto piano delle tensioni.



12.5. Circoli di Mohr. Per rappresentare i circoli di Mohr dello stato tensionale **12.6** è utile effettuare un cambio di base ed esprimere il tensione delle tensioni rispetto alla nuova base $\begin{pmatrix} \hat{n} & \hat{\varepsilon} & \hat{k} \end{pmatrix}$ che rispetto alla base di partenza $\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix}$ si scrive

$$12.9) \quad \begin{pmatrix} \hat{n} & \hat{\varepsilon} & \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{zy}(P)/\tau_{z\xi}(P) & \tau_{zx}(P)/\tau_{z\xi}(P) & 0 \\ -\tau_{zx}(P)/\tau_{z\xi}(P) & \tau_{zy}(P)/\tau_{z\xi}(P) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} M$$

Per trovare dunque la nuova espressione $T'(P)$ del tensore delle tensioni rispetto alla nuova base si consideri che

$$12.10) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} \hat{n} & \hat{\varepsilon} & \hat{k} \end{pmatrix} Y' \\ T(P)X = Y \\ T'(P)X' = Y' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} T(P)X = \begin{pmatrix} \hat{n} & \hat{\varepsilon} & \hat{k} \end{pmatrix} T'(P)X'$$

Sostituendo la **12.9** nella **12.10** abbiamo

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} T(P)X = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} M T'(P)X'$$

che per l'unicità delle coordinate rispetto ad una base porge

$$12.11) \quad T(P)X = M T'(P)X'$$

Tenendo presente poi che deve anche essere

$$12.12) \quad \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \hat{n} & \hat{\varepsilon} & \hat{k} \end{pmatrix} X'$$

che considerata la **12.9** si scrive

$$12.13) \quad \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} M X' \Leftrightarrow X = M X'$$

abbiamo che la **12.11** si scrive

$$12.14) \quad T(P)M X' = M T'(P)X' \Leftrightarrow M^T T(P)M X' = T'(P)X'$$

dove si è considerato che in una matrice di cambio di basi ortonormali l'inversa è uguale alla trasposta. Dunque il tensore delle tensioni rispetto al sistema di riferimento **12.9** si scrive

$$12.15) \quad T'(P) = M^T T(P)M$$

Considerando l'espressione della matrice M abbiamo allora

$$\begin{aligned}
 T'(P) &= \begin{pmatrix} \tau_{zy}(P)/\tau_{z\xi}(P) & -\tau_{zx}(P)/\tau_{z\xi}(P) & 0 \\ \tau_{zx}(P)/\tau_{z\xi}(P) & \tau_{zy}(P)/\tau_{z\xi}(P) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz}(P) \\ 0 & 0 & \tau_{yz}(P) \\ \tau_{zx}(P) & \tau_{zy}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix} M = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{z\xi}(P) \\ \tau_{zx}(P) & \tau_{zy}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{z\xi}(P) \\ \tau_{zx}(P) & \tau_{zy}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{zy}(P)/\tau_{z\xi}(P) & \tau_{zx}(P)/\tau_{z\xi}(P) & 0 \\ -\tau_{zx}(P)/\tau_{z\xi}(P) & \tau_{zy}(P)/\tau_{z\xi}(P) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{z\xi}(P) \\ \tau_{zx}(P) & \tau_{zy}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{zy}(P)/\tau_{z\xi}(P) & \tau_{zx}(P)/\tau_{z\xi}(P) & 0 \\ -\tau_{zx}(P)/\tau_{z\xi}(P) & \tau_{zy}(P)/\tau_{z\xi}(P) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{z\xi}(P) \\ 0 & \tau_{z\xi}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo trovato in definitiva che il tensore dello stato tensionale della generica sollecitazione composta, rispetto alla base **12.9** si scrive

$$12.16) \quad T'(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{z\xi}(P) \\ 0 & \tau_{z\xi}(P) & \sigma_z(P) \end{pmatrix}$$

Per tracciare i cerchi di Mohr si inizia da quello relativo al piano delle tensioni, per il quale si tenga presente che $\sigma_\xi(P) = 0$. Per esso si ricava immediatamente che

$$12.17) \quad \begin{cases} \text{Centro} \equiv \left(\frac{\sigma_z(P)}{2}, 0 \right) \\ \text{Raggio} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z(P)}{2} \right)^2 + \tau_{z\xi}(P)^2} \end{cases}$$

Per le tensioni principali si ha poi

$$12.18) \quad \begin{cases} \sigma_1(P) = \frac{\sigma_z(P)}{2} - \text{Raggio} \\ \sigma_2(P) = \sigma_n(P) = 0 \\ \sigma_3(P) = \frac{\sigma_z(P)}{2} + \text{Raggio} \end{cases}$$

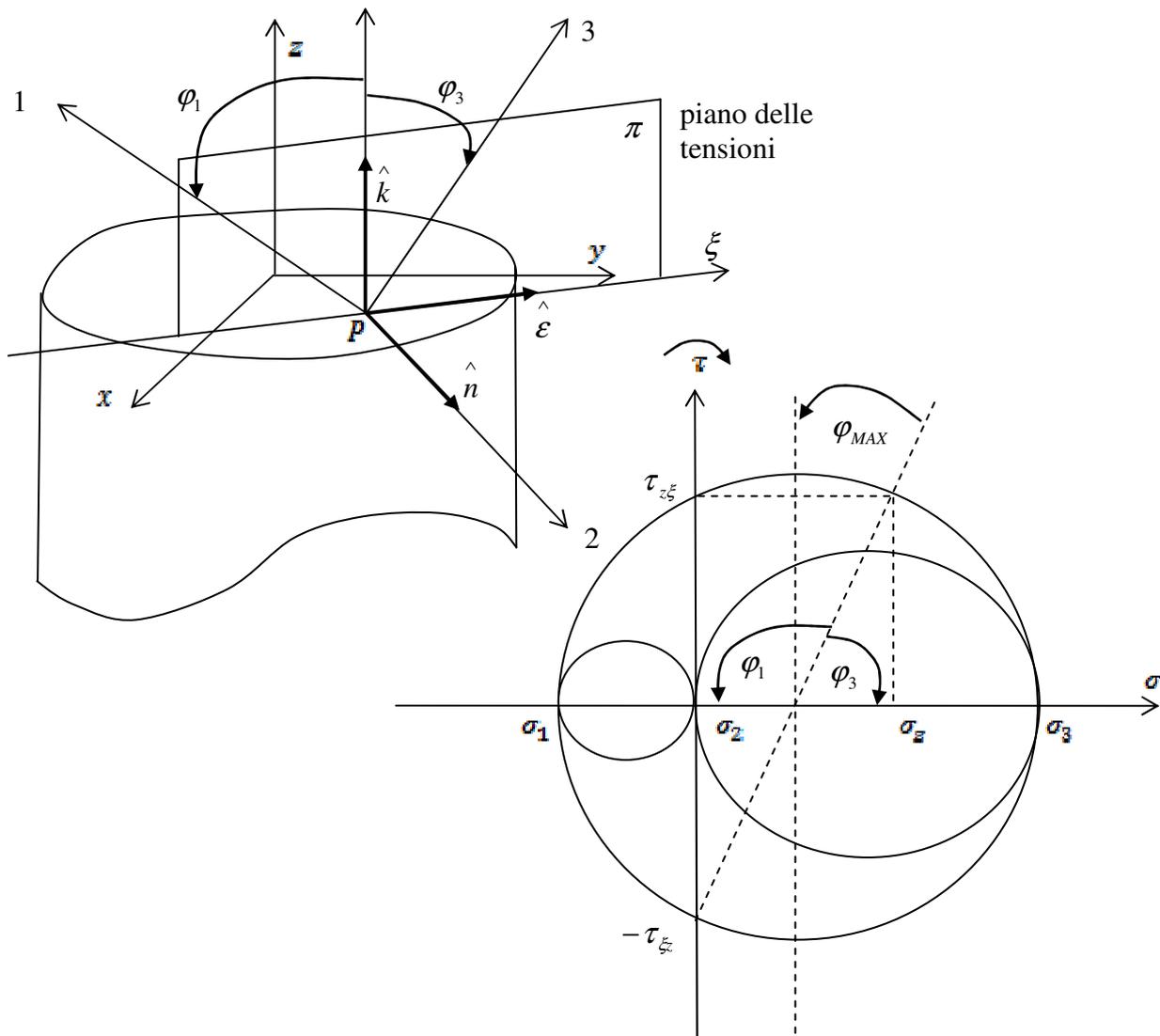
La massima tensione tangenziale vale

$$12.19) \quad \tau_{MAX}(P) = \text{Raggio}$$

Per gli angoli che individuano le direzioni principali e la direzione di massima tensione tangenziale si ha

$$12.20) \begin{cases} \varphi_3 = -\frac{1}{2} \arctan \frac{\tau_{z\xi}}{\sigma_z/2} \\ \varphi_1 = \pi + \varphi_3 \\ \varphi_{MAX} = \frac{\pi}{2} + \varphi_3 \end{cases}$$

In figura ho riportato tutti questi elementi.

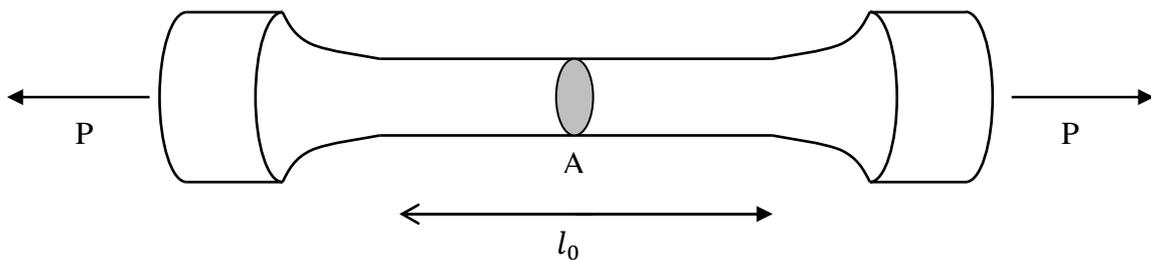


Ciò che è importante notare al termine di questi ultimi due paragrafi è che qui abbiamo descritto la situazione che si verifica sempre -in ogni caso di sollecitazione composta; dunque -in particolare- questa trattazione si applica anche a ciascuna delle sollecitazioni semplici.

Capitolo 13. Criteri di sicurezza

13.1. Prova di trazione. Tutti i risultati ottenuti in questo testo sono relativi al modello matematico del corpo lineare elastico. Questo modello descrive bene il comportamento di molti materiali (in particolare acciaio) purché i valori delle tensioni a cui essi sono soggetti non superino delle soglie oltre le quali il comportamento del materiale perde aderenza al modello matematico proposto. In questo capitolo ci si occupa di presentare dei metodi per capire come identificare tali soglie a partire dal semplice dato sperimentale della **tensione di snervamento** σ_s , la quale viene determinata dalla **prova di trazione-compressione**.

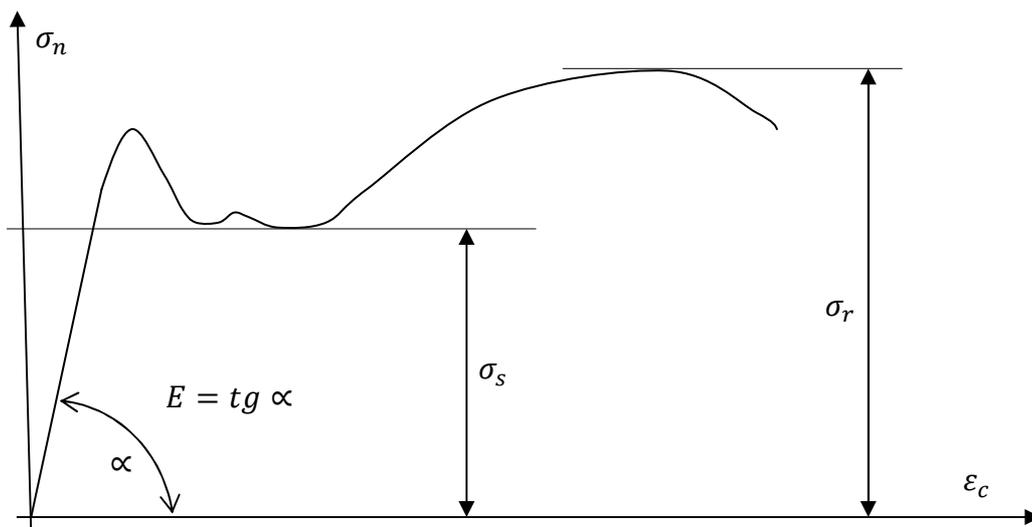
In questa prova un provino oblunco di lunghezza l_0 e di sezione A è soggetto a una forza di trazione P di intensità crescente.



Durante la prova vengono misurate le grandezze P (forza di trazione) e Δl (allungamento del provino) in modo da poter avere l'andamento delle grandezze

$$\sigma_n = \frac{P}{A} \quad \varepsilon_c = \frac{\Delta l}{l_0}$$

definite rispettivamente **tensione nominale** e **deformazione convenzionale**. L'interpretazione della prova si fa riportando in un grafico σ_n in funzione di ε_c . In figura ho rappresentato l'andamento qualitativo di questo grafico per un acciaio a basso tenore di carbonio (materiale di grande interesse nella componentistica meccanica).



Si identifica un primo tratto rettilineo: in questo ambito di sforzi il materiale presenta una proporzionalità lineare fra sforzo e deformazione e resta definito così il famoso modulo di Young, dato evidentemente dalla tangente dell'angolo α . In questo tratto, oltre al fenomeno della proporzionalità lineare si riscontra quello dell'elasticità: ovvero il provino, azzerato il carico di trazione, torna alla forma originale (e quindi, in particolare, alla sua lunghezza originale).

In generale un materiale può avere comportamento elastico senza avere comportamento lineare: è questo il caso delle leghe di alluminio per le quali dunque il modulo di Young è funzione della deformazione.

Nei materiali con comportamento elastico e lineare (come appunto gli acciai a basso tenore di carbonio) il valore dello sforzo per il quale cessa il comportamento elastico e quello per il quale cessa il comportamento lineare sono praticamente coincidenti.

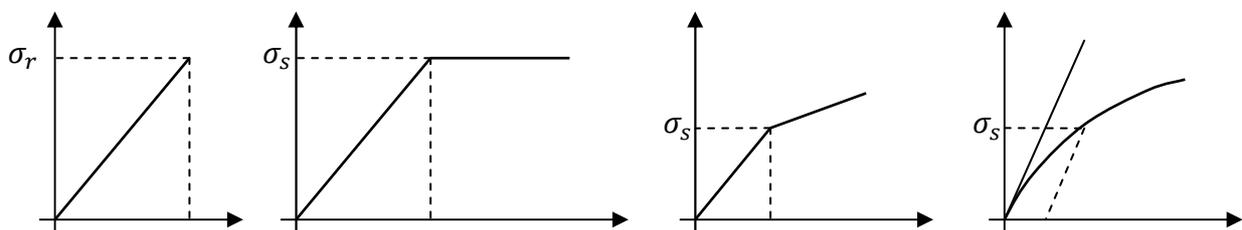
In molti materiali (come gli acciai a basso tenore di carbonio considerati nel nostro esempio) il tratto elastico lineare lascia il posto a un tratto in cui si registrano deformazioni consistenti in corrispondenza a uno sforzo praticamente costante: si parla allora di **snervamento** e resta individuata una tensione σ_s detta **tensione di snervamento**. Aumentando la tensione oltre tale valore si entra nel campo della **deformazione plastica**: se si scarica il provino esso non ritornerà alla forma iniziale, ma conserverà una deformazione residua.

Non in tutti i materiali la tensione di snervamento è facilmente rilevabile come nel caso dei metalli a basso tenore di carbonio, dove il tratto orizzontale della curva ϵ_c, σ_n lo identifica chiaramente; in questi casi si definisce convenzionalmente tensione di snervamento quella in corrispondenza della quale si ha una deformazione residua (cioè a provino scarico) pari a 0,002.

Dopo lo snervamento si verifica il fenomeno detto dell'**incrudimento**: il materiale ricomincia a opporre resistenza alla deformazione, ovvero ricomincia a richiedere incremento di carico per deformarsi ulteriormente. In figura l'incrudimento è rappresentato dal tratto crescente che segue quello orizzontale dello snervamento.

Aumentando ulteriormente il carico si ottiene infine la **rottura** del provino. Allora si distinguono due casi: se l'allungamento a rottura è superiore al 5% della lunghezza iniziale del provino si parla di **materiali duttili**, altrimenti si parla di **materiali fragili**. Nei materiali duttili l'allungamento del provino è associato a un restringimento consistente della sezione dello stesso (fenomeno della **strizione**) a causa della quale lo sforzo nominale tenderà a distaccarsi in maniera sempre più consistente da quello effettivo: infatti sebbene lo sforzo effettivo cresca fino alla rottura quello nominale, nei materiali duttili, risulta avere un tratto finale decrescente. E' quello che succede nell'acciaio a basso tenore di carbonio considerato nel nostro grafico, essendo tale materiale un tipico esempio di materiale duttile.

Nella pratica ingegneristica i risultati della prova di trazione vengono ricondotti a quattro schemi ideali ai quali corrispondono altrettante categorie di materiali.



- **Materiali perfettamente fragili.** Materiali come il vetro e la ceramica hanno un comportamento lineare fino alla rottura.
- **Materiali elasto-plastici.** I metalli a basso tenore di carbonio si comportano in modo elastico lineare fino allo snervamento, dopo il quale hanno un ampio intervallo di comportamento plastico (il tratto orizzontale). Dopo lo snervamento si avrà in molti casi un incrudimento (il grafico avrà nuovamente un tratto crescente). Tuttavia nelle applicazioni pratiche si evita di portare il materiale fino all'incrudimento e dunque in definitiva quella parte del diagramma non interessa.

- **Materiali con incrudimento subito dopo lo snervamento.** In questo caso manca la fase plastica e il comportamento del materiale è schematizzato attraverso due tratti lineari, ciascuno dunque con il proprio modulo elastico.
- **Materiali con legame curvilineo.** Alcuni materiali, come le leghe di alluminio, alcuni acciai, materiali polimerici, il rame ... non hanno il tratto lineare: in questo caso il modulo di elasticità è funzione della deformazione e inoltre lo sforzo di snervamento deve essere definito in modo convenzionale, nel senso precisato più sopra.

13.2. Risultati della prova di trazione. Dalla prova di trazione, come abbiamo visto, si ricavano i seguenti parametri:

- **Tensione di snervamento σ_s ,** la quale può essere individuata da un tratto orizzontale del diagramma della prova, oppure può essere individuata convenzionalmente come quella tensione in corrispondenza della quale si ha una deformazione residua, allo scarico, di 0,002. Si ricorda che la tensione di snervamento è di fondamentale importanza in quanto indica la tensione oltre la quale cessa il comportamento elastico e lineare.
- **Tensione di rottura σ_r ,** che non è in realtà la tensione alla quale si rompe il provino, ma piuttosto la massima tensione registrata nel diagramma della prova di trazione; tra l'altro non è neanche la tensione massima che si determina nel provino, ma è inferiore ad essa in quanto, per il fenomeno della strizione, la sezione reale del provino si riduce rispetto a quella iniziale.
- **Modulo di Young E** il quale è di immediata determinazione per le prime tre categorie di materiali analizzate nel precedente paragrafo, mentre risulta variabile in funzione della deformazione per la quarta categoria di materiali.

Oltre alla prova di trazione esiste la prova di compressione, per la quale vale tutto quanto qui detto. In alcuni materiali i parametri ricavati nella prova di trazione e quelli ricavati nella prova di compressione coincidono (a meno del segno, per le tensioni). In altri invece essi sono diversi e allora sarà necessario specificare se sono relativi all'una o all'altra prova (la tensione di snervamento a compressione potrebbe essere ad esempio maggiore di quella a trazione...).

In particolare i materiali fragili sono più resistenti a compressione che a trazione e infatti la tensione di rottura a compressione è maggiore di quella a trazione; i materiali duttili (sono i materiali che abbiamo detto elasto-plastici) invece hanno un comportamento simmetrico a trazione e a compressione.

13.3. Sollecitazione limite, sollecitazione ammissibile, coefficiente di sicurezza a trazione. Criteri di resistenza. Si pongono le seguenti definizioni

- **Sollecitazione limite σ_{lim} :** rappresenta il valore della tensione oltre il quale si verifica un certo fenomeno (snervamento, fine della linearità, rottura).
- **Coefficiente di sicurezza η :** è un parametro adimensionale maggiore dell'unità che si usa per indicare (vedi seguito) di quanto la massima tensione che può verificarsi nel componente deve essere al di sotto della tensione limite.
- **Tensione ammissibile σ_{amm} :** è la massima tensione che si ammette possa verificarsi nel componente. Se non si vuole che il componente subisca snervamento la tensione limite coinciderà con la tensione di snervamento e la tensione ammissibile dovrà essere inferiore alla tensione limite. Di quanto debba essere inferiore alla tensione limite lo stabilisce il progettista o le normative, definendo il valore del coefficiente di sicurezza: se ad esempio si desidera che la tensione ammissibile sia inferiore alla metà della tensione limite, intesa come tensione di snervamento, si avrà

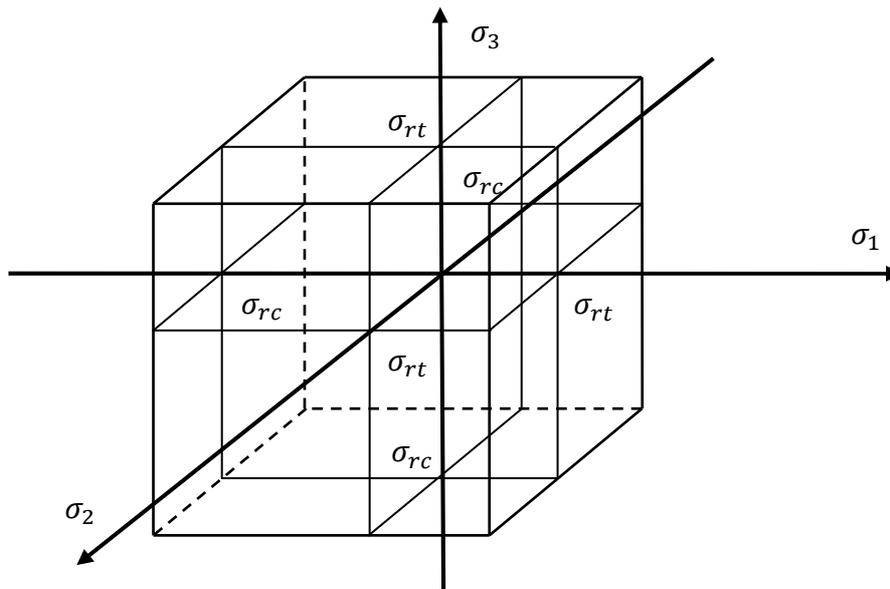
$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{amm}} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{\eta} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{2} = \frac{\sigma_s}{2}$$

Nel caso qui indicato il coefficiente di sicurezza vale dunque 2. In genere esso è compreso fra 1,2 e 10. Naturalmente i valori più alti del coefficiente di sicurezza si avranno in quei casi in cui è in gioco la sicurezza delle persone. La necessità di introdurre un coefficiente di sicurezza (più o meno elevato) è dettata da innumerevoli fattori: incertezza sui dati sperimentali relativi alla tensione limite, possibile presenza di difetti nei componenti, incertezza sulla reale tensione massima che si verificherà nel componente.

Tutto questo discorso vale se il componente è soggetto a una sollecitazione monoassiale, ovvero a una sollecitazione uguale a quella della prova di trazione. Ma in generale questa circostanza non si verifica e sorge la necessità di trovare qualche criterio per sfruttare i dati della prova di trazione anche per stati di tensione più complessi, per la situazione generale in cui tutte e sei le componenti di tensione siano non nulle.

*Nascono allora i **criteri di resistenza** i quali, partendo da diversi supposti teorici, arrivano a definire un parametro detto **tensione equivalente** σ_{eq} , il quale può essere direttamente confrontato con le grandezze ricavate dalle prove di trazione e compressione.*

13.4. Criterio di Rankine o della massima tensione principale. E' usato per **materiali fragili** e si basa sull'ipotesi che la rottura si realizza quando la massima tensione principale supera il valore della tensione di rottura a trazione e quando la minima (cioè quella negativa di valore maggiore) supera il valore della tensione di rottura a compressione. Allora se consideriamo uno spazio di assi coordinati $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, possiamo affermare che in base a questo criterio gli stati tensionali sicuri sono tutti quelli ai quali corrisponde un punto di coordinate $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ che rientri nel cubo indicato in figura dove σ_{rc} è la tensione di rottura a compressione e σ_{rt} è la tensione di rottura a trazione.



Pertanto

nel criterio di Rankine la tensione equivalente è costituita dalla massima tensione principale.

Consideriamo come esempio un materiale fragile (ghisa grigia) che presenti, in un dato punto, lo stato tensionale descritto dal tensore

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \text{ MPa} & 20 \text{ MPa} & 0 \\ 20 \text{ MPa} & 30 \text{ MPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Intanto lo stato tensionale è piano con piano delle tensioni coincidente col piano xy . Cerchiamo allora le altre due tensioni principali. Si ha

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{50 + 30}{2} \text{ MPa} + \sqrt{\left(\frac{50 - 30}{2}\right)^2 + 20^2} \text{ MPa} = \\ &= 40 \text{ MPa} + \sqrt{100 + 400} \text{ MPa} = 40 \text{ MPa} + 22,36 \text{ MPa} = 62,36 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{50 + 30}{2} \text{ MPa} - \sqrt{\left(\frac{50 - 30}{2}\right)^2 + 20^2} \text{ MPa} = \\ &= 40 \text{ MPa} - \sqrt{100 + 400} \text{ MPa} = 40 \text{ MPa} - 22,36 \text{ MPa} = 17,63 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Poiché le tensioni principali sono tutte di trazione ci interesserà conoscere esclusivamente la tensione di rottura a trazione. Supponendo che sia $\sigma_{rt} = 150 \text{ MPa}$ il criterio di Rankine ci garantisce contro la rottura del pezzo (essendo la massima tensione principale, che costituisce la tensione equivalente di questo esempio, di $62,36 \text{ MPa}$). Possiamo anche ricavare il fattore di sicurezza considerando che

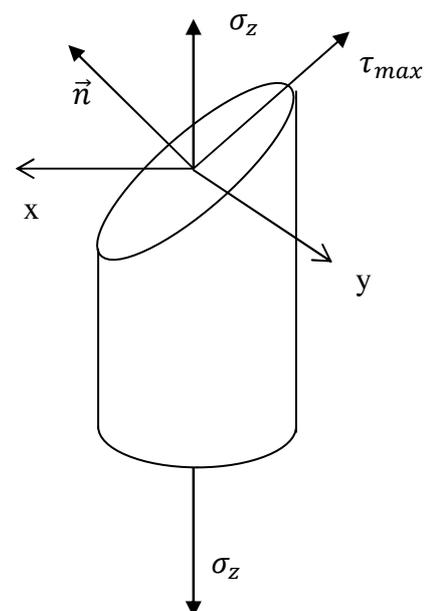
$$\sigma_{eq} = \sigma_1 = \frac{\sigma_{rt}}{\eta} \Rightarrow \eta = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_1} = \frac{150 \text{ MPa}}{62,36 \text{ MPa}} = 2,4$$

13.5. Criterio di Tresca o della massima tensione tangenziale. E' usato per **materiali duttili** si basa sul presupposto che lo snervamento avvenga quando la massima tensione tangenziale, nel punto in esame, raggiunge il valore della tensione tangenziale massima del provino sottoposto a prova di trazione (o di compressione) al momento della rottura.

Allora analizziamo in primo luogo lo stato tensionale di un provino sottoposto a prova di trazione: il suo tensore delle tensioni si scrive

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P/A \end{pmatrix}$$

Dunque esso risulta già in forma diagonale e le tensioni principali sono $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_z = P/A$. Le direzioni principali sono quella dell'asse z e degli



assi xy comunque ruotati (abbiamo un autovalore di molteplicità algebrica 2). Se si tengono presenti allora i cerchi di Mohr per stato tensionale generico (pag. 12) si trova che la tensione tangenziale massima è quella che si ha in corrispondenza a tutte le infinite giaciture con versore normale inclinato di 45° rispetto all'asse di trazione (l'asse z); tra l'altro tale tensione vale, sempre leggendo i cerchi di Mohr, $\tau_{max} = \sigma_z/2 = P/(2A)$. In figura sono indicati anche la direzione e il verso della tensione tangenziale massima: essi risultano intuitivi ma possiamo comunque ricavarli analiticamente. Si ha

$$\vec{t}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P/A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}P}{2A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau_{max} = \vec{t}_n \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\sqrt{2}P}{2A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}P}{2A} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{P}{2A}$$

Dunque in condizioni di snervamento incipiente si ha

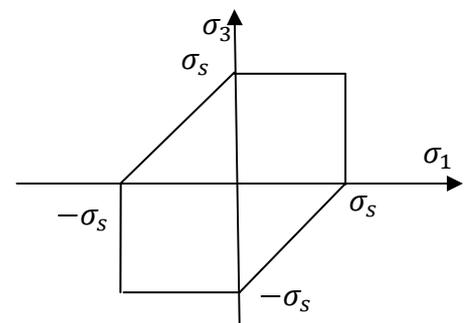
$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{2}$$

Ora consideriamo uno stato tensionale generico di tensioni principali $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. Sappiamo, dall'analisi sui cerchi di Mohr per stato tensionale generico (cap. 2) che la tensione tangenziale massima si scrive $\tau_{max} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$. Pertanto, secondo il presente criterio, non si ha snervamento finché è verificata la condizione

$$13.1) \tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \leq \tau_s = \frac{\sigma_s}{2} \Leftrightarrow \sigma_{eq} = \sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_{amm}$$

La tensione equivalente in questo criterio è dunque $\sigma_{eq} = \sigma_3 - \sigma_1$ dove si intende $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. Se consideriamo uno stato tensionale piano con $\sigma_2 = 0$ e consideriamo tutti i casi possibili

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 0, \sigma_3 < 0 \\ \sigma_1 = 0, \sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 = 0, \sigma_1 < 0 \\ \sigma_3 = 0, \sigma_1 > 0 \\ \sigma_1, \sigma_3 > 0 \\ \sigma_1, \sigma_3 < 0 \\ \sigma_1 < 0 < \sigma_3 \\ \sigma_3 < 0 < \sigma_1 \end{aligned}$$



si ottiene che lo snervamento non si verifica purché il punto (σ_1, σ_3) cada nel dominio indicato in figura.

13.6. Criterio di Saint Venat o della massima deformazione principale.

Si basa sull'assunto che il materiale subisca danno quando la massima deformazione principale raggiunge il valore della deformazione longitudinale del provino al momento dello snervamento,

per un materiale duttile, o della rottura, per un materiale fragile. Se indico σ_{amm} la tensione ammissibile e con ε_{amm} la relativa deformazione longitudinale, sappiamo che sussiste la relazione

$$\varepsilon_{amm} = \frac{\sigma_{amm}}{E}$$

D'altra parte dalle leggi di Hooke dirette **6.22**, si ha anche

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))$$

e se per le deformazioni principali si ha $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3$, allora il criterio di Saint Venant impone come condizione di sicurezza

$$\varepsilon_3 \leq \varepsilon_{amm} \Leftrightarrow \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \leq \frac{\sigma_{amm}}{E} \Leftrightarrow \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \sigma_{amm}$$

In questo criterio dunque la tensione equivalente è

$$13.2) \quad \sigma_{eq} = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Supponendo di trattare un materiale duttile, per il quale la tensione limite (cioè la tensione di snervamento) è la stessa a trazione e a compressione, allora l'ulteriore condizione di sicurezza da imporre (secondo il criterio di Saint Venant) sarà

$$|\varepsilon_1| \leq \varepsilon_{amm} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \right| \leq \frac{\sigma_{amm}}{E} \Leftrightarrow |\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)| \leq \sigma_{amm}$$

13.7. Criterio di Beltrami o della massima energia di deformazione. Si basa sull'assunto che il materiale subisca danno (snervamento per materiale duttile, rottura per materiale fragile), quando l'energia di deformazione per unità di volume, ovvero il potenziale elastico, raggiunge il valore del potenziale elastico del provino al momento del danno (snervamento o rottura).

Utilizzando l'espressione **6.26** del potenziale elastico complementare, l'energia potenziale per unità di volume del provino al momento del danno vale

$$\Psi_{lim} = \frac{1}{2E} \sigma_{lim}^2$$

mentre il potenziale elastico complementare del generico stato tensionale si scrive

$$\Psi = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

Dunque la condizione di sicurezza secondo Beltrami (considerando non le grandezze limite, ma quelle ammissibili) è

$$\frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \leq \frac{1}{2E} \sigma_{amm}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{E}{G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$$

La tensione equivalente è allora evidentemente

$$13.3) \quad \sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{E}{G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

Ricordando la **6.12** abbiamo allora anche la scrittura

$$13.4) \quad \sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 2(1 + \nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

13.8. Criterio di Von Mises o della massima energia di deformazione

deviatorica. Il criterio in oggetto cerca di fornire una condizione più restrittiva rispetto a quello di Beltrami, del quale si può considerare un affinamento. Esso si basa sulla osservazione che materiali duttili soggetti a uno stato di tensione idrostatico (cioè tale per cui le tre tensioni principali hanno lo stesso valore), presentano una maggiore resistenza allo snervamento, rispetto al caso di uno stato di tensione monoassiale. Questo fa ritenere che a produrre lo snervamento sia anzitutto la componente deviatorica del tensore delle tensioni, cioè quella che determina una variazione di forma senza variazione di volume.

Nel paragrafo **3.14** abbiamo scomposto il tensore delle deformazioni nella sua componente sferica (che abbiamo dimostrato descrivere la variazione di volume) e in quella deviatorica (che, per esclusione, deve descrivere la variazione di forma). Ponendo infatti

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= \varepsilon_x - \varepsilon \\ \varepsilon'_y &= \varepsilon_y - \varepsilon \\ \varepsilon'_z &= \varepsilon_z - \varepsilon \\ \varepsilon &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon'_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon'_z \end{pmatrix}$$

dove il primo tensore a secondo membro è la componente sferica e il secondo la componente deviatorica. Per il tensore degli sforzi si può scrivere una decomposizione analoga: posto infatti

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x - \sigma \\ \sigma'_y &= \sigma_y - \sigma \\ \sigma'_z &= \sigma_z - \sigma \\ \sigma &= \frac{E}{1 - 2\nu} \varepsilon \end{aligned}$$

abbiamo per il tensore degli sforzi la scrittura

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \frac{\tau_{xy}}{2} & \frac{\tau_{xz}}{2} \\ \frac{\tau_{yx}}{2} & \sigma_y & \frac{\tau_{yz}}{2} \\ \frac{\tau_{zx}}{2} & \frac{\tau_{zy}}{2} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{xz} & \sigma'_z \end{pmatrix}$$

La cosa importante è tuttavia che, considerando le leggi di Hooke inverse **6.21**, è facile dimostrare che la componente sferica del tensore delle tensioni è dovuta alla analoga componente del tensore delle deformazioni; stesso discorso per la componente deviatorica, che risulta dovuta alla componente deviatorica delle deformazioni.

Torniamo ora al criterio di Von Mises. Se ciò che porta allo snervamento del materiale è soprattutto la deformazione deviatorica, cioè la variazione di forma, esprimiamo il potenziale elastico complementare relativo alla componente deviatorica del tensore delle tensioni. Per fare questo conviene calcolare il potenziale elastico relativo alla variazione di volume:

$$\begin{aligned} \Psi_{vol} &= \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) = 3\sigma^2 \frac{1-2\nu}{2E} = \\ &= \frac{1-2\nu}{E} \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{6} = \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_x\sigma_z + 2\sigma_y\sigma_z}{6} \end{aligned}$$

Poiché poi il potenziale elastico complessivo vale

$$\Psi = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

si conclude che il potenziale elastico relativo alla deviazione vale

$$\begin{aligned} \Psi_{dev} &= \Psi - \Psi_{vol} = \\ &= \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) - \\ &\quad - \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) = \\ &= \left(\frac{1}{2E} - \frac{1-2\nu}{6E}\right)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \left(\frac{\nu}{E} + 2\frac{1-2\nu}{6E}\right)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \\ &\quad + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \\ &= \left(\frac{3-1+2\nu}{6E}\right)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \left(\frac{6\nu+2-4\nu}{6E}\right)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \\ &\quad + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \\ &= \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \\ &\quad + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \\ &= \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \end{aligned}$$

Essendo poi, per la **6.13**

$$\frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}$$

Abbiamo

$$13.5) \Psi_{dev} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2))$$

Nel caso di stato di sforzo monoassiale, per la **13.5**, il potenziale elastico complementare relativo alla variazione di forma vale, allo snervamento

$$13.6) \Psi_{dev} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2$$

Allora il criterio di Von Mises (considerando la tensione ammissibile al posto di quella limite, cioè di snervamento) impone come criterio di sicurezza che sia

$$\frac{1+\nu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)) \leq \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{amm}^2 \Leftrightarrow$$

$$13.7) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$$

Dunque la tensione equivalente in questo criterio vale

$$13.8) \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

Considerando uno stato tensionale piano abbiamo che la figura limite individuata dal criterio di Von Mises è l'ellisse che circoscrive l'esagono del criterio di Tresca. Dunque il criterio di Tresca è più restrittivo rispetto a quello qui considerato. Tuttavia il criterio di Von Mises è il più usato per materiali duttili, tanto da apparire anche in molte normative.

13.9. Verifiche di sicurezza per la generica sollecitazione composta. Nei paragrafi **12.4**, **12.5** (ai quali si rimanda) abbiamo studiato lo stato tensionale della generica sollecitazione composta (che può in particolare essere una delle sollecitazioni semplici). Se allora calcolo per tale stato tensionale le σ_{eq} di ciascuno dei cinque criteri illustrati, ottengo quanto segue.

Stato tensionale in P dovuto alla generica sollecitazione composta			
Criterio di resistenza		Condizione di sicurezza $\sigma_{eq} \leq \sigma_{amm}$	
13.9)	Rankine	compressione	$\frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \geq \sigma_{amm}$
		trazione	$\frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$
13.10)	Tresca	$2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$	

13.11)	Saint Venant	$(1 - \nu) \frac{\sigma_z}{2} + (1 + \nu) \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$
13.12)	Beltrami	$\sqrt{\sigma_z^2 + 2(1 + \nu)(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\sigma_z^2 + \frac{E}{G}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$
13.13)	Von Mises	$\sqrt{\sigma_z^2 + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$

Si ricorda che per costruire questa tabella si è tenuta presente l'espressione **12.6** del tensore dello stato tensionale determinato nel generico punto P dalla generica sollecitazione composta, e i risultati del paragrafo **12.5**, relativo al calcolo dei circoli di Mohr di tale stato di tensione.

13.10. Verifiche di sicurezza per le sollecitazioni semplici. Ora particolarizzo la tabella del precedente paragrafo al caso di ciascuna delle sollecitazioni semplici.

Critero di resistenza	Condizione di sicurezza $\sigma_{eq} \leq \sigma_{amm}$	
Sforzo normale $\left(\sigma_z = \frac{N}{A}\right)$		
13.14)	Rankine	$\left \frac{N}{A}\right \leq \sigma_{amm} $
13.15)	Tresca	
13.16)	Saint Venant	
13.17)	Beltrami	
13.18)	Von Mises	
Note	Lo sforzo normale è costante su tutta la sezione A della trave, dunque la verifica di resistenza non deve essere fatta in un punto specifico della sezione.	
Flessione retta $\left(\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y\right)$		
13.19)	Rankine	$\left \frac{M_x}{I_x} y\right \leq \sigma_{amm} $

13.20)	Tresca	
13.21)	Saint Venant	
13.22)	Beltrami	
13.23)	Von Mises	
Note	La verifica di sicurezza va effettuata lì dove lo sforzo normale assume il valore massimo, in termini assoluti.	
Flessione deviata $\left(\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x\right)$		
13.24)	Rankine	$\left \frac{M_x}{I_x} y_A - \frac{M_y}{I_y} x_A \right \leq \sigma_{amm} $
13.25)	Tresca	
13.26)	Saint Venant	
13.27)	Beltrami	
13.28)	Von Mises	
Note	Le massime tensioni, in valore assoluto, si hanno nei punti più distanti dall'asse neutro. Ed è in tali punti che va verificata la condizione di cui sopra.	

Sforzo normale eccentrico $\left(\sigma_z = N \frac{y_n}{I_x} y + N \frac{x_n}{I_y} x + \frac{N}{A}\right)$

13.29)

Rankine

13.30)

Tresca

13.31)

Saint Venant

$$\left| N \frac{y_n}{I_x} y + N \frac{x_n}{I_y} x + \frac{N}{A} \right| \leq |\sigma_{amm}|$$

13.32)

Beltrami

13.33)

Von Mises

Note

Valgono le considerazioni fatte per la flessione deviata: si determina l'asse neutro e poi si considerano i punti più lontani da esso; in corrispondenza di essi la tensione normale assume l'intensità massima (di trazione e di compressione). Si può aggiungere che nel caso della trazione eccentrica può anche aversi la possibilità che l'asse neutro non intercetti la sezione e allora si dovrà fare solo una verifica, o per il valore ammissibile di compressione o per quello di trazione.

Torsione $\left(T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{pmatrix} \right)$

13.34)

Rankine

compressione

$$\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = |\vec{t}| \geq \sigma_{amm}$$

trazione

$$\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = |\vec{t}| \leq \sigma_{amm}$$

13.35)

Tresca

$$2\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = 2|\vec{t}| \leq \sigma_{amm}$$

13.36)

Saint Venant

$$(1 + \nu)\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = (1 + \nu)|\vec{t}| \leq \sigma_{amm}$$

13.37)	Beltrami	$\sqrt{2(1+\nu)(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sqrt{2(1+\nu)} \tilde{t} \leq \sigma_{amm}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{E}{G}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sqrt{\frac{E}{G}} \tilde{t} \leq \sigma_{amm}$	
13.38)	Von Mises	$\sqrt{3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sqrt{3} \tilde{t} \leq \sigma_{amm}$	
Note	<p>Dagli ultimi due criteri applicati, e da quello di Tresca, emerge chiaramente che il punto della sezione al quale applicare i criteri di sicurezza deve essere quello in cui la tensione raggiunge la massima intensità, perché se la condizione di sicurezza è verificata in quel punto allora lo è a maggior ragione nel resto della sezione.</p>		
Flessione e taglio $\left(T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \right)$			
13.39)	Rankine	compressione	$\frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \geq \sigma_{amm}$
		trazione	$\frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$
13.40)	Tresca	$2\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$	
13.41)	Saint Venant	$(1-\nu)\frac{\sigma_z}{2} + (1+\nu)\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$	
13.42)	Beltrami	$\sqrt{\sigma_z^2 + 2(1+\nu)(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\sigma_z^2 + \frac{E}{G}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$	
13.43)	Von Mises	$\sqrt{\sigma_z^2 + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$	
Note	<p>Le componenti tangenziali non variano al variare della sezione; la componente normale invece, che ricordo essere data da</p> $\sigma_z = -\frac{M_y(z)}{I_y}x + \frac{M_x(z)}{I_x}y = -\frac{T_x(l-z)}{I_y}x - \frac{T_y(l-z)}{I_x}y$ <p>è funzione della sezione. Dunque si osserva che</p> <ul style="list-style-type: none"> • la verifica di resistenza deve essere condotta nella sezione di massima tensione normale; • in tale sezione la verifica deve essere condotta nei punti in cui è massima la 		

tensione equivalente fornita dal criterio adottato;

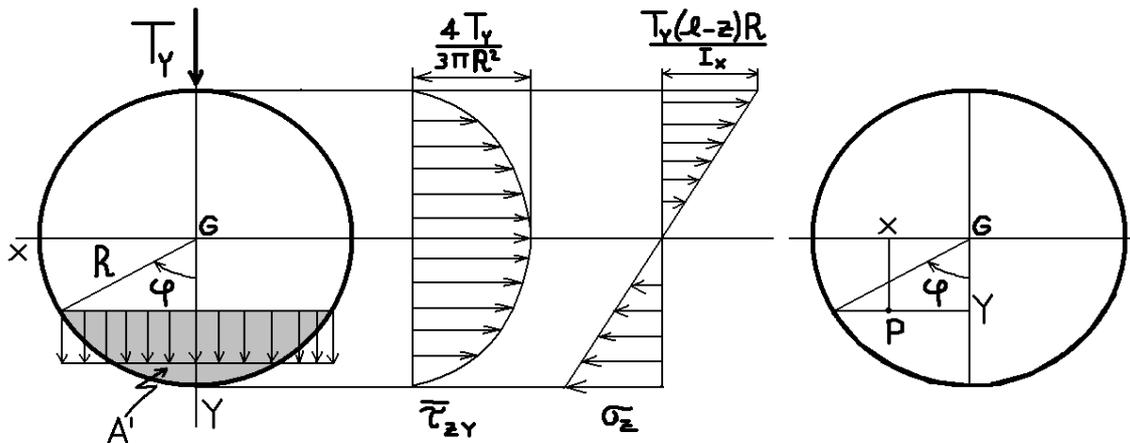
- per capire quali sono questi punti saranno utili i diagrammi delle tensioni relativi alla sezione. In alcuni casi sarà invece necessario procedere analiticamente, ricavando i punti di massimo della tensione equivalente.

Si osserva che le tensioni equivalenti fornite dai vari criteri per la flessione e taglio sono formalmente identiche a quelle viste nel paragrafo 13.9 per la generica sollecitazione composta. Questo perché in entrambi i casi il tensore delle tensioni ha gli stessi elementi nulli.

13.11. Esempio. Consideriamo l'esempio della sezione circolare soggetta a flessione e taglio (vedi figura). Volendo applicare il criterio di Von Mises, sarà opportuno ricavare per via analitica il punto di massimo della funzione

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{z\xi}^2} = \sqrt{\left(\frac{T_y(l-z)R(-\cos\varphi)}{I_x}\right)^2 + 3\left(\frac{4T_y}{3\pi R^2}(\sin\varphi)^2\right)^2}$$

Infatti dai diagrammi delle tensioni non è possibile capire 'ad occhio' dove possa trovarsi il punto maggiormente sollecitato. Dunque per prima cosa ci si pone nella sezione in cui la tensione normale assume il valore maggiore, ovvero la sezione estrema per $z = 0$, ottenendo la tensione equivalente



$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{(T_y l R)^2 (\cos\varphi)^2}{I_x^2} + 3\left(\frac{4T_y}{3\pi R^2}\right)^2 (\sin\varphi)^4}$$

Cerco allora il punto di massimo del radicando:

$$\begin{aligned} & \frac{d\left(\frac{(T_y l R)^2 (\cos\varphi)^2}{I_x^2} + 3\left(\frac{4T_y}{3\pi R^2}\right)^2 (\sin\varphi)^4\right)}{d\varphi} = \\ & = -2\left(\frac{T_y l R}{I_x}\right)^2 \cos\varphi \sin\varphi + 12\left(\frac{4T_y}{3\pi R^2}\right)^2 (\sin\varphi)^3 \cos\varphi = \\ & = 2T_y^2 \cos\varphi \sin\varphi \left(-\frac{l^2 R^2}{I_x^2} + \frac{32}{3\pi^2 R^4} (\sin\varphi)^2\right) \end{aligned}$$

Poiché risulta

$$-\frac{l^2 R^2}{I_x^2} + \frac{32}{3\pi^2 R^4} (\sin \varphi)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{3\pi^2 R^6 l^2}{32 I_x^2}} \Leftrightarrow \varphi = \pm \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{3\pi^2 R^6 l^2}{32 I_x^2}} \right)$$

i punti tra i quali cercare la massima tensione equivalente sono quelli corrispondenti agli angoli

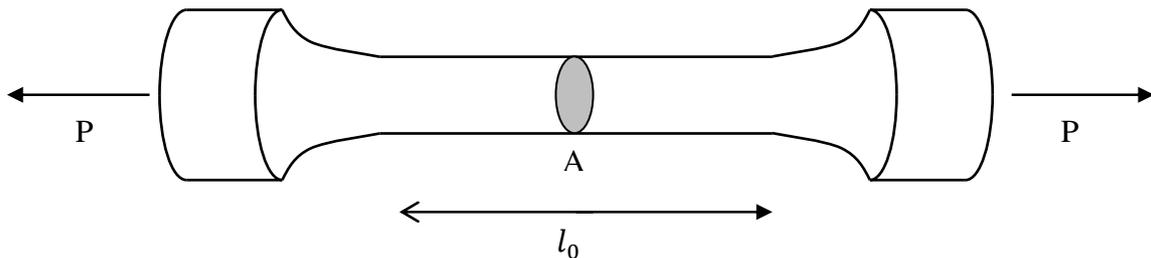
$$\varphi = 0 \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \varphi = \pm \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{3\pi^2 R^6 l^2}{32 I_x^2}} \right)$$

Evidentemente a ciascuno degli angoli indicati corrispondono tutti i punti di un segmento parallelo all'asse x .

Capitolo 13. Criteri di sicurezza

13.1. Prova di trazione. Tutti i risultati ottenuti in questo testo sono relativi al modello matematico del corpo lineare elastico. Questo modello descrive bene il comportamento di molti materiali (in particolare acciaio) purché i valori delle tensioni a cui essi sono soggetti non superino delle soglie oltre le quali il comportamento del materiale perde aderenza al modello matematico proposto. In questo capitolo ci si occupa di presentare dei metodi per capire come identificare tali soglie a partire dal semplice dato sperimentale della **tensione di snervamento** σ_s , la quale viene determinata dalla **prova di trazione-compressione**.

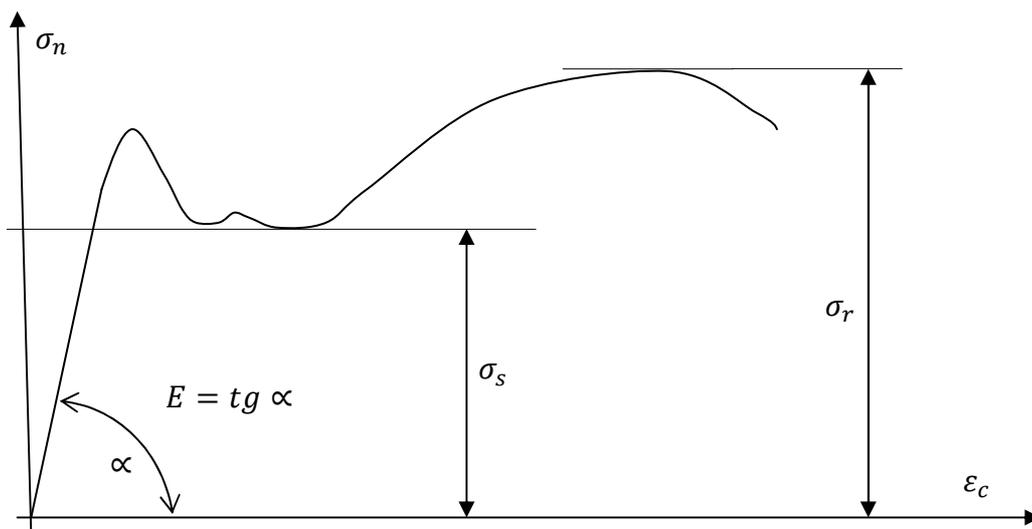
In questa prova un provino oblungo di lunghezza l_0 e di sezione A è soggetto a una forza di trazione P di intensità crescente.



Durante la prova vengono misurate le grandezze P (forza di trazione) e Δl (allungamento del provino) in modo da poter avere l'andamento delle grandezze

$$\sigma_n = \frac{P}{A} \quad \varepsilon_c = \frac{\Delta l}{l_0}$$

definite rispettivamente **tensione nominale** e **deformazione convenzionale**. L'interpretazione della prova si fa riportando in un grafico σ_n in funzione di ε_c . In figura ho rappresentato l'andamento qualitativo di questo grafico per un acciaio a basso tenore di carbonio (materiale di grande interesse nella componentistica meccanica).



Si identifica un primo tratto rettilineo: in questo ambito di sforzi il materiale presenta un proporzionalità lineare fra sforzo e deformazione e resta definito così il famoso modulo di Young, dato evidentemente dalla tangente dell'angolo α . In questo tratto, oltre al fenomeno della proporzionalità lineare si riscontra quello dell'elasticità: ovvero il provino, azzerato il carico di trazione, torna alla forma originale (e quindi, in particolare, alla sua lunghezza originale).

In generale un materiale può avere comportamento elastico senza avere comportamento lineare: è questo il caso delle leghe di alluminio per le quali dunque il modulo di Young è funzione della deformazione.

Nei materiali con comportamento elastico e lineare (come appunto gli acciai a basso tenore di carbonio) il valore dello sforzo per il quale cessa il comportamento elastico e quello per il quale cessa il comportamento lineare sono praticamente coincidenti.

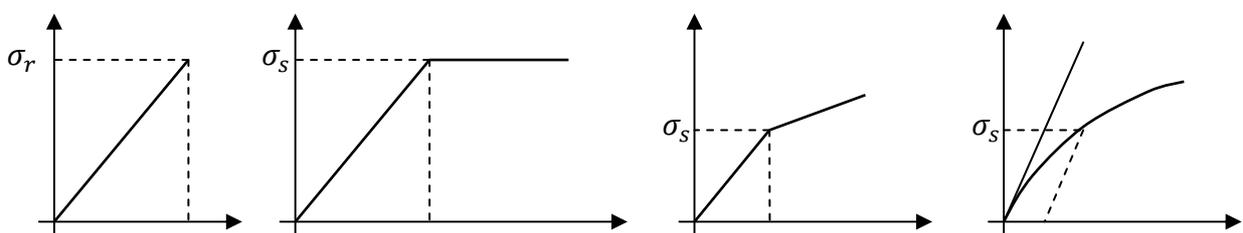
In molti materiali (come gli acciai a basso tenore di carbonio considerati nel nostro esempio) il tratto elastico lineare lascia il posto a un tratto in cui si registrano deformazioni consistenti in corrispondenza a uno sforzo praticamente costante: si parla allora di **snervamento** e resta individuata una tensione σ_s detta **tensione di snervamento**. Aumentando la tensione oltre tale valore si entra nel campo della **deformazione plastica**: se si scarica il provino esso non ritornerà alla forma iniziale, ma conserverà una deformazione residua.

Non in tutti i materiali la tensione di snervamento è facilmente rilevabile come nel caso dei metalli a basso tenore di carbonio, dove il tratto orizzontale della curva ϵ_c, σ_n lo identifica chiaramente; in questi casi si definisce convenzionalmente tensione di snervamento quella in corrispondenza della quale si ha una deformazione residua (cioè a provino scarico) pari a 0,002.

Dopo lo snervamento si verifica il fenomeno detto dell'**incrudimento**: il materiale ricomincia a opporre resistenza alla deformazione, ovvero ricomincia a richiedere incremento di carico per deformarsi ulteriormente. In figura l'incrudimento è rappresentato dal tratto crescente che segue quello orizzontale dello snervamento.

Aumentando ulteriormente il carico si ottiene infine la **rottura** del provino. Allora si distinguono due casi: se l'allungamento a rottura è superiore al 5% della lunghezza iniziale del provino si parla di **materiali duttili**, altrimenti si parla di **materiali fragili**. Nei materiali duttili l'allungamento del provino è associato a un restringimento consistente della sezione dello stesso (fenomeno della **strizione**) a causa della quale lo sforzo nominale tenderà a distaccarsi in maniera sempre più consistente da quello effettivo: infatti sebbene lo sforzo effettivo cresca fino alla rottura quello nominale, nei materiali duttili, risulta avere un tratto finale decrescente. E' quello che succede nell'acciaio a basso tenore di carbonio considerato nel nostro grafico, essendo tale materiale un tipico esempio di materiale duttile.

Nella pratica ingegneristica i risultati della prova di trazione vengono ricondotti a quattro schemi ideali ai quali corrispondono altrettante categorie di materiali.



- **Materiali perfettamente fragili.** Materiali come il vetro e la ceramica hanno un comportamento lineare fino alla rottura.
- **Materiali elasto-plastici.** I metalli a basso tenore di carbonio si comportano in modo elastico lineare fino allo snervamento, dopo il quale hanno un ampio intervallo di comportamento plastico (il tratto orizzontale). Dopo lo snervamento si avrà in molti casi un incrudimento (il grafico avrà nuovamente un tratto crescente). Tuttavia nelle applicazioni pratiche si evita di portare il materiale fino all'incrudimento e dunque in definitiva quella parte del diagramma non interessa.

- **Materiali con incrudimento subito dopo lo snervamento.** In questo caso manca la fase plastica e il comportamento del materiale è schematizzato attraverso due tratti lineari, ciascuno dunque con il proprio modulo elastico.
- **Materiali con legame curvilineo.** Alcuni materiali, come le leghe di alluminio, alcuni acciai, materiali polimerici, il rame ... non hanno il tratto lineare: in questo caso il modulo di elasticità è funzione della deformazione e inoltre lo sforzo di snervamento deve essere definito in modo convenzionale, nel senso precisato più sopra.

13.2. Risultati della prova di trazione. Dalla prova di trazione, come abbiamo visto, si ricavano i seguenti parametri:

- **Tensione di snervamento σ_s** , la quale può essere individuata da un tratto orizzontale del diagramma della prova, oppure può essere individuata convenzionalmente come quella tensione in corrispondenza della quale si ha una deformazione residua, allo scarico, di 0,002. Si ricorda che la tensione di snervamento è di fondamentale importanza in quanto indica la tensione oltre la quale cessa il comportamento elastico e lineare.
- **Tensione di rottura σ_r** , che non è in realtà la tensione alla quale si rompe il provino, ma piuttosto la massima tensione registrata nel diagramma della prova di trazione; tra l'altro non è neanche la tensione massima che si determina nel provino, ma è inferiore ad essa in quanto, per il fenomeno della strizione, la sezione reale del provino si riduce rispetto a quella iniziale.
- **Modulo di Young E** il quale è di immediata determinazione per le prime tre categorie di materiali analizzate nel precedente paragrafo, mentre risulta variabile in funzione della deformazione per la quarta categoria di materiali.

Oltre alla prova di trazione esiste la prova di compressione, per la quale vale tutto quanto qui detto. In alcuni materiali i parametri ricavati nella prova di trazione e quelli ricavati nella prova di compressione coincidono (a meno del segno, per le tensioni). In altri invece essi sono diversi e allora sarà necessario specificare se sono relativi all'una o all'altra prova (la tensione di snervamento a compressione potrebbe essere ad esempio maggiore di quella a trazione...).

In particolare i materiali fragili sono più resistenti a compressione che a trazione e infatti la tensione di rottura a compressione è maggiore di quella a trazione; i materiali duttili (sono i materiali che abbiamo detto elasto-plastici) invece hanno un comportamento simmetrico a trazione e a compressione.

13.3. Sollecitazione limite, sollecitazione ammissibile, coefficiente di sicurezza a trazione. Criteri di resistenza. Si pongono le seguenti definizioni

- **Sollecitazione limite σ_{lim}** : rappresenta il valore della tensione oltre il quale si verifica un certo fenomeno (snervamento, fine della linearità, rottura).
- **Coefficiente di sicurezza η** : è un parametro adimensionale maggiore dell'unità che si usa per indicare (vedi seguito) di quanto la massima tensione che può verificarsi nel componente deve essere al di sotto della tensione limite.
- **Tensione ammissibile σ_{amm}** : è la massima tensione che si ammette possa verificarsi nel componente. Se non si vuole che il componente subisca snervamento la tensione limite coinciderà con la tensione di snervamento e la tensione ammissibile dovrà essere inferiore alla tensione limite. Di quanto debba essere inferiore alla tensione limite lo stabilisce il progettista o le normative, definendo il valore del coefficiente di sicurezza: se ad esempio si desidera che la tensione ammissibile sia inferiore alla metà della tensione limite, intesa come tensione di snervamento, si avrà

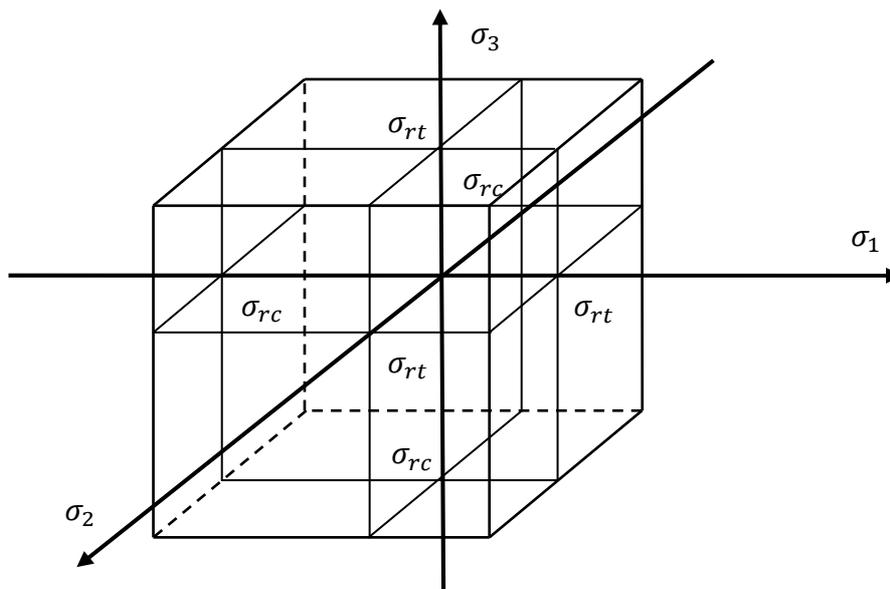
$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{amm}} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{\eta} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{2} = \frac{\sigma_s}{2}$$

Nel caso qui indicato il coefficiente di sicurezza vale dunque 2. In genere esso è compreso fra 1,2 e 10. Naturalmente i valori più alti del coefficiente di sicurezza si avranno in quei casi in cui è in gioco la sicurezza delle persone. La necessità di introdurre un coefficiente di sicurezza (più o meno elevato) è dettata da innumerevoli fattori: incertezza sui dati sperimentali relativi alla tensione limite, possibile presenza di difetti nei componenti, incertezza sulla reale tensione massima che si verificherà nel componente.

Tutto questo discorso vale se il componente è soggetto a una sollecitazione monoassiale, ovvero a una sollecitazione uguale a quella della prova di trazione. Ma in generale questa circostanza non si verifica e sorge la necessità di trovare qualche criterio per sfruttare i dati della prova di trazione anche per stati di tensione più complessi, per la situazione generale in cui tutte e sei le componenti di tensione siano non nulle.

*Nascono allora i **criteri di resistenza** i quali, partendo da diversi supposti teorici, arrivano a definire un parametro detto **tensione equivalente** σ_{eq} , il quale può essere direttamente confrontato con le grandezze ricavate dalle prove di trazione e compressione.*

13.4. Criterio di Rankine o della massima tensione principale. E' usato per **materiali fragili** e si basa sull'ipotesi che la rottura si realizza quando la massima tensione principale supera il valore della tensione di rottura a trazione e quando la minima (cioè quella negativa di valore maggiore) supera il valore della tensione di rottura a compressione. Allora se consideriamo uno spazio di assi coordinati $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, possiamo affermare che in base a questo criterio gli stati tensionali sicuri sono tutti quelli ai quali corrisponde un punto di coordinate $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ che rientri nel cubo indicato in figura dove σ_{rc} è la tensione di rottura a compressione e σ_{rt} è la tensione di rottura a trazione.



Pertanto

nel criterio di Rankine la tensione equivalente è costituita dalla massima tensione principale.

Consideriamo come esempio un materiale fragile (ghisa grigia) che presenti, in un dato punto, lo stato tensionale descritto dal tensore

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \text{ MPa} & 20 \text{ MPa} & 0 \\ 20 \text{ MPa} & 30 \text{ MPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Intanto lo stato tensionale è piano con piano delle tensioni coincidente col piano xy . Cerchiamo allora le altre due tensioni principali. Si ha

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{50 + 30}{2} \text{ MPa} + \sqrt{\left(\frac{50 - 30}{2}\right)^2 + 20^2} \text{ MPa} = \\ &= 40 \text{ MPa} + \sqrt{100 + 400} \text{ MPa} = 40 \text{ MPa} + 22,36 \text{ MPa} = 62,36 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{50 + 30}{2} \text{ MPa} - \sqrt{\left(\frac{50 - 30}{2}\right)^2 + 20^2} \text{ MPa} = \\ &= 40 \text{ MPa} - \sqrt{100 + 400} \text{ MPa} = 40 \text{ MPa} - 22,36 \text{ MPa} = 17,63 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Poiché le tensioni principali sono tutte di trazione ci interesserà conoscere esclusivamente la tensione di rottura a trazione. Supponendo che sia $\sigma_{rt} = 150 \text{ MPa}$ il criterio di Rankine ci garantisce contro la rottura del pezzo (essendo la massima tensione principale, che costituisce la tensione equivalente di questo esempio, di $62,36 \text{ MPa}$). Possiamo anche ricavare il fattore di sicurezza considerando che

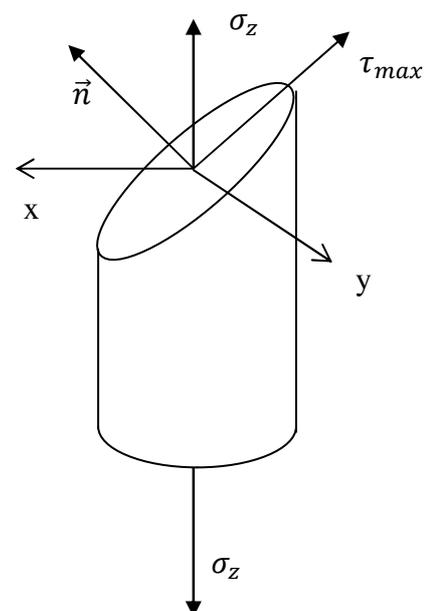
$$\sigma_{eq} = \sigma_1 = \frac{\sigma_{rt}}{\eta} \Rightarrow \eta = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_1} = \frac{150 \text{ MPa}}{62,36 \text{ MPa}} = 2,4$$

13.5. Criterio di Tresca o della massima tensione tangenziale. E' usato per **materiali duttili** si basa sul presupposto che lo snervamento avvenga quando la massima tensione tangenziale, nel punto in esame, raggiunge il valore della tensione tangenziale massima del provino sottoposto a prova di trazione (o di compressione) al momento della rottura.

Allora analizziamo in primo luogo lo stato tensionale di un provino sottoposto a prova di trazione: il suo tensore delle tensioni si scrive

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P/A \end{pmatrix}$$

Dunque esso risulta già in forma diagonale e le tensioni principali sono $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_z = P/A$. Le direzioni principali sono quella dell'asse z e degli



assi xy comunque ruotati (abbiamo un autovalore di molteplicità algebrica 2). Se si tengono presenti allora i cerchi di Mohr per stato tensionale generico (pag. 12) si trova che la tensione tangenziale massima è quella che si ha in corrispondenza a tutte le infinite giaciture con versore normale inclinato di 45° rispetto all'asse di trazione (l'asse z); tra l'altro tale tensione vale, sempre leggendo i cerchi di Mohr, $\tau_{max} = \sigma_z/2 = P/(2A)$. In figura sono indicati anche la direzione e il verso della tensione tangenziale massima: essi risultano intuitivi ma possiamo comunque ricavarli analiticamente. Si ha

$$\vec{t}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P/A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}P}{2A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau_{max} = \vec{t}_n \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\sqrt{2}P}{2A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}P}{2A} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{P}{2A}$$

Dunque in condizioni di snervamento incipiente si ha

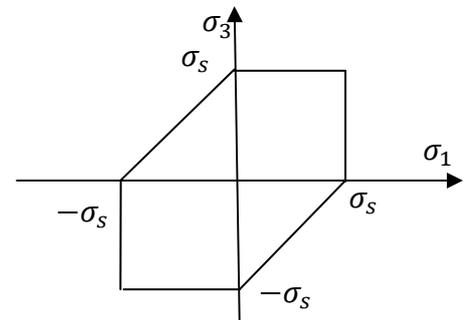
$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{2}$$

Ora consideriamo uno stato tensionale generico di tensioni principali $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. Sappiamo, dall'analisi sui cerchi di Mohr per stato tensionale generico (cap. 2) che la tensione tangenziale massima si scrive $\tau_{max} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$. Pertanto, secondo il presente criterio, non si ha snervamento finché è verificata la condizione

$$13.1) \tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \leq \tau_s = \frac{\sigma_s}{2} \Leftrightarrow \sigma_{eq} = \sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_{amm}$$

La tensione equivalente in questo criterio è dunque $\sigma_{eq} = \sigma_3 - \sigma_1$ dove si intende $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. Se consideriamo uno stato tensionale piano con $\sigma_2 = 0$ e consideriamo tutti i casi possibili

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 0, \sigma_3 < 0 \\ \sigma_1 = 0, \sigma_3 > 0 \\ \sigma_3 = 0, \sigma_1 < 0 \\ \sigma_3 = 0, \sigma_1 > 0 \\ \sigma_1, \sigma_3 > 0 \\ \sigma_1, \sigma_3 < 0 \\ \sigma_1 < 0 < \sigma_3 \\ \sigma_3 < 0 < \sigma_1 \end{aligned}$$



si ottiene che lo snervamento non si verifica purché il punto (σ_1, σ_3) cada nel dominio indicato in figura.

13.6. Criterio di Saint Venat o della massima deformazione principale.

Si basa sull'assunto che il materiale subisca danno quando la massima deformazione principale raggiunge il valore della deformazione longitudinale del provino al momento dello snervamento,

per un materiale duttile, o della rottura, per un materiale fragile. Se indico σ_{amm} la tensione ammissibile e con ε_{amm} la relativa deformazione longitudinale, sappiamo che sussiste la relazione

$$\varepsilon_{amm} = \frac{\sigma_{amm}}{E}$$

D'altra parte dalle leggi di Hooke dirette **6.22**, si ha anche

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))$$

e se per le deformazioni principali si ha $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3$, allora il criterio di Saint Venant impone come condizione di sicurezza

$$\varepsilon_3 \leq \varepsilon_{amm} \Leftrightarrow \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \leq \frac{\sigma_{amm}}{E} \Leftrightarrow \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \sigma_{amm}$$

In questo criterio dunque la tensione equivalente è

$$13.2) \quad \sigma_{eq} = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Supponendo di trattare un materiale duttile, per il quale la tensione limite (cioè la tensione di snervamento) è la stessa a trazione e a compressione, allora l'ulteriore condizione di sicurezza da imporre (secondo il criterio di Saint Venant) sarà

$$|\varepsilon_1| \leq \varepsilon_{amm} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \right| \leq \frac{\sigma_{amm}}{E} \Leftrightarrow |\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)| \leq \sigma_{amm}$$

13.7. Criterio di Beltrami o della massima energia di deformazione. Si basa sull'assunto che il materiale subisca danno (snervamento per materiale duttile, rottura per materiale fragile), quando l'energia di deformazione per unità di volume, ovvero il potenziale elastico, raggiunge il valore del potenziale elastico del provino al momento del danno (snervamento o rottura).

Utilizzando l'espressione **6.26** del potenziale elastico complementare, l'energia potenziale per unità di volume del provino al momento del danno vale

$$\Psi_{lim} = \frac{1}{2E} \sigma_{lim}^2$$

mentre il potenziale elastico complementare del generico stato tensionale si scrive

$$\Psi = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

Dunque la condizione di sicurezza secondo Beltrami (considerando non le grandezze limite, ma quelle ammissibili) è

$$\frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \leq \frac{1}{2E} \sigma_{amm}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{E}{G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$$

La tensione equivalente è allora evidentemente

$$13.3) \quad \sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{E}{G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

Ricordando la **6.12** abbiamo allora anche la scrittura

$$13.4) \quad \sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 2(1 + \nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

13.8. Criterio di Von Mises o della massima energia di deformazione

deviatorica. Il criterio in oggetto cerca di fornire una condizione più restrittiva rispetto a quello di Beltrami, del quale si può considerare un affinamento. Esso si basa sulla osservazione che materiali duttili soggetti a uno stato di tensione idrostatico (cioè tale per cui le tre tensioni principali hanno lo stesso valore), presentano una maggiore resistenza allo snervamento, rispetto al caso di uno stato di tensione monoassiale. Questo fa ritenere che a produrre lo snervamento sia anzitutto la componente deviatorica del tensore delle tensioni, cioè quella che determina una variazione di forma senza variazione di volume.

Nel paragrafo **3.14** abbiamo scomposto il tensore delle deformazioni nella sua componente sferica (che abbiamo dimostrato descrivere la variazione di volume) e in quella deviatorica (che, per esclusione, deve descrivere la variazione di forma). Ponendo infatti

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= \varepsilon_x - \varepsilon \\ \varepsilon'_y &= \varepsilon_y - \varepsilon \\ \varepsilon'_z &= \varepsilon_z - \varepsilon \\ \varepsilon &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon'_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon'_z \end{pmatrix}$$

dove il primo tensore a secondo membro è la componente sferica e il secondo la componente deviatorica. Per il tensore degli sforzi si può scrivere una decomposizione analoga: posto infatti

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x - \sigma \\ \sigma'_y &= \sigma_y - \sigma \\ \sigma'_z &= \sigma_z - \sigma \\ \sigma &= \frac{E}{1 - 2\nu} \varepsilon \end{aligned}$$

abbiamo per il tensore degli sforzi la scrittura

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \frac{\tau_{xy}}{2} & \frac{\tau_{xz}}{2} \\ \frac{\tau_{yx}}{2} & \sigma_y & \frac{\tau_{yz}}{2} \\ \frac{\tau_{zx}}{2} & \frac{\tau_{zy}}{2} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{xz} & \sigma'_z \end{pmatrix}$$

La cosa importante è tuttavia che, considerando le leggi di Hooke inverse **6.21**, è facile dimostrare che la componente sferica del tensore delle tensioni è dovuta alla analoga componente del tensore delle deformazioni; stesso discorso per la componente deviatorica, che risulta dovuta alla componente deviatorica delle deformazioni.

Torniamo ora al criterio di Von Mises. Se ciò che porta allo snervamento del materiale è soprattutto la deformazione deviatorica, cioè la variazione di forma, esprimiamo il potenziale elastico complementare relativo alla componente deviatorica del tensore delle tensioni. Per fare questo conviene calcolare il potenziale elastico relativo alla variazione di volume:

$$\begin{aligned} \Psi_{vol} &= \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) = 3\sigma^2 \frac{1-2\nu}{2E} = \\ &= \frac{1-2\nu}{E} \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{6} = \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_x\sigma_z + 2\sigma_y\sigma_z}{6} \end{aligned}$$

Poiché poi il potenziale elastico complessivo vale

$$\Psi = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

si conclude che il potenziale elastico relativo alla deviazione vale

$$\begin{aligned} \Psi_{dev} &= \Psi - \Psi_{vol} = \\ &= \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) - \\ &\quad - \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) = \\ &= \left(\frac{1}{2E} - \frac{1-2\nu}{6E}\right)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \left(\frac{\nu}{E} + 2\frac{1-2\nu}{6E}\right)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \\ &\quad + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \\ &= \left(\frac{3-1+2\nu}{6E}\right)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \left(\frac{6\nu+2-4\nu}{6E}\right)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \\ &\quad + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \\ &= \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \\ &\quad + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \\ &= \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \end{aligned}$$

Essendo poi, per la **6.13**

$$\frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}$$

Abbiamo

$$13.5) \Psi_{dev} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2))$$

Nel caso di stato di sforzo monoassiale, per la **13.5**, il potenziale elastico complementare relativo alla variazione di forma vale, allo snervamento

$$13.6) \Psi_{dev} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2$$

Allora il criterio di Von Mises (considerando la tensione ammissibile al posto di quella limite, cioè di snervamento) impone come criterio di sicurezza che sia

$$\frac{1+\nu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)) \leq \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{amm}^2 \Leftrightarrow$$

$$13.7) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$$

Dunque la tensione equivalente in questo criterio vale

$$13.8) \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

Considerando uno stato tensionale piano abbiamo che la figura limite individuata dal criterio di Von Mises è l'ellisse che circoscrive l'esagono del criterio di Tresca. Dunque il criterio di Tresca è più restrittivo rispetto a quello qui considerato. Tuttavia il criterio di Von Mises è il più usato per materiali duttili, tanto da apparire anche in molte normative.

13.9. Verifiche di sicurezza per la generica sollecitazione composta. Nei paragrafi **12.4**, **12.5** (ai quali si rimanda) abbiamo studiato lo stato tensionale della generica sollecitazione composta (che può in particolare essere una delle sollecitazioni semplici). Se allora calcolo per tale stato tensionale le σ_{eq} di ciascuno dei cinque criteri illustrati, ottengo quanto segue.

Stato tensionale in P dovuto alla generica sollecitazione composta			
Criterio di resistenza		Condizione di sicurezza $\sigma_{eq} \leq \sigma_{amm}$	
13.9)	Rankine	compressione	$\frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \geq \sigma_{amm}$
		trazione	$\frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$
13.10)	Tresca	$2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$	

13.11)	Saint Venant	$(1 - \nu) \frac{\sigma_z}{2} + (1 + \nu) \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$
13.12)	Beltrami	$\sqrt{\sigma_z^2 + 2(1 + \nu)(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\sigma_z^2 + \frac{E}{G}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$
13.13)	Von Mises	$\sqrt{\sigma_z^2 + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$

Si ricorda che per costruire questa tabella si è tenuta presente l'espressione **12.6** del tensore dello stato tensionale determinato nel generico punto P dalla generica sollecitazione composta, e i risultati del paragrafo **12.5**, relativo al calcolo dei circoli di Mohr di tale stato di tensione.

13.10. Verifiche di sicurezza per le sollecitazioni semplici. Ora particolarizzo la tabella del precedente paragrafo al caso di ciascuna delle sollecitazioni semplici.

Critero di resistenza	Condizione di sicurezza $\sigma_{eq} \leq \sigma_{amm}$	
Sforzo normale $\left(\sigma_z = \frac{N}{A}\right)$		
13.14)	Rankine	$\left \frac{N}{A}\right \leq \sigma_{amm} $
13.15)	Tresca	
13.16)	Saint Venant	
13.17)	Beltrami	
13.18)	Von Mises	
Note	Lo sforzo normale è costante su tutta la sezione A della trave, dunque la verifica di resistenza non deve essere fatta in un punto specifico della sezione.	
Flessione retta $\left(\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y\right)$		
13.19)	Rankine	$\left \frac{M_x}{I_x} y\right \leq \sigma_{amm} $

13.20)	Tresca	
13.21)	Saint Venant	
13.22)	Beltrami	
13.23)	Von Mises	
Note	La verifica di sicurezza va effettuata lì dove lo sforzo normale assume il valore massimo, in termini assoluti.	
Flessione deviata $\left(\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x\right)$		
13.24)	Rankine	$\left \frac{M_x}{I_x} y_A - \frac{M_y}{I_y} x_A \right \leq \sigma_{amm} $
13.25)	Tresca	
13.26)	Saint Venant	
13.27)	Beltrami	
13.28)	Von Mises	
Note	Le massime tensioni, in valore assoluto, si hanno nei punti più distanti dall'asse neutro. Ed è in tali punti che va verificata la condizione di cui sopra.	

Sforzo normale eccentrico $\left(\sigma_z = N \frac{y_n}{I_x} y + N \frac{x_n}{I_y} x + \frac{N}{A}\right)$

13.29)

Rankine

13.30)

Tresca

13.31)

Saint Venant

$$\left| N \frac{y_n}{I_x} y + N \frac{x_n}{I_y} x + \frac{N}{A} \right| \leq |\sigma_{amm}|$$

13.32)

Beltrami

13.33)

Von Mises

Note

Valgono le considerazioni fatte per la flessione deviata: si determina l'asse neutro e poi si considerano i punti più lontani da esso; in corrispondenza di essi la tensione normale assume l'intensità massima (di trazione e di compressione). Si può aggiungere che nel caso della trazione eccentrica può anche aversi la possibilità che l'asse neutro non intercetti la sezione e allora si dovrà fare solo una verifica, o per il valore ammissibile di compressione o per quello di trazione.

Torsione $\left(T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{pmatrix} \right)$

13.34)

Rankine

compressione

$$\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = |\vec{t}| \geq \sigma_{amm}$$

trazione

$$\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = |\vec{t}| \leq \sigma_{amm}$$

13.35)

Tresca

$$2\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = 2|\vec{t}| \leq \sigma_{amm}$$

13.36)

Saint Venant

$$(1 + \nu)\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = (1 + \nu)|\vec{t}| \leq \sigma_{amm}$$

13.37)	Beltrami	$\sqrt{2(1+\nu)(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sqrt{2(1+\nu)} \tilde{t} \leq \sigma_{amm}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{E}{G}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sqrt{\frac{E}{G}} \tilde{t} \leq \sigma_{amm}$	
13.38)	Von Mises	$\sqrt{3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sqrt{3} \tilde{t} \leq \sigma_{amm}$	
Note	<p>Dagli ultimi due criteri applicati, e da quello di Tresca, emerge chiaramente che il punto della sezione al quale applicare i criteri di sicurezza deve essere quello in cui la tensione raggiunge la massima intensità, perché se la condizione di sicurezza è verificata in quel punto allora lo è a maggior ragione nel resto della sezione.</p>		
Flessione e taglio $\left(T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \right)$			
13.39)	Rankine	compressione	$\frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \geq \sigma_{amm}$
		trazione	$\frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$
13.40)	Tresca	$2\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$	
13.41)	Saint Venant	$(1-\nu)\frac{\sigma_z}{2} + (1+\nu)\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \sigma_{amm}$	
13.42)	Beltrami	$\sqrt{\sigma_z^2 + 2(1+\nu)(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\sigma_z^2 + \frac{E}{G}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$	
13.43)	Von Mises	$\sqrt{\sigma_z^2 + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \leq \sigma_{amm}$	
Note	<p>Le componenti tangenziali non variano al variare della sezione; la componente normale invece, che ricordo essere data da</p> $\sigma_z = -\frac{M_y(z)}{I_y}x + \frac{M_x(z)}{I_x}y = -\frac{T_x(l-z)}{I_y}x - \frac{T_y(l-z)}{I_x}y$ <p>è funzione della sezione. Dunque si osserva che</p> <ul style="list-style-type: none"> • la verifica di resistenza deve essere condotta nella sezione di massima tensione normale; • in tale sezione la verifica deve essere condotta nei punti in cui è massima la 		

tensione equivalente fornita dal criterio adottato;

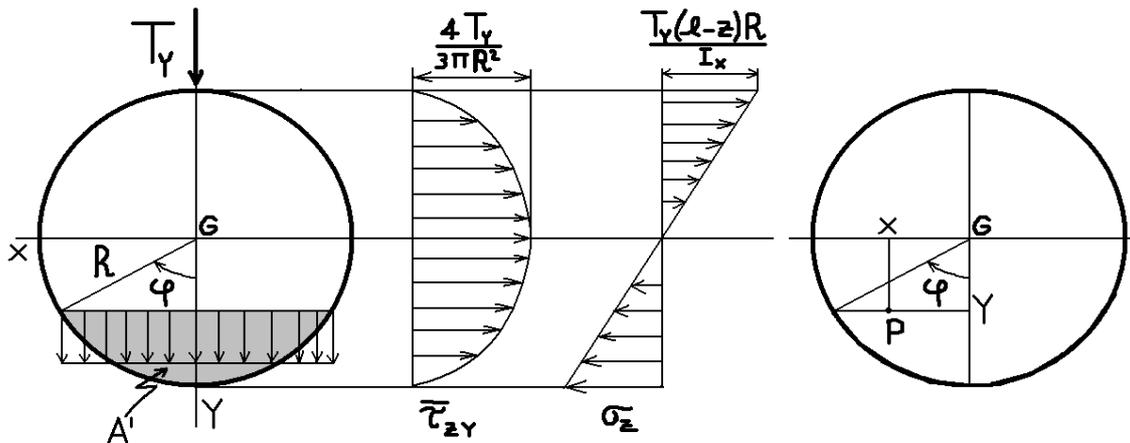
- per capire quali sono questi punti saranno utili i diagrammi delle tensioni relativi alla sezione. In alcuni casi sarà invece necessario procedere analiticamente, ricavando i punti di massimo della tensione equivalente.

Si osserva che le tensioni equivalenti fornite dai vari criteri per la flessione e taglio sono formalmente identiche a quelle viste nel paragrafo 13.9 per la generica sollecitazione composta. Questo perché in entrambi i casi il tensore delle tensioni ha gli stessi elementi nulli.

13.11. Esempio. Consideriamo l'esempio della sezione circolare soggetta a flessione e taglio (vedi figura). Volendo applicare il criterio di Von Mises, sarà opportuno ricavare per via analitica il punto di massimo della funzione

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{z\xi}^2} = \sqrt{\left(\frac{T_y(l-z)R(-\cos\varphi)}{I_x}\right)^2 + 3\left(\frac{4T_y}{3\pi R^2}(\sin\varphi)^2\right)^2}$$

Infatti dai diagrammi delle tensioni non è possibile capire 'ad occhio' dove possa trovarsi il punto maggiormente sollecitato. Dunque per prima cosa ci si pone nella sezione in cui la tensione normale assume il valore maggiore, ovvero la sezione estrema per $z = 0$, ottenendo la tensione equivalente



$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{(T_y l R)^2 (\cos\varphi)^2}{I_x^2} + 3\left(\frac{4T_y}{3\pi R^2}\right)^2 (\sin\varphi)^4}$$

Cerco allora il punto di massimo del radicando:

$$\begin{aligned} & \frac{d\left(\frac{(T_y l R)^2 (\cos\varphi)^2}{I_x^2} + 3\left(\frac{4T_y}{3\pi R^2}\right)^2 (\sin\varphi)^4\right)}{d\varphi} = \\ & = -2\left(\frac{T_y l R}{I_x}\right)^2 \cos\varphi \sin\varphi + 12\left(\frac{4T_y}{3\pi R^2}\right)^2 (\sin\varphi)^3 \cos\varphi = \\ & = 2T_y^2 \cos\varphi \sin\varphi \left(-\frac{l^2 R^2}{I_x^2} + \frac{32}{3\pi^2 R^4} (\sin\varphi)^2\right) \end{aligned}$$

Poiché risulta

$$-\frac{l^2 R^2}{I_x^2} + \frac{32}{3\pi^2 R^4} (\sin \varphi)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{3\pi^2 R^6 l^2}{32 I_x^2}} \Leftrightarrow \varphi = \pm \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{3\pi^2 R^6 l^2}{32 I_x^2}} \right)$$

i punti tra i quali cercare la massima tensione equivalente sono quelli corrispondenti agli angoli

$$\varphi = 0 \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \varphi = \pm \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{3\pi^2 R^6 l^2}{32 I_x^2}} \right)$$

Evidentemente a ciascuno degli angoli indicati corrispondono tutti i punti di un segmento parallelo all'asse x .

Capitolo 14. Sistemi piani

In questo capitolo affronto il problema statico di strutture piane costituite da elementi traviformi (o travi) comunque vincolati fra loro e con il telaio (ovvero con un corpo che consideriamo fisso) e comunque sollecitate.

14.1. Trave. Sia γ una curva dello spazio e sia S una superficie piana tale che

- 1) il suo baricentro sia su γ ;
- 2) il piano che la contiene sia ortogonale a γ ;
- 3) il suo diametro sia piccolo rispetto alla lunghezza di γ .

Allora dico trave il solido descritto da S che scorre lungo γ , con S che può variare forma ed estensione mentre scorre, purché rispetti sempre le condizioni 1,2,3. Dico poi che γ costituisce l'asse geometrico della trave.

Si aggiunge che per sezione di una trave si intende ogni intersezione fra la trave e un piano ortogonale all'asse geometrico della trave stessa.

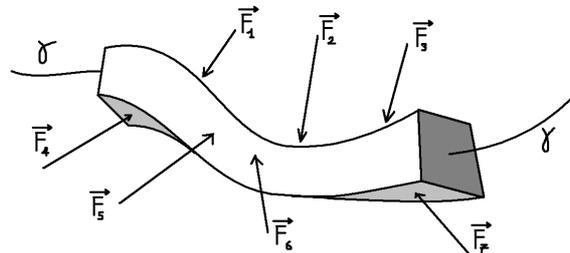
Una trave si dice piana quando il suo asse geometrico giace tutto su un piano il quale contenga un asse centrale di inerzia di ogni sezione della trave.

14.2. Equazioni della statica. Ricordiamo che l'equilibrio meccanico di un corpo (e dunque anche di una trave) si realizza se e solo se sono verificate le due¹ equazioni globali della statica dei corpi rigidi le quali porgono

$$14.1) \quad \begin{cases} \vec{F}^a + \vec{F}^v = 0 \\ \vec{M}_A^a + \vec{M}_A^v = 0 \end{cases}$$

dove

- \vec{F}^a : risultante della sollecitazione attiva;
- \vec{F}^v : risultante della sollecitazione vincolare;
- \vec{M}_A^a : momento totale della sollecitazione attiva rispetto a un generico punto A ;
- \vec{M}_A^v : momento totale della sollecitazione vincolare rispetto a un generico punto A .



14.3. Vincoli del piano. Poniamo alcune definizioni necessarie a impostare il problema dello studio statico delle strutture piane.

- n : numero di corpi rigidi interconnessi che costituiscono la struttura;
- g : numero di gradi di libertà della struttura piana: se gli elementi della struttura sono n allora $g = 3n$;
- v : numero dei gradi di vincolo imposti dai 6 tipi² di vincoli piani (elencati nella tabella seguente), cioè l'incastro(i), la cerniera(ce), l'incastro scorrevole o doppio pendolo(is), il pendolo(p), il carrello (ca) e il doppio-doppio pendolo(ddp). Si trova

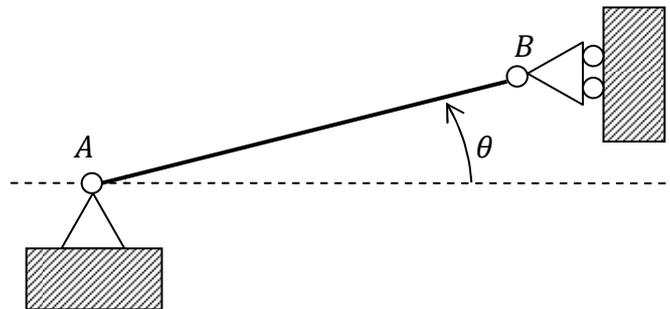
¹ Le due equazioni globali della statica sono due equazioni vettoriali le quali dunque si traducono in sei equazioni scalari.

$$14.2) \quad v = 3i + 2(c + is) + p + ca + ddp$$

dove si intende che i è il numero di incastri, p è il numero di pendoli, etc. Questa formula **vale solo se si assume che i vincoli siano esterni** (cioè ancorati a uno spazio di riferimento assunto immobile) **e che siano semplici**, ovvero che non siano collegati a due o più elementi della struttura (nel seguito discuteremo il caso di vincoli interni e multipli);

- r : numero delle reazioni vincolari incognite (risulta $r = v$);
- un insieme di vincoli imposti a un sistema è definito **inefficace** quando pur essendo $v \geq g$ il sistema ha ancora la possibilità di muoversi, nel qual caso si parla anche di **vincoli mal posti**;
- supponendo i vincoli tutti efficaci allora, nel caso in cui sia $v \leq g$, la differenza $g - v$ indica i **gradi di libertà residui** il cui numero è pari al numero dei parametri scalari indipendenti necessari e sufficienti a definire la posizione della struttura; tali parametri sono detti **coordinate lagrangiane** e anche **incognite cinematiche**. Se invece alcuni vincoli sono inefficaci il numero delle incognite cinematiche sarà maggiore di $g - v$.

Per esemplificare gli enti appena definiti si consideri la trave AB in figura: è vincolata al telaio con una cerniera in A e un carrello in B . Il grado di vincolo è dunque $v = ce + ca = 2 + 1 = 3$ mentre i gradi di libertà, trattandosi di un solo corpo, sono $g = 3$. La posizione della trave nel piano risulta univocamente individuata dall'angolo θ , il quale costituisce l'unica coordinata lagrangiana, ovvero l'unica incognita cinematica. Si osserva che, pur essendo $v = g$, si ha un grado di libertà residuo, il che significa, secondo le definizioni date, che il sistema di vincoli è inefficace, ovvero i vincoli sono mal posti.



Segue la rassegna dei vincoli del piano: se ne indicano reazioni vincolari e grado di vincolo.

Vincoli del piano		
Nome	Simbolo e reazioni esplicabili dal vincolo	Grado di vincolo
Incastro		3

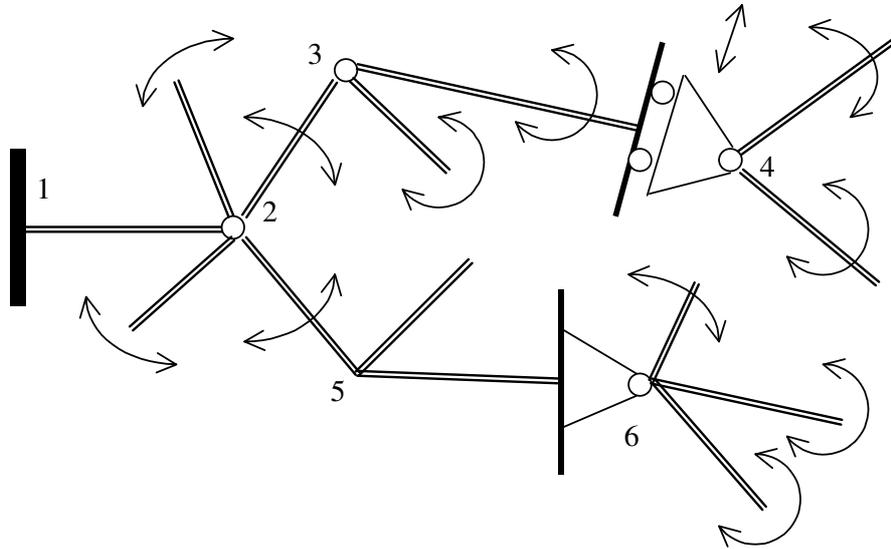
² L'incastro scorrevole e il doppio pendolo sono in realtà lo stesso vincolo (ciò che conta non è il nome o la rappresentazione grafica, ma il tipo di reazione vincolare).

Cerniera		2
Incastro scorrevole		2
Doppio pendolo		2
Biella o pendolo		1
Carrello		1
Doppio doppio pendolo		1

Questi vincoli risultano

- **olonomi** (o di posizione) cioè impongono delle restrizioni alle posizioni assumibili dal corpo a essi collegato;
- **fissi** cioè indipendenti dal tempo;
- **bilaterali** nel senso che i gradi di libertà lasciati liberi sono tali in entrambe le direzioni (per intenderci la cerniera, ad esempio, permette la rotazione in entrambi i versi);
- **lisci** (o privi di attrito) nel senso che i movimenti ai quali non si oppongono possono avvenire senza attrito;
- **perfetti** (o non cedevoli) nel senso che i movimenti ai quali si oppongono non possono in alcun modo avvenire.

14.4. Vincoli interni nel piano. Vediamo adesso cosa succede se i vincoli sopra elencati collegano fra loro più elementi della stessa struttura. In questo caso il calcolo dei gradi di vincolo deve essere effettuato prendendo come elemento fisso uno degli elementi collegati, e poi



moltiplicando i gradi di vincolo offerti dal vincolo in oggetto per i restanti elementi. Consideriamo la struttura in figura. Contando i gradi di libertà residui, cioè le incognite cinematiche, troviamo che essi sono 12 (tanti quanti le doppie frecce in figura); essendo poi $n = 14$ risulta $g = 3n = 42$ e dunque

$$g - v = 12 \Rightarrow v = g - 12 = 30$$

Vediamo ora come si possa ricavare il numero di gradi di vincolo ragionando direttamente sui vincoli stessi. Procediamo nodo per nodo (intendo con nodi i punti di convergenza di più elementi della struttura, fra loro e/o con lo spazio di riferimento).

- nodo 1: un incastro collega un elemento allo spazio di riferimento, dunque $v_1 = i \cdot 1 = 3$;
- nodo 2: una cerniera collega fra loro 5 elementi, dunque, presone uno come fisso abbiamo $v_2 = ce \cdot (5 - 1) = 2 \cdot 4 = 8$;
- nodo 3: una cerniera collega fra loro 3 elementi, dunque, presone uno come fisso abbiamo $v_3 = ce \cdot (3 - 1) = 2 \cdot 2 = 4$;
- nodo 4: un carrello collega 3 elementi; uno si considera fisso, quello sul quale il carrello scorre, poi si considera il vincolo come un carrello che vincola un elemento a cui sono collegati 2 elementi attraverso una cerniera (coincidente con la cerniera del carrello); in base a questo ragionamento il grado di vincolo è $v_4 = ca + ce \cdot (2 - 1) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$;
- nodo 5: un incastro collega 3 elementi, dunque $v_5 = i \cdot (3 - 1) = 3 \cdot 2 = 6$;
- nodo 6: una cerniera collega 4 elementi, dunque $v_6 = ce \cdot (4 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$.

Sommando abbiamo i gradi di vincolo complessivi

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 3 + 8 + 4 + 3 + 6 + 6 = 30$$

e ritroviamo il risultato ottenuto contando le incognite cinematiche. Si può osservare che **al fine di ricavare i gradi di libertà residui è più facile contare le incognite cinematiche piuttosto che i gradi di vincolo.**

14.5. Strutture piane. Al fine di esaminare senza ambiguità il problema statico delle strutture piane propongo qui e nel seguito alcune definizioni che probabilmente non sono del tutto aderenti a quelle che si riscontrano in altri testi di Scienza delle Costruzioni:

- **telaio:** è lo spazio di riferimento (si può pensare anche come un corpo rigido) rispetto al quale si valuta il moto della struttura;
- **struttura:** è l'insieme di uno o più travi comunque vincolate fra loro e con il telaio, cioè l'insieme delle travi e dei vincoli;
- **struttura piana:** quando gli assi geometrici delle sue travi sono tutti contenuti nello stesso piano.

La differenza fra gradi di libertà e gradi di vincolo di una struttura discrimina i tre casi seguenti:

- **struttura labile:** quando $v < g$;
- **struttura isostatica:** quando $v = g$;
- **struttura iperstatica:** quando $v > g$.

In genere nei testi queste definizioni considerano che i gradi di vincolo siano tutti efficaci: in questo caso una struttura iperstatica non avrà mai gradi di libertà residui, così come una struttura isostatica. Io preferisco invece non imporre, in queste definizioni, la condizione di efficacia ai gradi di vincolo: quindi, secondo questa posizione, si possono avere strutture isostatiche e iperstatiche con gradi di libertà residua. Questa posizione permette, a mio avviso, di essere meno ambigui nella trattazione che segue.

Se si considera ad esempio la trave disegnata nel paragrafo **14.3** si trova che pur essendo una struttura isostatica (poiché $v = g$), essa presenta un grado di libertà residuo.

14.6. Sistemi piani. Pongo le seguenti definizioni:

- **sollecitazione:** è l'insieme delle forze generalizzate (cioè forze e coppie) agenti sulla struttura;
- **sollecitazione reattiva:** è la sollecitazione delle forze che i vincoli esercitano sulle travi a cui sono collegati;
- **sollecitazione attiva:** è la sollecitazione delle forze che agiscono dall'esterno sulle travi, come il campo gravitazionale, il campo elettrico, il campo magnetico, i carichi imposti alle travi...
- **sollecitazione piana:** quando le forze sono tutte contenute nello stesso piano e le coppie sono tutte ortogonali a tale piano;
- **sistema:** è l'insieme di una struttura e di una sollecitazione agente su di essa;

- **sistema piano:** è l'insieme di una struttura piana e di una sollecitazione piana, riferite allo stesso piano.

Il sistema **14.1** permette di associare univocamente (ma non biunivocamente) a ogni sistema piano un **sistema lineare** di g equazioni in v incognite, che indichiamo

$$14.3) \quad A_{(g,v)}X_{(v)} = F_{(g)}$$

dove (come vedremo negli esempi)

- la matrice dei coefficienti $A_{(g,v)}$ è individuata dalla geometria della struttura;
- il vettore delle incognite $X_{(v)}$ ha come elementi tutte e sole le reazioni vincolari;
- il vettore dei termini noti $F_{(g)}$ è individuato dalla sollecitazione esterna.

Come sappiamo dall'Algebra Lineare il sistema **14.3** può avere una soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione a seconda del valore del rango della matrice dei coefficienti. In particolare:

- $rg(A) = rg(A|F) = v \Leftrightarrow$ la soluzione esiste ed è unica;
- $rg(A) = rg(A|F) < v \Leftrightarrow$ esistono infinite soluzioni;
- $rg(A) < rg(A|F) \Leftrightarrow$ non esistono soluzioni.

Da un punto di vista fisico l'esistenza di una o più soluzioni, ovvero la compatibilità del sistema **14.3**, si traduce nella quiete della struttura sotto quella data sollecitazione, ovvero nella possibilità delle reazioni vincolari di bilanciare la sollecitazione attiva; se invece il sistema lineare **14.3** non ammette soluzioni, cioè è impossibile, allora la sollecitazione attiva determina il moto della struttura, ovvero i vincoli non sono in grado di offrire resistenza alla sollecitazione attiva.

Per discriminare questi tre tipi di sistemi la Scienza delle Costruzioni usa le seguenti definizioni:

- **sistema staticamente determinato:** esiste una e una sola sollecitazione reattiva che bilancia la sollecitazione attiva (la struttura è in quiete) \Leftrightarrow la soluzione del sistema della statica **14.3** esiste ed è unica $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A|F) = v$;
- **sistema staticamente indeterminato:** esistono infinite sollecitazioni reattive che bilanciano la sollecitazione attiva (la struttura è in quiete) \Leftrightarrow esistono infinite soluzioni del sistema della statica **14.3** $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A|F) < v$;
- **sistema staticamente impossibile:** nessuna sollecitazione reattiva è in grado di bilanciare la sollecitazione attiva (la struttura si muove) \Leftrightarrow non esistono soluzioni del sistema della statica **14.3** $\Leftrightarrow rg(A) < rg(A|F)$.

In definitiva tutti i possibili sistemi possono essere classificati nelle dieci categorie riportate nelle tre tabelle seguenti.

1			
$v < g$			
struttura labile comunque sollecitata			
1.1		1.2	
$rg(A) < v$ vincoli inefficaci		$rg(A) = v$ vincoli efficaci	
1.1.1	1.1.2	1.2.1	1.2.2
$rg(A) = rg(A F)$ sistema staticamente indeterminato	$rg(A) < rg(A F)$ sistema staticamente impossibile	$rg(A) = rg(A F)$ sistema staticamente determinato	$rg(A) < rg(A F)$ sistema staticamente impossibile
$rg(A) = rg(A F) < v < g$	$rg(A) < rg(A F) < v < g$	$rg(A) = rg(A F) = v < g$	$rg(A) < rg(A F) = v < g$

2			
$v = g$			
struttura isostatica comunque sollecitata			
2.1		2.2	
$rg(A) < v$ vincoli inefficaci		$rg(A) = v$ vincoli efficaci	
2.1.1	2.1.2	$rg(A) = rg(A F)$ sistema staticamente determinato	
$rg(A) = rg(A F)$ sistema staticamente indeterminato	$rg(A) < rg(A F)$ sistema staticamente impossibile		
$rg(A) = rg(A F) < v = g$	$rg(A) < rg(A F) < v = g$	$rg(A) = rg(A F) = v = g$	

3		
$v > g$ struttura iperstatica comunque sollecitata		
3.1		3.2
$rg(A) < g$ vincoli inefficaci		$rg(A) = g$ vincoli efficaci
3.1.1	3.1.2	$rg(A) = rg(A F)$ sistema staticamente indeterminato
$rg(A) = rg(A F)$ sistema staticamente indeterminato	$rg(A) < rg(A F)$ sistema staticamente impossibile	
$rg(A) = rg(A F) < g < v$	$rg(A) < rg(A F) < g < v$	$rg(A) = rg(A F) = g < v$

I dieci casi elencati nelle 3 tabelle precedenti si ritrovano seguendo il noto algoritmo risolutivo dei sistemi di equazioni lineari, applicato al sistema **14.3**, che riporto qui di seguito.

$rg(A) = rg(A F)$	falso \Rightarrow	sistema staticamente impossibile, ovvero uno dei seguenti casi 1.1.2, 1.2.2 2.1.2, 3.1.2
vero \Downarrow		
$rg(A) = g$	falso \Rightarrow	uno dei seguenti casi 1.1.1, 1.2.1 2.1.1, 3.1.1
vero \Downarrow		\Downarrow
$rg(A) = v$	\leftarrow	si eliminano $g - rg(A)$ righe, lasciando solo quelle L.I.
	falso \Rightarrow	uno dei seguenti casi

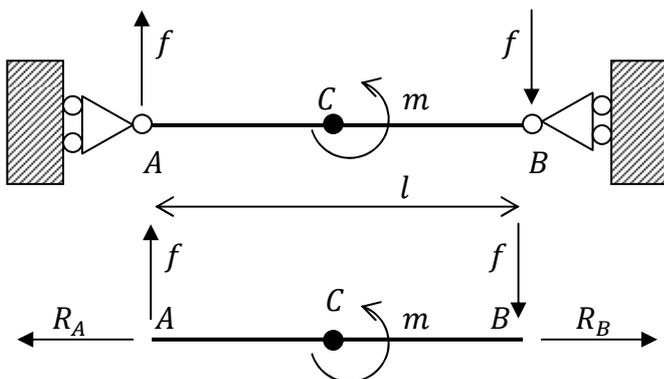
vero ↓		1.1.1, 2.1.1 3.1.1, 3.2
sistema staticamente determinato, ovvero uno dei seguenti casi 1.2.1, 2.2		↓
		si attribuisce valore parametrico arbitrario a $v - rg(A)$ incognite
sistema staticamente indeterminato, ovvero uno dei seguenti casi 1.1.1, 2.1.1 3.1.1, 3.2		↔

Si osserva tra l'altro che

- i sistemi costituiti da strutture labili isostatiche possono dare luogo a tutti e tre i sistemi possibili (staticamente determinato, indeterminato, impossibile);
- i sistemi costituiti da strutture iperstatiche non possono mai essere sistemi staticamente determinati;
- i sistemi costituiti da sollecitazioni attive nulle sono sempre risolvibili (o staticamente determinati o indeterminati) a prescindere dal tipo di struttura, poiché in tal caso sarà sempre $rg(A) = rg(A|F)$;
- i sistemi staticamente determinati sono solo di due tipi (1.2.1 oppure 2.2), e fra loro c'è una differenza sostanziale: la quiete della struttura del sistema 1.2.1 in generale viene meno modificando la sollecitazione attiva; invece la quiete della struttura del sistema 2.2 rimane verificata qualunque sia la sollecitazione attiva (risulta infatti $rg(A) = rg(A|F) \forall F$) ed è dunque una caratteristica intrinseca della struttura.

Nel seguito riporto un semplice esempio (discusso e risolto) per ciascuno dei 10 sistemi elencati nelle 3 tabelle precedenti, nonché nell'algoritmo di cui sopra.

14.7. Sistemi piani con struttura labile. Come abbiamo visto tali sistemi possono rientrare in quattro categorie, che abbiamo indicato 1.1.1, 1.1.2, 1.2.1 e 1.2.2. Esaminiamole una a una.



Sistema 1.1.1. La trave AB è vincolata con un carrello in A e uno in B , dunque $v = 2 \cdot ca = 2$; essendo $poig = 3 \cdot n = 3 \cdot 1 = 3$, la struttura è labile. In corrispondenza delle mezzerie C è applicata la coppia m mentre due forze $f = m/l$ uguali e contrarie sono applicate in A, B . Le reazioni vincolari sono R_A, R_B . Imponendo l'equilibrio meccanico al sistema fisico si ottiene il sistema lineare **14.3** che porge:

$$14.4) \begin{cases} R_A - R_B = 0 \\ 0 = 0 \\ M_A = m - fl = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m - fl \end{bmatrix}$$

Come è immediato, tenendo presente che $f = m/l$, verificare che si ha

$$rg(A) = 1 = rg(A|F) < v = 2 < g = 3$$

e dunque effettivamente ci si trova nel caso 1.1.1. Pertanto il sistema dovrebbe essere equilibrato ma indeterminato. Vediamo se troviamo conferma di ciò risolvendo il sistema lineare **14.4**: eliminando le 2° e la 3° equazione e attribuendo valore parametrico a una delle due incognite si ha

$$\begin{cases} R_A - R_B = 0 \\ R_B = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

e si trovano ∞^1 soluzioni compatibili con l'equilibrio.

Sistema 1.1.2. Consideriamo la trave del precedente esempio e poniamo in questo caso $m \neq fl$. Allora si ha evidentemente

$$rg(A) = 1 \neq rg(A|F) = 2 = v = 2 < g = 3$$

ovvero il caso 1.1.2. Il sistema è effettivamente impossibile poiché non può essere verificata la 3° equazione.

Sistema 1.2.1. Le travi AB e BC sono connesse con una cerniera in B e sono collegate al telaio con una cerniera in A e un carrello in B . Per i gradi di vincolo si calcola $v = ce + ce_{int} + ca = 5$, mentre i gradi di libertà sono $g = 3 \cdot 2 = 6$. La sollecitazione attiva è costituita da una forza $2f$ applicata nella mezzeria D e una forza f applicata in C .

Imponendo l'equilibrio meccanico a ciascuna delle due travi del sistema fisico complessivo si ottiene il sistema lineare **14.3** che porge

$$14.5) \begin{cases} R_A + R_B = 2f \\ V_A - V_B = 0 \\ M_D = R_B l - R_A l = 0 \\ \begin{cases} R_B = f \\ V_B - V_C = 0 \\ M_B = V_C 2l = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \\ V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

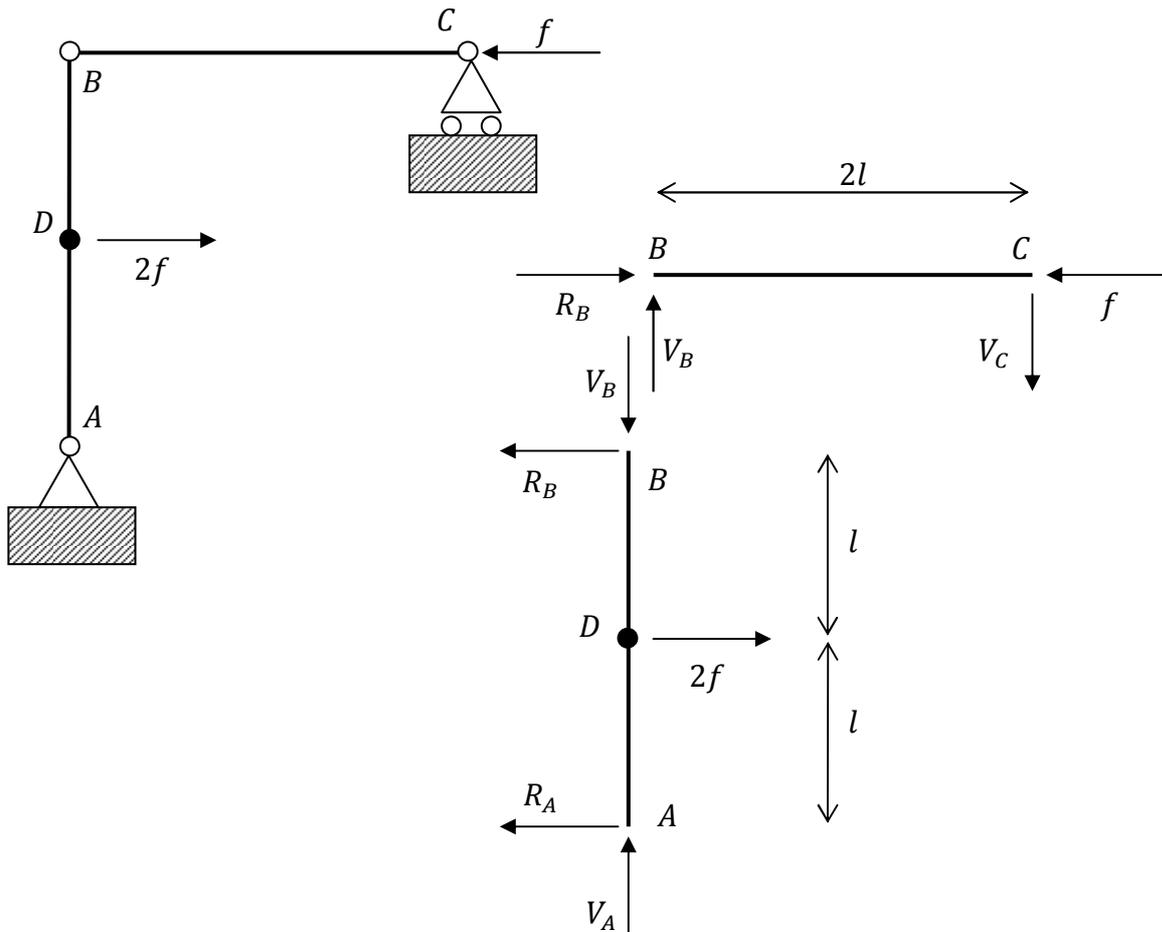
Il rango della matrice dei coefficienti è 5, infatti

$$\det A_{23456,12345} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Anche il rango della matrice completa è 5, infatti

$$\det A|B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2f \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} f =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} f = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} f + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} f = (-2 + 1 + 1)f = 0$$



Per cui si ha in definitiva

$$rg(A) = 5 = rg(A|B) = v < g = 6$$

ed effettivamente ci troviamo nel caso 1.2.1. Pertanto il sistema dovrebbe risultare staticamente determinato. Verifichiamolo risolvendo il sistema **14.5**. Eliminando la prima equazione si ha

$$\begin{cases} V_A = V_B \\ R_A = R_B \\ R_B = f \\ V_B = V_C \\ V_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A = f \\ R_B = f \\ V_A = 0 \\ V_B = 0 \\ V_C = 0 \end{cases}$$

Otteniamo così il valore delle reazioni vincolari per il quale si realizza l'equilibrio fra la sollecitazione attiva e quella reattiva.

Sistema 1.2.2. Riconsideriamo il sistema del precedente caso e modifichiamo la sollecitazione attiva, ad esempio annullando la forza in D . Allora il sistema della statica si scrive

$$14.6) \begin{cases} R_A + R_B = 0 \\ V_A - V_B = 0 \\ M_D = R_B l - R_A l = 0 \\ \begin{cases} R_B = f \\ V_B - V_C = 0 \\ M_B = V_C 2l = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \\ V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esso condivide con il sistema **14.5** la matrice dei coefficienti, dunque anche qui $rg(A) = 5$, tuttavia il vettore dei termini noti è cambiato, e con esso è cambiato anche il rango della matrice completa, infatti

$$\det A|B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} f = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} f = -2f \Rightarrow rg(A|F) = 6$$

Quindi si ha in definitiva

$$rg(A) = 5 = v < rg(A|F) = 6 = g$$

ed effettivamente ci troviamo nel caso 1.2.2: il sistema lineare **14.6** è incompatibile cioè il sistema fisico in questione non è in equilibrio meccanico (si muove).

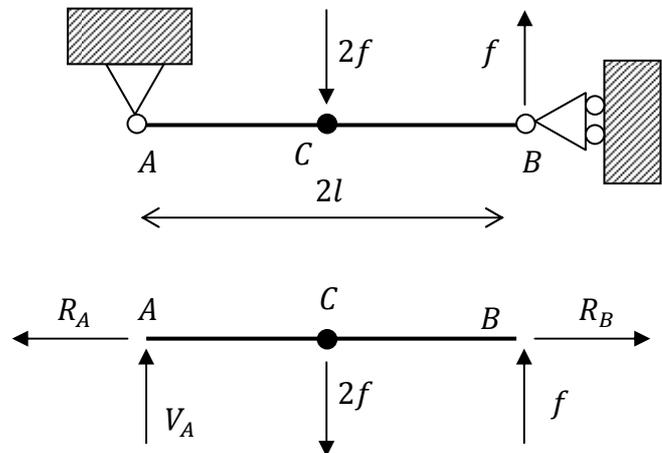
14.8. Sistemi piani con struttura isostatica. Come abbiamo visto tali sistemi possono rientrare in tre categorie, che abbiamo indicato 2.1.1, 2.1.2e 2.2. Esaminiamole una a una.

Sistema 2.1.1. La trave AB è vincolata con una cerniera in A e un carrello in B , dunque $v = 3$; essendo poi $g = 3$, la struttura è isostatica. In corrispondenza della mezzera C è applicata una forza verticale $2f$, mentre in B è applicata, con verso opposto, una forza verticale f .

Il sistema della statica per il sistema piano in oggetto si scrive

$$14.7) \begin{cases} R_A - R_B = 0 \\ V_A = 2f - f \\ M_B = -V_A 2l + 2fl = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \\ V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ f \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice dei coefficienti è 2, infatti



$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det A_{12,23} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

D'altra parte anche il determinante della matrice completa è 2, infatti

$$\det A|F_{123,124} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} f = 0$$

$$\det A|F_{123,134} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 1 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} f = 0$$

$$\det A|F_{123,234} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 1 & f \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} f = 0$$

Quindi si è trovato che

$$rg(A) = 2 = rg(A|F) < v = 3 = g$$

ed effettivamente ci troviamo nel caso 2.1.1. Pertanto il sistema dovrebbe essere staticamente indeterminato. Verifichiamolo risolvendo il **14.7**. Eliminando la terza equazione e attribuendo valore parametrico arbitrario alla prima incognita abbiamo

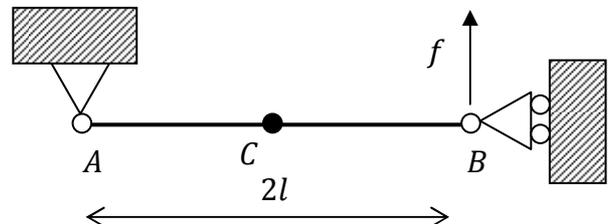
$$\begin{cases} R_A = k \\ R_B = k, \\ V_A = f \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Sistema 2.1.2. Riprendendo il sistema del caso precedente e annullando la forza in C , il sistema della statica si scrive

$$14.8) \begin{cases} R_A - R_B = 0 \\ V_A = -f \\ M_B = -V_A 2l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A - R_B = 0 \\ V_A = -f \\ V_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \\ V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice dei coefficienti, che non è variata rispetto al caso precedente, è 2; quello della matrice completa è invece ora 3, infatti

$$\det A|F_{123,234} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -f \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -f \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f$$



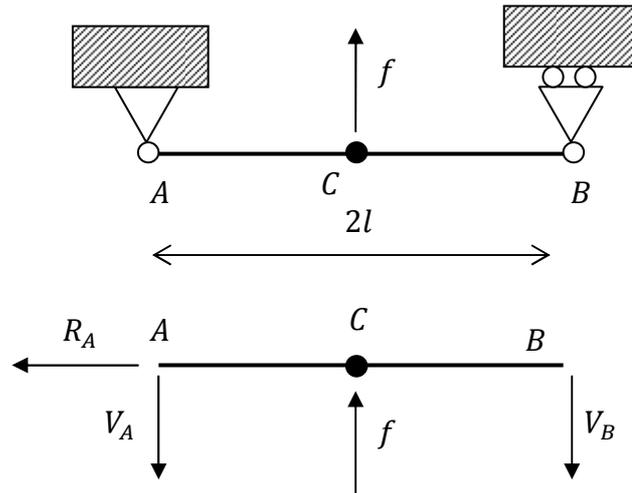
Quindi in definitiva

$$rg(A) = 2 < rg(A|F) = 3 = v = g$$

e effettivamente ci troviamo nel caso 2.1.2. Il sistema piano è dunque staticamente impossibile, come si vede tra l'altro immediatamente considerando la 2° e la 3° equazione del **14.8**.

Sistema 2.2. Riprendiamo il sistema del caso 2.1.1 e ruotiamo il carrello di 90°, e applichiamo poi una qualunque sollecitazione, ad esempio una forza verticale in mezzzeria. Il sistema della statica in questo caso si scrive

$$14.9) \begin{cases} R_A = 0 \\ V_A + V_B = f \\ M_A = V_B 2l - fl = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A = 0 \\ V_A + V_B = f \\ V_B = f/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_A \\ V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ f/2 \end{bmatrix}$$



La matrice dei coefficienti ha rango 3 (il suo determinante è unitario), dunque

$$rg(A) = rg(A|F) = 3 = v = g$$

ed effettivamente ci ritroviamo nel caso 2.2. Allora il sistema piano dovrebbe essere staticamente determinato, cioè il sistema lineare **14.9** dovrebbe avere una e una sola soluzione. In effetti

$$\begin{cases} R_A = 0 \\ V_A + V_B = f \\ V_B = f/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A = 0 \\ V_A = f/2 \\ V_B = f/2 \end{cases}$$

14.9. Sistemi piani con struttura iperstatica. Come abbiamo visto tali sistemi possono rientrare in tre categorie, che abbiamo indicato 3.1.1, 3.1.2 e 3.2. Esaminiamole una a una.

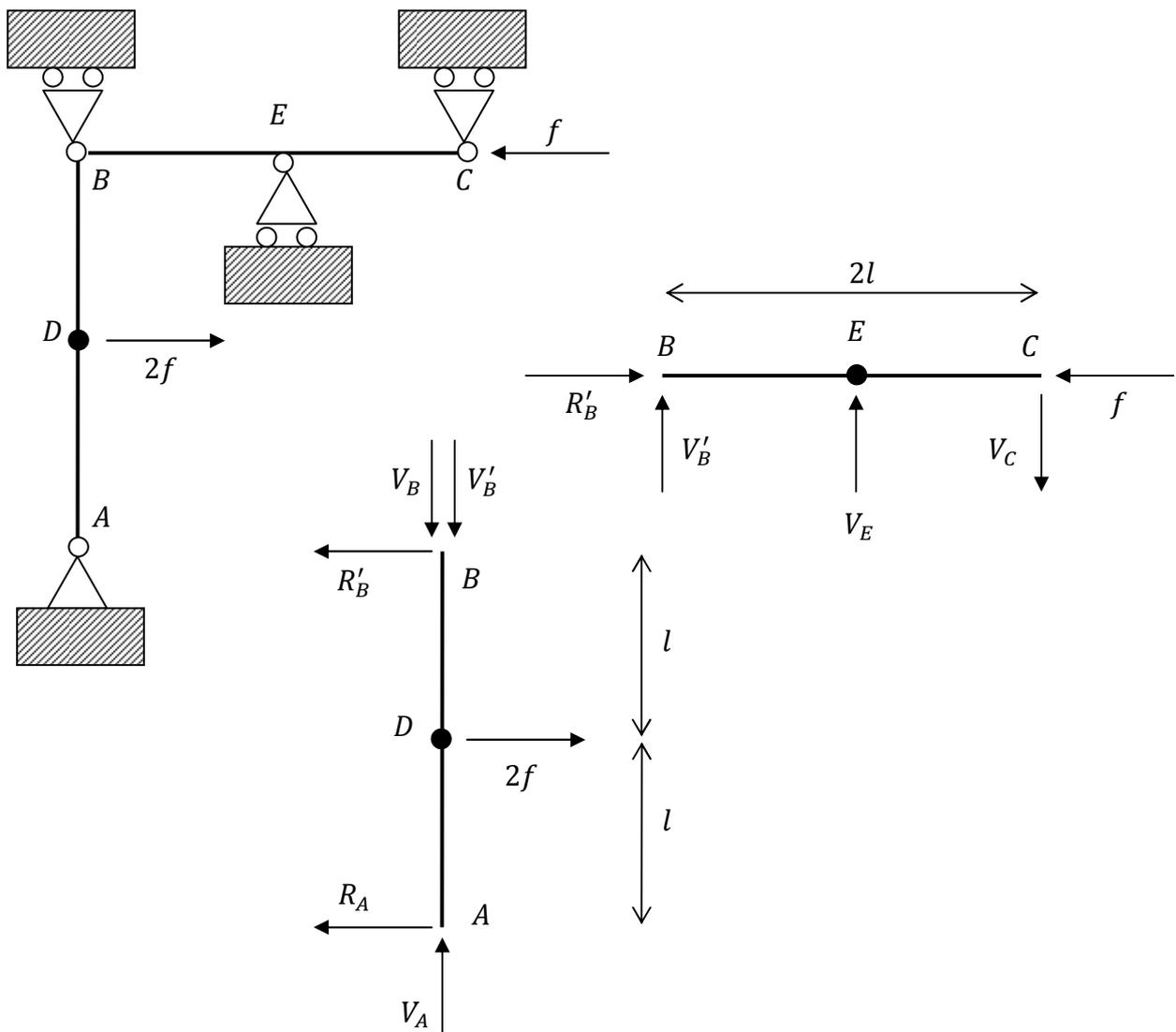
Sistema 3.1.1. In figura abbiamo un sistema piano costituito da due travi, dunque $g = 6$, i cui vincoli esterni sono una cerniera e due carrelli, e con vincolo interno costituito da una cerniera, dunque $v = ce_{est} + ce_{int} + 3ca = 2 + 2 + 1 + 2 = 7$; dunque il sistema è iperstatico.

Soffermiamoci sulla disposizione delle reazioni vincolari al nodo B il quale è sia sede di vincolo interno (cerniera) che di vincolo esterno (carrello): in questo caso si potrebbe procedere in due modi, ovvero considerare il carrello vincolante il tratto AB, oppure vincolante il tratto BC. Scegliendo la prima opzione la reazione V_B del carrello è applicata esclusivamente all'estremo B del tratto AB; vi sono poi le reazioni interne R'_B, V'_B che AB scambia con BC, le quali, per l'equilibrio meccanico alla traslazione verticale e orizzontale del nodo B, costituiscono 4 forze uguali e contrarie a due a due.

Veniamo ora alla scrittura del sistema della statica:

$$14.10) \begin{cases} R_A + R'_B = 2f \\ V_A - V_B - V'_B = 0 \\ M_A = R'_B 2l = 2fl \\ R'_B = f \\ V'_B + V_E - V_C = 0 \\ M_E = -V'_B l - V_C l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A + R'_B = 2f \\ V_A - V_B - V'_B = 0 \\ R'_B = f \\ R'_B = f \\ V'_B + V_E - V_C = 0 \\ V'_B + V_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ R'_B \\ V_A \\ V_B \\ V'_B \\ V_E \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f \\ 0 \\ f \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



La matrice dei coefficienti ha due righe uguali, dunque il suo rango non può essere 6, inoltre ha un minore non nullo di ordine 5, infatti

$$\det A_{12356,23457} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

La matrice completa $A|F$ d'altra parte ha anch'essa due righe uguali, quindi non può avere rango 6. In conclusione abbiamo trovato che

$$rg(A) = 5 = rg(A|F) < g = 6 < v = 7$$

ed effettivamente ci troviamo nel caso 3.1.1, ciò che significa che il sistema piano in questione realizza l'equilibrio meccanico per infiniti valori della sollecitazione reattiva, cioè è staticamente indeterminato. Verifichiamolo risolvendo il sistema lineare **14.10**: eliminando la 4° equazione e attribuendo valore parametrico arbitrario sia alla 3° che alla 6° incognita si ha

$$\begin{cases} R_A = 2f - R'_B = f \\ -V_B - V'_B = -h \\ V_A = h \\ R'_B = f \\ V'_B + V_E = k \\ V'_B = -V_C = -k \\ V_C = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A = f \\ V_B = h + k \\ V_A = h \\ R'_B = f \\ V'_B = -k \\ V_E = 2k \\ V_C = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_A \\ V_B \\ V_A \\ R'_B \\ V'_B \\ V_E \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall h, k \in \mathbb{R}$$

Sistema 3.1.2. Un sistema piano di questo tipo si ottiene immediatamente assegnando alla struttura del caso precedente una sollecitazione che i suoi vincoli non possano equilibrare: basta allora annullare la forza attiva agente in D , ciò che dà luogo a un sistema piano il cui modello matematico è fornito dal sistema lineare

$$14.11) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ R'_B \\ V_A \\ V_B \\ V'_B \\ V_E \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove, a fronte di una matrice dei coefficienti che conserva rango 5, si trova una matrice completa di rango 6, infatti

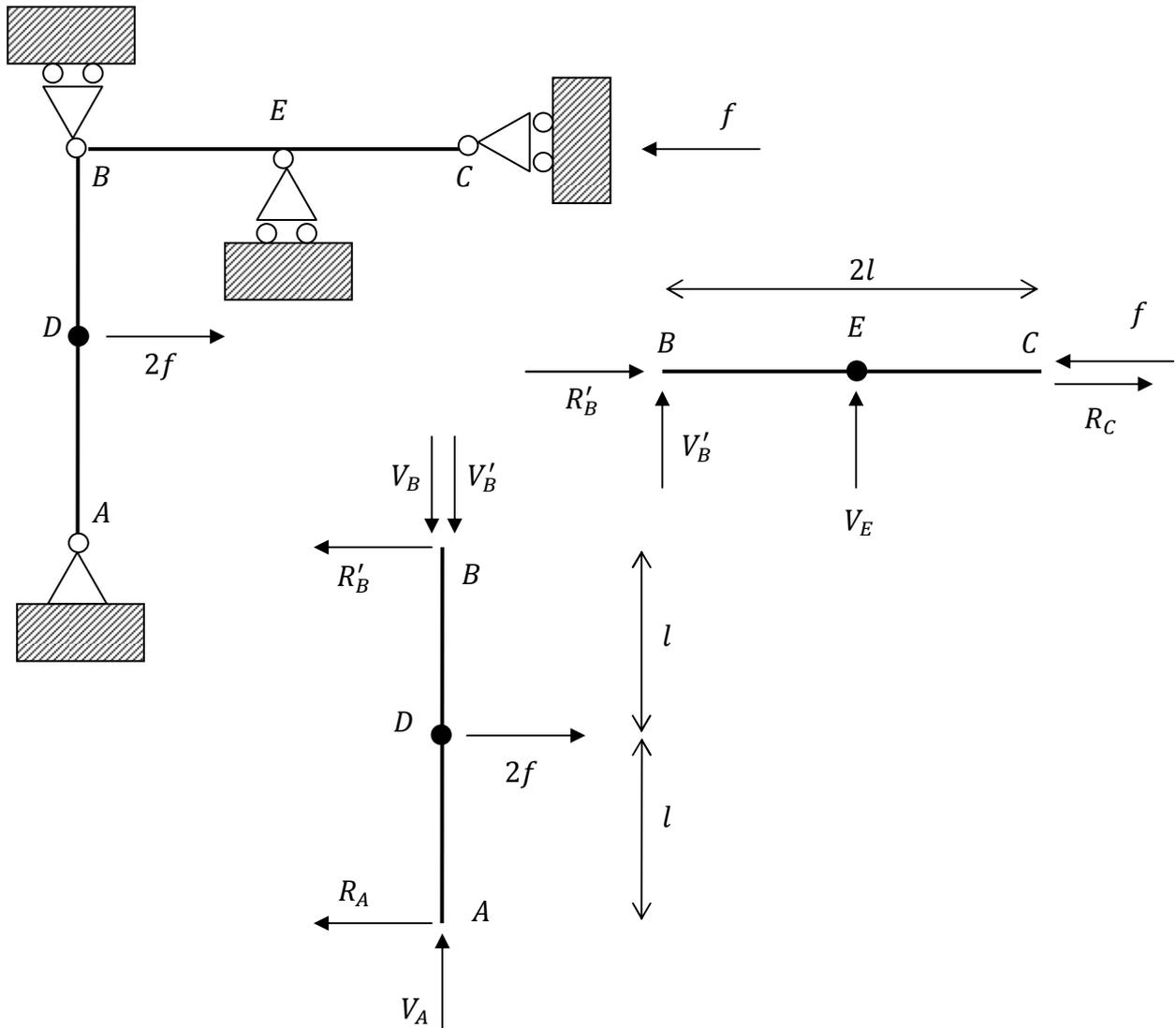
$$\det A|F_{123456,123458} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Pertanto abbiamo

$$rg(A) = 5 < rg(A|F) = 6 = g < v = 7$$

ed effettivamente ci troviamo nel caso 3.1.2: il sistema **14.11** è impossibile, cioè il sistema piano in questione è staticamente impossibile, ovvero si muove.

Sistema 3.2. Nella struttura piano del sistema illustrato nel caso 3.1.1 si ruoti di 90° il carrello in C e si assuma come sollecitazione attiva ad esempio la medesima sollecitazione di quel caso.



Il sistema della statica si scrive allora

$$14.12) \begin{cases} R_A + R'_B = 2f \\ V_A - V_B - V'_B = 0 \\ M_A = R'_B 2l = 2fl \\ R'_B + R_C = f \\ V'_B + V_E = 0 \\ M_E = -V'_B l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A + R'_B = 2f \\ V_A - V_B - V'_B = 0 \\ R'_B = f \\ R'_B + R_C = f \\ V'_B + V_E = 0 \\ V'_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ R'_B \\ V_A \\ V_B \\ V'_B \\ V_E \\ R_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f \\ 0 \\ f \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso il rango della matrice dei coefficienti è 6, infatti

$$\begin{aligned} \det A_{123456,123567} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Essendo poi la matrice completa a 6 righe, ne segue che anche il suo rango è 6. Dunque si ha

$$rg(A) = rg(A|F) = 6 = g < v = 7$$

ed effettivamente ci troviamo nel caso 3.2: dunque il sistema piano in figura risulta equilibrato (in effetti la struttura è equilibrata per qualunque sollecitazione attiva, visto che il rango della matrice completa è massimo), tuttavia è indeterminato, essendo le incognite maggiori delle equazioni. Risolvendo il sistema **14.12** si trova infatti, assegnando valore arbitrario alla 4° incognita, che

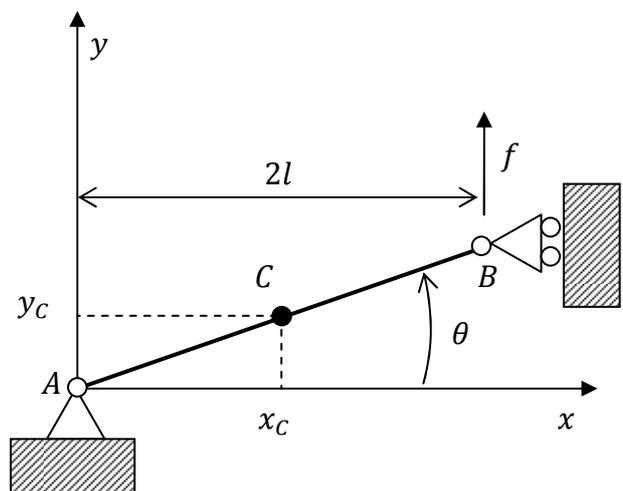
$$\begin{cases} R_A = f \\ V_A = h \\ R'_B = f \\ V_B = h \\ R_C = 0 \\ V_E = 0 \\ V'_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_A \\ V_A \\ R'_B \\ V_B \\ R_C \\ V_E \\ V'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Con ciò si conclude la rassegna di tutti le possibili combinazioni di strutture piane e sollecitazioni attive (ovvero di tutte i possibili sistemi piani) valutati in merito alla loro possibilità o meno di realizzare l'equilibrio meccanico. Quelli qui indicati sono esempi molto semplici, ma aggiungendo elementi alle strutture e/o forze alle sollecitazioni attive si resta comunque all'interno dell'insieme dei 10 casi qui discussi.

14.10. Spostamenti infinitesimi e coordinate lagrangiane. Abbiamo definito staticamente impossibile un sistema piano che non risolve il sistema della statica **14.1**, ovvero un sistema che, secondo la teoria della Meccanica Razionale, si muove.

A questo punto c'è però una questione interessante: si prenda il sistema 2.1.2 (il quale è staticamente impossibile) e si lo si lasci evolvere nel tempo. Si vede che, in assenza di deformazioni, il movimento è impossibile poiché il vincolo in A impone che B si muova lungo una circonferenza (di centro A) mentre il vincolo in B impone che B si muova lungo la retta verticale passante per la posizione iniziale di B stesso.

Ci troviamo dunque in contraddizione: il sistema non è in equilibrio meccanico, eppure



non può muoversi.

In realtà il moto possibile è il moto infinitesimo: quello in cui B si muove lungo la tangente alla circonferenza. In generale infatti questa trattazione ha senso se si considerano spostamenti infinitesimi, piuttosto che spostamenti finiti. Questo punto andrebbe approfondito.

Data una struttura piana comunque vincolata si dimostra che il numero dei gradi di libertà residui (cioè il numero delle coordinate lagrangiane) della stessa è pari a $g - rg(A)$, essendo A la matrice dei coefficienti della struttura. Per questa dimostrazione rimando ai testi di Meccanica Lagrangiana.

Qui mi limito a verificare questa affermazione nel caso della struttura dei sistemi 2.1.1 e 2.1.2, illustrata anche in questo paragrafo.

Assegniamo a piacere le 3 coordinate che definiscono la posizione della trave AB , ad esempio, fissato il sistema di riferimento cartesiano ortogonale A, x, y indicato in figura, consideriamo la terna di coordinate (x, y, θ) le quali definiscono univocamente la posizione della trave assegnando la posizione del suo punto medio C , nonché l'angolo fra la trave stessa e il semiasse positivo delle x . Allora la cerniera in A impone alle coordinate il vincolo

$$14.13) \tan \theta = \frac{y_C}{x_C}$$

mentre il carrello in B impone la condizione

$$14.14) y_C = l \sin \theta$$

Considerando il moto infinitesimo abbiamo poi $\tan \theta \rightarrow \sin \theta \rightarrow \theta$, dunque i vincoli impongono le condizioni

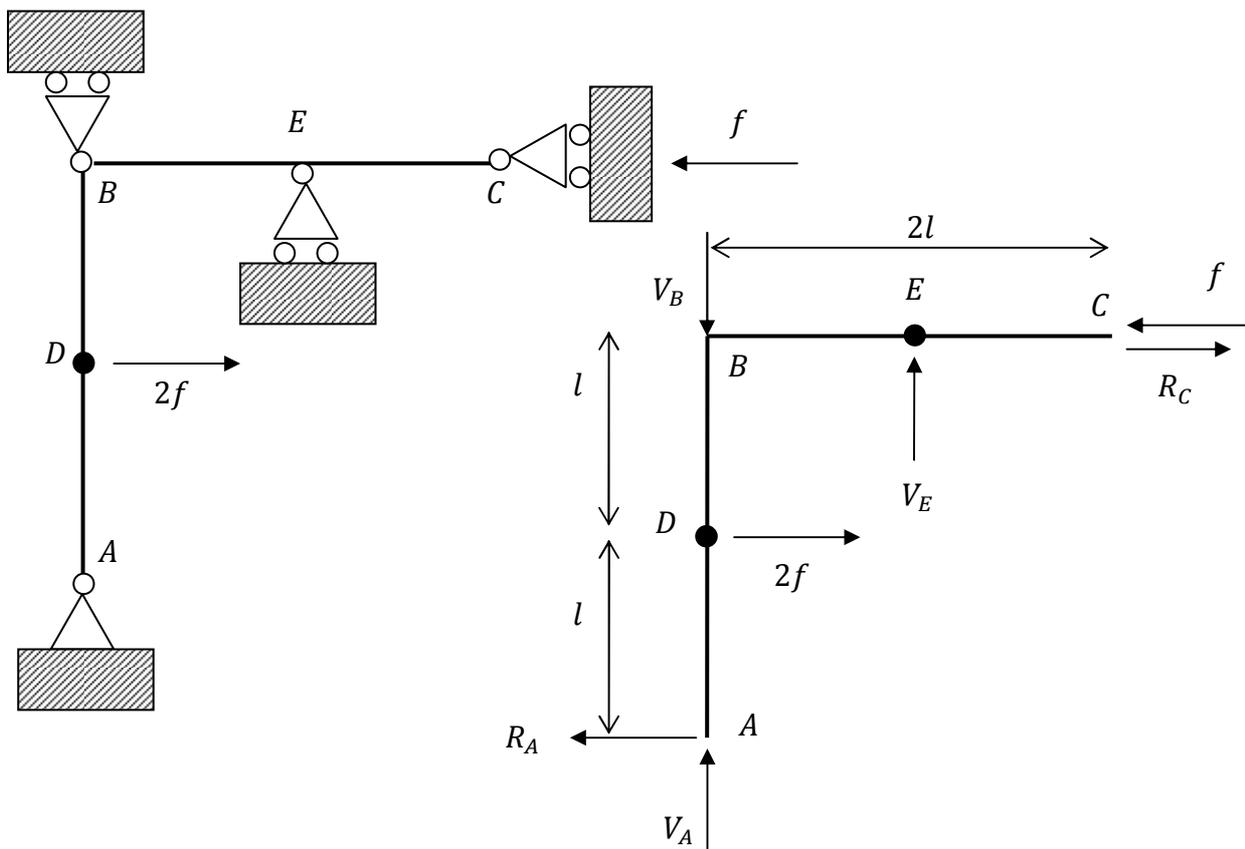
$$14.15) \begin{cases} \theta = \frac{y_C}{x_C} \\ y_C = l\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_C = \theta x_C \\ x_C = l \end{cases}$$

e dunque si vede come sia sufficiente assegnare il valore di θ per definire univocamente la terna (x, y, θ) e dunque la posizione della struttura. Ne segue che il numero di coordinate lagrangiane, ovvero il numero di gradi di libertà residui, è in questo caso 1 (come era immediato constatare, data la semplicità della struttura) ed è uguale a $g - rg(A) = 3 - 2 = 1$.

14.11. Equazioni ausiliarie. Nel caso di strutture costituite da più travi, il sistema della statica 14.3 può essere scomposto in due, ovvero si possono mettere a sistema le tre equazioni che impongono l'equilibrio meccanico della struttura complessiva, e poi aggiungere delle equazioni che impongano il rispetto dei vincoli interni, dette equazioni ausiliarie. Questo metodo è utile quando si sia interessati a determinare solo le reazioni dei vincoli esterni: in questo caso si considerano le equazioni dell'equilibrio complessivo, più tante equazioni ausiliarie quante ne occorrono per equilibrare il numero di equazioni con il numero di incognite.

Per capire come applicare quanto detto risolviamo il sistema 3.2 con il metodo delle equazioni ausiliarie. L'imposizione dell'equilibrio della struttura complessiva porge

$$14.16) \begin{cases} V_A - V_B + V_E = 0 \\ -R_A + R_C + 2f - f = 0 \\ M_B = -R_A 2l + 2fl + V_E l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_A - V_B + V_E = 0 \\ -R_A + R_C = -f \\ -2R_A + V_E = -2f \end{cases}$$



In questo caso si possono ottenere due equazioni ausiliarie, imponendo il rispetto del vincolo interno di cerniera in B : poiché il vincolo suddetto non può offrire resistenza alla rotazione, segue che la sollecitazione che il tratto AB esercita su di esso deve avere momento nullo; allo stesso modo la sollecitazione che il tratto BC esercita sulla cerniera deve avere momento nullo. Si hanno allora rispettivamente le due equazioni ausiliarie

$$14.17) \begin{cases} -R_A 2l + 2fl = 0 \\ V_E l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A = f \\ V_E = 0 \end{cases}$$

Mettendo allora a insieme il **14.16**, sistema della statica per la struttura complessiva, con il **14.17**, sistema delle equazioni ausiliarie, abbiamo

$$\begin{cases} V_A = V_B \\ R_C = 0 \\ R_A = f \\ R_A = f \\ V_E = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_A = V_B \\ R_C = 0 \\ R_A = f \\ V_E = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A = f \\ V_A = h \\ V_B = h \\ R_C = 0 \\ V_E = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_A \\ V_A \\ V_B \\ R_C \\ V_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ritroviamo, per ciò che riguarda le reazioni esterne, la soluzione trovata in precedenza, ma con minore sforzo di calcolo (abbiamo risolto un sistema in 5 incognite anziché uno in 7). Inoltre ora ricavare le reazioni interne è semplice: basta imporre l'equilibrio di uno dei due tratti traviformi, risolvendo un sistema in 3 equazioni.

14.12. Riassumendo. Volendo riassumere al massimo quanto trovato in questo capitolo possiamo dire che

- l'equilibrio meccanico (determinato o indeterminato) si può realizzare sia con strutture labili, che con strutture isostatiche, che con strutture iperstatiche;
- l'equilibrio meccanico determinato (cioè quello che si realizza per una e una sola sollecitazione reattiva) si può avere solo con strutture labili o isostatiche; nel primo caso l'equilibrio può venir meno cambiando la sollecitazione attiva, nel secondo caso anche, ma in determinate circostanze (vincoli tutti efficaci) l'equilibrio si realizza per qualunque sollecitazione attiva;
- l'assenza di equilibrio (moto incipiente) può aversi sia per strutture labili che isostatiche che iperstatiche;
- il rango della matrice dei coefficienti del sistema della statica è pari al numero di gradi di libertà effettivamente vincolati, ovvero $g - rg(A)$ è parial numero dei gradi di libertà residui.

Capitolo 15. Calcolo delle reazioni vincolari con il PLV per sistemi staticamente determinati

In questo capitolo illustro come applicare il Principio dei Lavori Virtuali (che indicherò PLV) per calcolare le reazioni vincolari nel caso di sistemi staticamente determinati, cioè di sistemi (struttura con sollecitazione) per i quali il sistema lineare **14.3** abbia una e una sola soluzione¹.

15.1. PLV per corpi rigidi. Nel paragrafo **5.2** si è dimostrato il PLV nel caso generale di corpi deformabili; nel paragrafo **5.3** si è poi applicato tale principio al caso particolare di corpi rigidi (che si possono vedere come particolari corpi deformabili, con deformazioni trascurabili). In questa sede richiamo allora il PLV per corpi rigidi, il quale si può enunciare dicendo che

una struttura (insieme di corpi rigidi comunque vincolati fra loro e con il telaio) è in equilibrio meccanico se e solo se il lavoro virtuale esterno è nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali.

Ricordo allora che

- si definisce sistema di spostamenti virtuali ogni campo di spostamenti infinitesimi (nel senso definito in **14.10**) compatibile con i vincoli della struttura;
- data la generica sollecitazione $\vec{F}(P), \vec{p}(P)$ (forze di volume e forze di superficie, rispettivamente) agente sulla struttura e il generico sistema di spostamenti virtuali $\vec{S}(P)$, si definisce lavoro virtuale esterno della sollecitazione l'integrale

$$15.1) \quad L_{ve} = \int_{\Omega} \vec{F}(P) \cdot \vec{S}(P) dV + \int_{\Psi} \vec{p}(P) \cdot \vec{S}(P) d\Psi$$

15.2. Algoritmo per il calcolo delle reazioni vincolari con il PLV. Dato un sistema staticamente determinato, il calcolo delle reazioni vincolari attraverso il PLV avviene secondo l'algoritmo seguente:

- si sopprime un grado di vincolo e si introduce come sollecitazione esterna la reazione² X che quel grado di vincolo è in grado di esplicare, la quale si dice costituire l'**incognita dinamica**;
- sopprimendo un grado di vincolo la struttura è in grado di muoversi anche nel caso in cui si trattasse originariamente di una struttura isostatica a vincoli efficaci, quindi è possibile imprimerle un sistema di spostamenti virtuali $\vec{S}(P)$;
- si calcola il lavoro virtuale esterno L_{ve} relativo al sistema di spostamenti $\vec{S}(P)$ ottenendo una espressione in funzione di X ;
- in virtù del PLV si impone l'equilibrio ponendo pari a zero il L_{ve} , ottenendo così una equazione lineare³ nella sola incognita X .

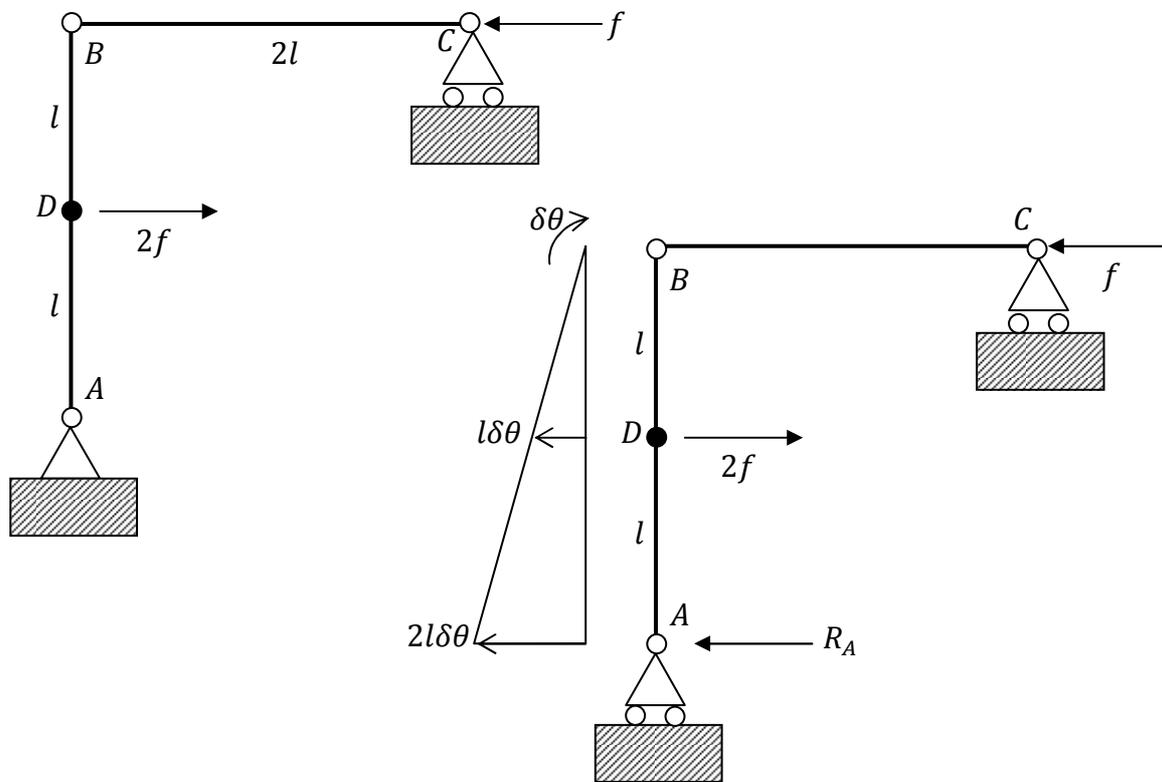
¹ Ricordo che questo può avvenire: per strutture labili a vincoli efficaci bilanciate dalla sollecitazione esterna (caso **1.2.1**); e per strutture isostatiche a vincoli efficaci (caso **2.1**).

² Può trattarsi tanto della componente di una forza, quanto della componente di un momento (che nel caso di sistemi piani definisce completamente il momento stesso).

³ La linearità è garantita dalla espressione del lavoro virtuale che, per sistemi piani, è dato dalla somma di prodotti di forze per spostamenti e di coppie per angoli.

Si fa l'ipotesi qui, come già detto, che il sistema sia staticamente determinato, ovvero ci si mette a priori nella condizione che la soluzione, in termini di reazione vincolare, esista. I sistemi staticamente determinati, come visto nel capitolo precedente sono di due tipi: strutture labili a vincoli efficaci bilanciate dalla sollecitazione esterna (caso **1.2.1**); strutture isostatiche a vincoli efficaci, con sollecitazione esterna qualunque (caso **2.1**). Nei due paragrafi successivi faccio un esempio di applicazione del PLV per ciascuno dei due tipi di sistemi staticamente determinati. Quello che dovrebbe succedere applicando il PLV a sistemi indeterminati è che si abbiano più incognite dinamiche che equazioni, mentre nel caso di sistemi impossibili dovrebbero aversi più equazioni che incognite dinamiche.

15.3. Primo esempio. Struttura labile. Consideriamo un sistema staticamente determinato con struttura labile, che deve necessariamente essere (in base all'analisi fatta nel capitolo precedente) costituito da una struttura labile a vincoli efficaci, equilibrata dalla sollecitazione esterna. Riprendiamo in particolare il sistema **1.2.1** del paragrafo **14.7**.



Sopprimiamo in A un grado di vincolo sostituendo la cerniera con un carrello, e introducendo come incognita dinamica la forza esterna orizzontale R_A . Come sistema di spostamenti virtuali consideriamo invece una rotazione oraria di AB intorno a B di un angolo $\delta\theta$. Allora il lavoro virtuale della sollecitazione esterna è dato da

$$15.2) \quad L_{ve} = R_A 2l\delta\theta - 2fl\delta\theta$$

Ma per il PLV l'equilibrio meccanico si ha se e solo se è nullo il lavoro virtuale esterno per ogni sistema di spostamenti virtuali e dunque, in particolare, deve risultare nullo il **15.2**, ovvero

$$15.3) \quad R_A 2l\delta\theta = 2fl\delta\theta \Leftrightarrow R_A = f$$

in accordo con quanto già trovato nel paragrafo 14.7. Ora ripristiniamo il grado di vincolo soppresso e sopprimiamo l'altro grado di vincolo in A , introducendo la relativa incognita cinematica V_A . Attribuendo allora il sistema di spostamenti virtuali indicato in figura il lavoro virtuale è

$$L_{ve} = V_A 2l\delta\theta$$

Imponendo l'equilibrio meccanico si ottiene allora, per il PLV, che $V_A = 0$.

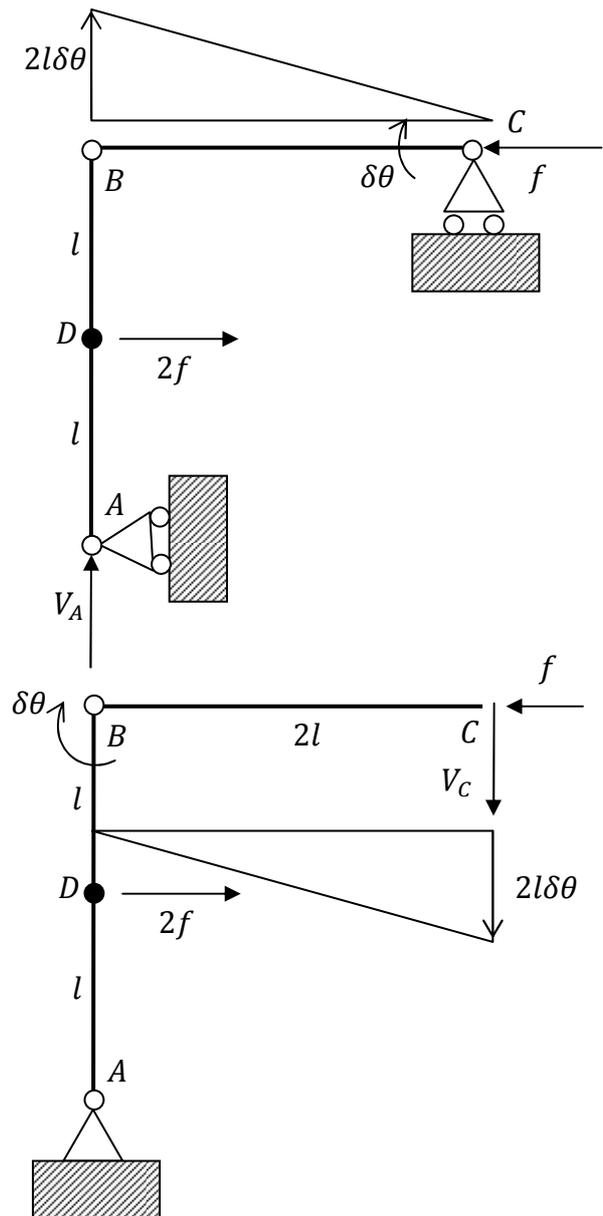
Per ricavare la reazione vincolare in C si rimuove completamente il vincolo di carrello e si introduce l'incognita dinamica V_C . Quindi si impone uno spostamento virtuale, ad esempio una rotazione oraria in B dell'elemento BC ; e si calcola il valore del lavoro virtuale, ovvero

$$L_{ve} = V_C 2l\delta\theta$$

che uguagliato a zero porge $V_C = 0$.

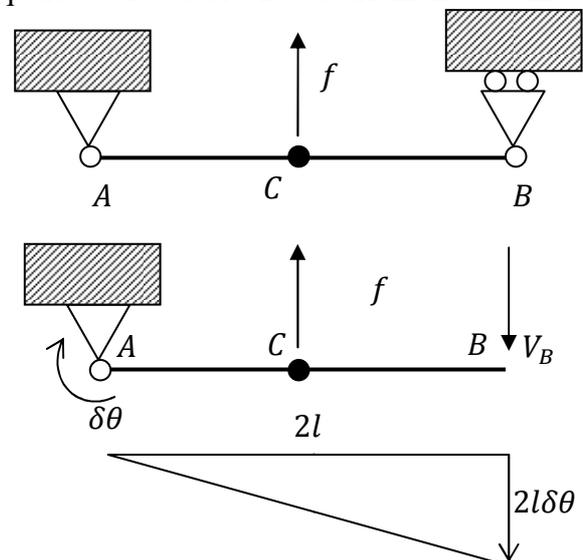
E' il caso di far notare, dopo questo primo esempio, che la scelta del sistema di spostamenti virtuali da imprimere non è arbitraria; piuttosto si deve operare la scelta che permette di avere una espressione del lavoro virtuale che

- contenga l'incognita dinamica
- sia la più semplice possibile.



15.4. Secondo esempio. Struttura isostatica. Consideriamo un sistema staticamente determinato con struttura isostatica, il quale dovrà essere necessariamente a vincoli tutti efficaci; ovvero un sistema del tipo 2.2 (vedi capitolo precedente). Prendiamo allora proprio il sistema descritto nell'esempio 2.2 del paragrafo 14.8. Mi limito a ricavare solo una delle tre reazioni incognite, essendo il procedimento molto semplice. In particolare si elimini l'unico grado di vincolo presente in B e si introduca la relativa incognita dinamica V_B . Assegnato il sistema di spostamenti virtuali indicato in figura (rotazione oraria intorno al vertice A), il lavoro virtuale è dato da

$$L_{ve} = V_B 2l\delta\theta - fl\delta\theta$$



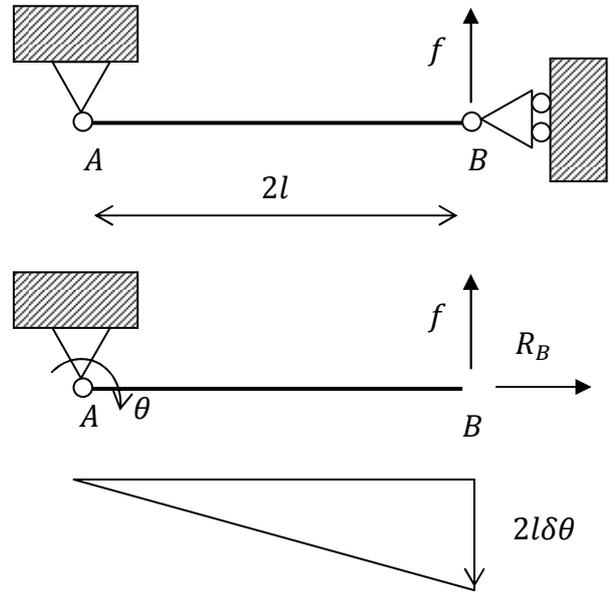
e dunque l'equilibrio meccanico impone l'incognita dinamica valga $f/2$.

15.5. Terzo esempio. Sistema impossibile. Voglio ora far vedere, in questo e nel prossimo paragrafo, come si comporta il PLV nel caso di sistemi che non siano staticamente determinati. In particolare vediamo qui cosa succede nel caso di un sistema impossibile, ovvero che non realizza l'equilibrio. Sappiamo dal capitolo precedente che un sistema impossibile si realizza in ciascuno dei seguenti casi:

- struttura labile a vincoli efficaci non equilibrata dalla sollecitazione
- struttura isostatica a vincoli non tutti efficaci non equilibrata dalla sollecitazione
- struttura iperstatica a vincoli non tutti efficaci non equilibrata dalla sollecitazione

Consideriamo ad esempio il secondo caso, e in particolare il sistema discusso in 2.1.2, paragrafo 14.8. Eliminiamo il grado di vincolo in B e introduciamo la relativa incognita dinamica R_B . Attribuiamo poi l'unico sistema di spostamenti virtuali possibile, cioè la rotazione rigida intorno ad A . Calcolando il lavoro virtuale abbiamo per esso il valore $2l\delta\theta f$ che è sempre non nullo: pertanto il PLV ci conferma l'impossibilità del sistema e non ci permette di ricavare le reazioni vincolari. In generale possiamo concludere che

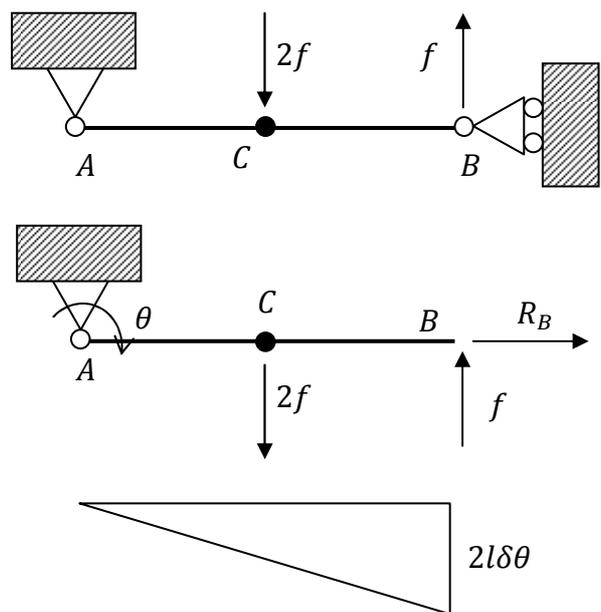
in un sistema impossibile il PLV non può essere usato per ricavare le reazioni vincolari e l'algoritmo indicato per i sistemi staticamente determinati fornisce sempre valori non nulli per i lavori virtuali.



15.6. Quarto esempio. Sistema indeterminato. Sappiamo che sistemi indeterminati si hanno nei seguenti casi:

- strutture isostatiche con vincoli inefficaci equilibrate dalla sollecitazione esterna
- strutture labili con vincoli inefficaci equilibrate dalla sollecitazione esterna
- strutture iperstatiche con vincoli efficaci
- strutture iperstatiche con vincoli inefficaci equilibrate dalla sollecitazione esterna

Consideriamo ad esempio il primo caso, prendendo in particolare il sistema del caso 2.1.1 del paragrafo 14.9. Eliminando il carrello scorrevole in B e introducendo la relativa incognita dinamica R_B si ha, per l'unico sistema di spostamenti virtuali possibile (la rotazione intorno ad A) l'espressione



$$L_{ve} = 2fl\delta\theta - 2fl\delta\theta = 0$$

Dunque il lavoro virtuale è nullo e il principio dei lavori virtuali conferma l'equilibrio meccanico per qualunque valore della incognita dinamica. Generalizzando quanto ottenuto in questo esempio possiamo dire che

in un sistema indeterminato il PLV non può essere usato per ricavare le reazioni vincolari e l'algoritmo indicato per i sistemi staticamente determinati fornisce sempre valori nulli per i lavori virtuali.

Capitolo 15. Calcolo delle reazioni vincolari con il PLV per sistemi staticamente determinati

In questo capitolo illustro come applicare il Principio dei Lavori Virtuali (che indicherò PLV) per calcolare le reazioni vincolari nel caso di sistemi staticamente determinati, cioè di sistemi (struttura con sollecitazione) per i quali il sistema lineare **14.3** abbia una e una sola soluzione¹.

15.1. PLV per corpi rigidi. Nel paragrafo **5.2** si è dimostrato il PLV nel caso generale di corpi deformabili; nel paragrafo **5.3** si è poi applicato tale principio al caso particolare di corpi rigidi (che si possono vedere come particolari corpi deformabili, con deformazioni trascurabili). In questa sede richiamo allora il PLV per corpi rigidi, il quale si può enunciare dicendo che

una struttura (insieme di corpi rigidi comunque vincolati fra loro e con il telaio) è in equilibrio meccanico se e solo se il lavoro virtuale esterno è nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali.

Ricordo allora che

- si definisce sistema di spostamenti virtuali ogni campo di spostamenti infinitesimi (nel senso definito in **14.10**) compatibile con i vincoli della struttura;
- data la generica sollecitazione $\vec{F}(P), \vec{p}(P)$ (forze di volume e forze di superficie, rispettivamente) agente sulla struttura e il generico sistema di spostamenti virtuali $\vec{S}(P)$, si definisce lavoro virtuale esterno della sollecitazione l'integrale

$$15.1) \quad L_{ve} = \int_{\Omega} \vec{F}(P) \cdot \vec{S}(P) dV + \int_{\Psi} \vec{p}(P) \cdot \vec{S}(P) d\Psi$$

15.2. Algoritmo per il calcolo delle reazioni vincolari con il PLV. Dato un sistema staticamente determinato, il calcolo delle reazioni vincolari attraverso il PLV avviene secondo l'algoritmo seguente:

- si sopprime un grado di vincolo e si introduce come sollecitazione esterna la reazione² X che quel grado di vincolo è in grado di esplicare, la quale si dice costituire l'**incognita dinamica**;
- sopprimendo un grado di vincolo la struttura è in grado di muoversi anche nel caso in cui si trattasse originariamente di una struttura isostatica a vincoli efficaci, quindi è possibile imprimerle un sistema di spostamenti virtuali $\vec{S}(P)$;
- si calcola il lavoro virtuale esterno L_{ve} relativo al sistema di spostamenti $\vec{S}(P)$ ottenendo una espressione in funzione di X ;
- in virtù del PLV si impone l'equilibrio ponendo pari a zero il L_{ve} , ottenendo così una equazione lineare³ nella sola incognita X .

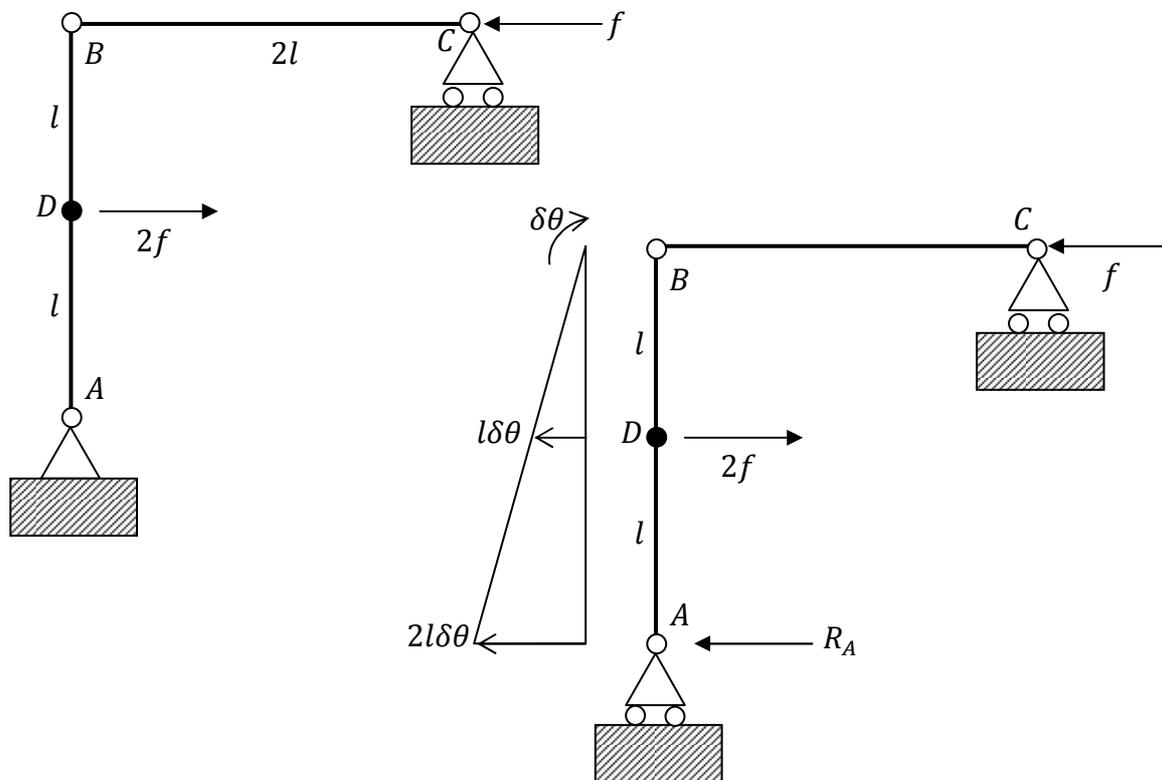
¹ Ricordo che questo può avvenire: per strutture labili a vincoli efficaci bilanciate dalla sollecitazione esterna (caso **1.2.1**); e per strutture isostatiche a vincoli efficaci (caso **2.1**).

² Può trattarsi tanto della componente di una forza, quanto della componente di un momento (che nel caso di sistemi piani definisce completamente il momento stesso).

³ La linearità è garantita dalla espressione del lavoro virtuale che, per sistemi piani, è dato dalla somma di prodotti di forze per spostamenti e di coppie per angoli.

Si fa l'ipotesi qui, come già detto, che il sistema sia staticamente determinato, ovvero ci si mette a priori nella condizione che la soluzione, in termini di reazione vincolare, esista. I sistemi staticamente determinati, come visto nel capitolo precedente sono di due tipi: strutture labili a vincoli efficaci bilanciate dalla sollecitazione esterna (caso **1.2.1**); strutture isostatiche a vincoli efficaci, con sollecitazione esterna qualunque (caso **2.1**). Nei due paragrafi successivi faccio un esempio di applicazione del PLV per ciascuno dei due tipi di sistemi staticamente determinati. Quello che dovrebbe succedere applicando il PLV a sistemi indeterminati è che si abbiano più incognite dinamiche che equazioni, mentre nel caso di sistemi impossibili dovrebbero aversi più equazioni che incognite dinamiche.

15.3. Primo esempio. Struttura labile. Consideriamo un sistema staticamente determinato con struttura labile, che deve necessariamente essere (in base all'analisi fatta nel capitolo precedente) costituito da una struttura labile a vincoli efficaci, equilibrata dalla sollecitazione esterna. Riprendiamo in particolare il sistema **1.2.1** del paragrafo **14.7**.



Sopprimiamo in A un grado di vincolo sostituendo la cerniera con un carrello, e introducendo come incognita dinamica la forza esterna orizzontale R_A . Come sistema di spostamenti virtuali consideriamo invece una rotazione oraria di AB intorno a B di un angolo $\delta\theta$. Allora il lavoro virtuale della sollecitazione esterna è dato da

$$15.2) \quad L_{ve} = R_A 2l\delta\theta - 2fl\delta\theta$$

Ma per il PLV l'equilibrio meccanico si ha se e solo se è nullo il lavoro virtuale esterno per ogni sistema di spostamenti virtuali e dunque, in particolare, deve risultare nullo il **15.2**, ovvero

$$15.3) \quad R_A 2l\delta\theta = 2fl\delta\theta \Leftrightarrow R_A = f$$

in accordo con quanto già trovato nel paragrafo 14.7. Ora ripristiniamo il grado di vincolo soppresso e sopprimiamo l'altro grado di vincolo in A , introducendo la relativa incognita cinematica V_A . Attribuendo allora il sistema di spostamenti virtuali indicato in figura il lavoro virtuale è

$$L_{ve} = V_A 2l\delta\theta$$

Imponendo l'equilibrio meccanico si ottiene allora, per il PLV, che $V_A = 0$.

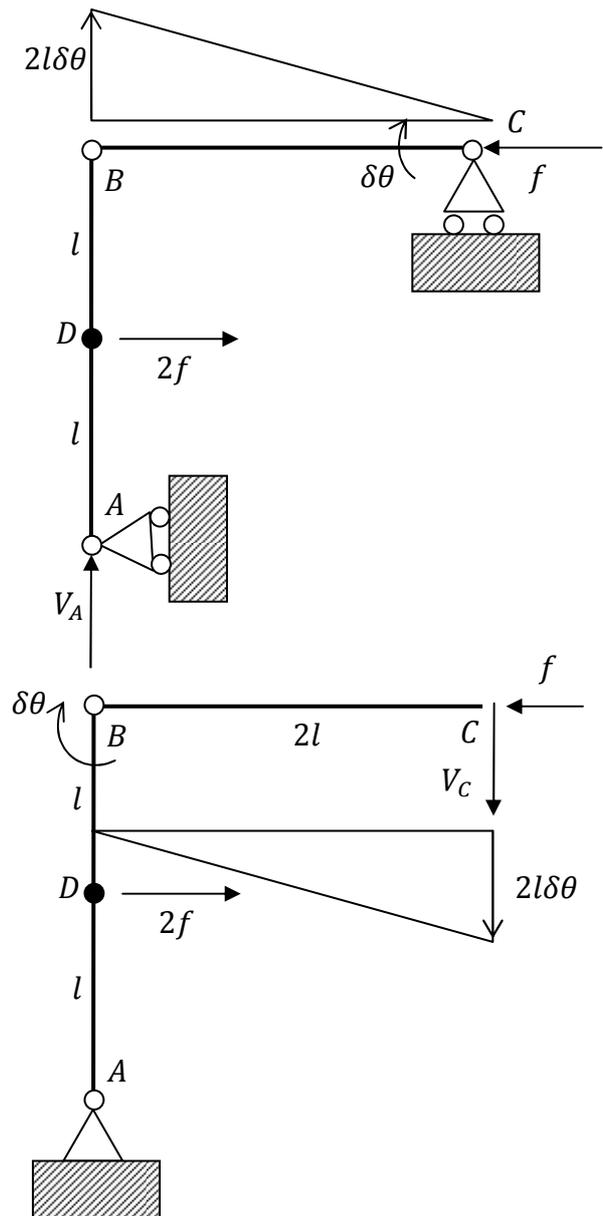
Per ricavare la reazione vincolare in C si rimuove completamente il vincolo di carrello e si introduce l'incognita dinamica V_C . Quindi si impone uno spostamento virtuale, ad esempio una rotazione oraria in B dell'elemento BC ; e si calcola il valore del lavoro virtuale, ovvero

$$L_{ve} = V_C 2l\delta\theta$$

che uguagliato a zero porge $V_C = 0$.

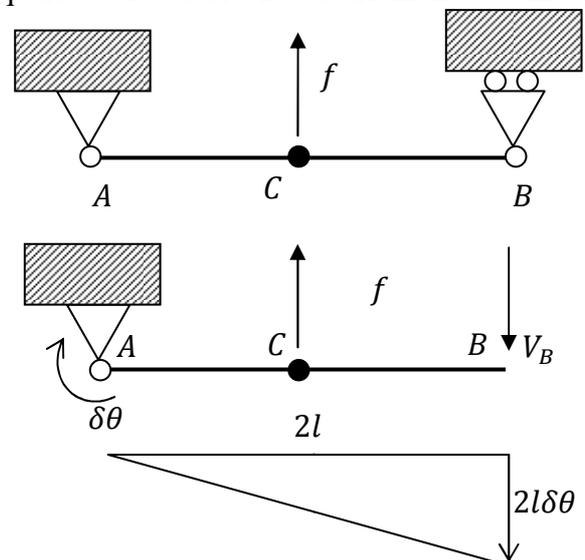
E' il caso di far notare, dopo questo primo esempio, che la scelta del sistema di spostamenti virtuali da imprimere non è arbitraria; piuttosto si deve operare la scelta che permette di avere una espressione del lavoro virtuale che

- contenga l'incognita dinamica
- sia la più semplice possibile.



15.4. Secondo esempio. Struttura isostatica. Consideriamo un sistema staticamente determinato con struttura isostatica, il quale dovrà essere necessariamente a vincoli tutti efficaci; ovvero un sistema del tipo 2.2 (vedi capitolo precedente). Prendiamo allora proprio il sistema descritto nell'esempio 2.2 del paragrafo 14.8. Mi limito a ricavare solo una delle tre reazioni incognite, essendo il procedimento molto semplice. In particolare si elimini l'unico grado di vincolo presente in B e si introduca la relativa incognita dinamica V_B . Assegnato il sistema di spostamenti virtuali indicato in figura (rotazione oraria intorno al vertice A), il lavoro virtuale è dato da

$$L_{ve} = V_B 2l\delta\theta - fl\delta\theta$$



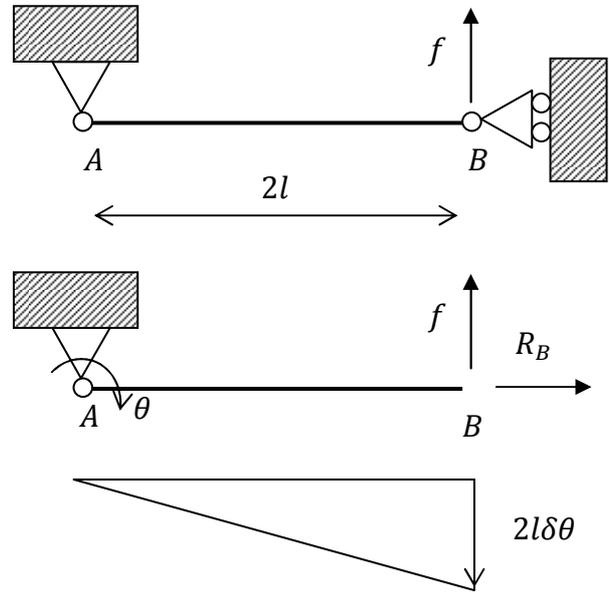
e dunque l'equilibrio meccanico impone l'incognita dinamica valga $f/2$.

15.5. Terzo esempio. Sistema impossibile. Voglio ora far vedere, in questo e nel prossimo paragrafo, come si comporta il PLV nel caso di sistemi che non siano staticamente determinati. In particolare vediamo qui cosa succede nel caso di un sistema impossibile, ovvero che non realizza l'equilibrio. Sappiamo dal capitolo precedente che un sistema impossibile si realizza in ciascuno dei seguenti casi:

- struttura labile a vincoli efficaci non equilibrata dalla sollecitazione
- struttura isostatica a vincoli non tutti efficaci non equilibrata dalla sollecitazione
- struttura iperstatica a vincoli non tutti efficaci non equilibrata dalla sollecitazione

Consideriamo ad esempio il secondo caso, e in particolare il sistema discusso in 2.1.2, paragrafo 14.8. Eliminiamo il grado di vincolo in B e introduciamo la relativa incognita dinamica R_B . Attribuiamo poi l'unico sistema di spostamenti virtuali possibile, cioè la rotazione rigida intorno ad A . Calcolando il lavoro virtuale abbiamo per esso il valore $2l\delta\theta f$ che è sempre non nullo: pertanto il PLV ci conferma l'impossibilità del sistema e non ci permette di ricavare le reazioni vincolari. In generale possiamo concludere che

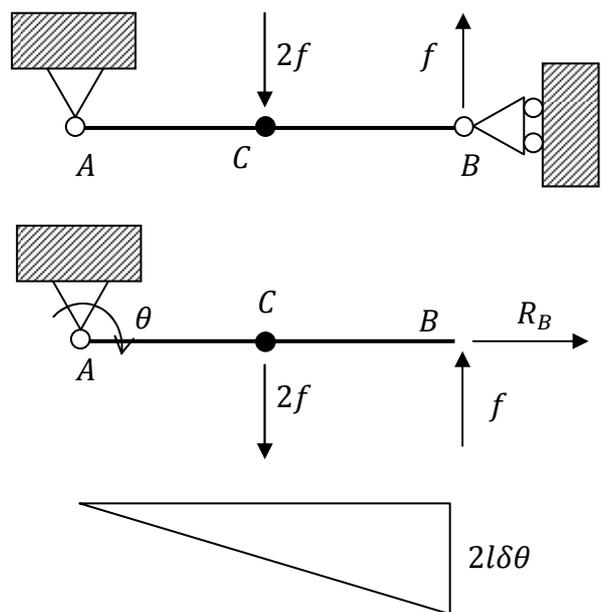
in un sistema impossibile il PLV non può essere usato per ricavare le reazioni vincolari e l'algoritmo indicato per i sistemi staticamente determinati fornisce sempre valori non nulli per i lavori virtuali.



15.6. Quarto esempio. Sistema indeterminato. Sappiamo che sistemi indeterminati si hanno nei seguenti casi:

- strutture isostatiche con vincoli inefficaci equilibrate dalla sollecitazione esterna
- strutture labili con vincoli inefficaci equilibrate dalla sollecitazione esterna
- strutture iperstatiche con vincoli efficaci
- strutture iperstatiche con vincoli inefficaci equilibrate dalla sollecitazione esterna

Consideriamo ad esempio il primo caso, prendendo in particolare il sistema del caso 2.1.1 del paragrafo 14.9. Eliminando il carrello scorrevole in B e introducendo la relativa incognita dinamica R_B si ha, per l'unico sistema di spostamenti virtuali possibile (la rotazione intorno ad A) l'espressione



$$L_{ve} = 2fl\delta\theta - 2fl\delta\theta = 0$$

Dunque il lavoro virtuale è nullo e il principio dei lavori virtuali conferma l'equilibrio meccanico per qualunque valore della incognita dinamica. Generalizzando quanto ottenuto in questo esempio possiamo dire che

in un sistema indeterminato il PLV non può essere usato per ricavare le reazioni vincolari e l'algoritmo indicato per i sistemi staticamente determinati fornisce sempre valori nulli per i lavori virtuali.

Capitolo 16. Catene cinematiche e PLV

Nel precedente capitolo si è visto come l'algoritmo per il calcolo delle reazioni vincolari – di sistemi staticamente determinati – attraverso il PLV richieda la determinazione del valore del sistema di spostamenti virtuali in tutti i punti della struttura in cui sia applicata una forza, al fine di calcolarne il lavoro virtuale; e gli esempi discussi sono stati in tal senso molto semplici, consentendo un calcolo veloce di detti valori. Ma cosa succede nel caso di strutture più articolate? Come si fa a calcolare in modo esatto il valore del campo degli spostamenti virtuali su tutta la struttura?

Ebbene in questo capitolo

- si illustra il **metodo delle catene cinematiche**, un procedimento atto proprio alla determinazione completa del campo degli spostamenti virtuali;
- inoltre si stabilisce in modo più rigoroso la definizione di spostamento virtuale, evidenziandone la differenza con gli spostamenti propriamente detti.

16.1. Teorema di Eulero. Nell'ambito della Meccanica Razionale si dimostra il seguente teorema (di Eulero)

ogni spostamento rigido sferico di centro C – ovvero con spostamento nullo in C – è riconducibile a uno spostamento rotatorio con asse di rotazione passante per C .

Siccome poi uno spostamento generico è sempre (lo diamo per buono) il prodotto¹ di uno spostamento traslatorio e di uno spostamento sferico, se ne deduce (per il teorema di Eulero) che

il generico spostamento rigido è il prodotto di una rotazione e di una traslazione.

Considerando poi che il prodotto di una rotazione intorno all'asse a per una traslazione che abbia direzione ortogonale ad a , è una rotazione con asse parallelo ad a (si veda in proposito la discussione sul campo circolare), segue che

il generico spostamento rigido è il prodotto di una rotazione e di una traslazione parallela all'asse di rotazione.

Se consideriamo allora spostamenti che avvengano esclusivamente su un piano, ovvero tali che le rotazioni abbiano sempre asse ortogonale al piano, si può affermare che

il generico spostamento rigido piano è sempre una rotazione con asse ortogonale al piano degli spostamenti.

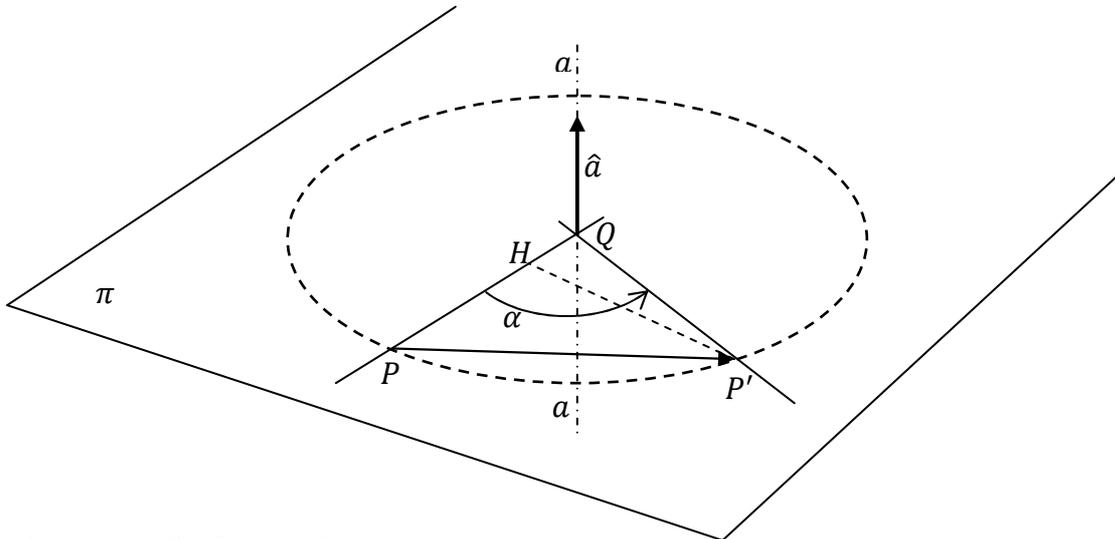
La traslazione rientra come caso particolare di rotazione, infatti lo spostamento rigido traslatorio si può immaginare come una rotazione il cui centro sia all'infinito.

16.2. Spostamento rigido rotatorio. Nella presente trattazione ci occupiamo di strutture piane, dunque per quanto visto nel paragrafo precedente, ci troveremo a dover fare i conti

¹ Si parla di prodotto di spostamenti rigidi quando si fa descrivere a uno spazio rigido prima uno spostamento (ad esempio una traslazione) e poi un altro spostamento (ad esempio una rotazione). In generale il prodotto di spostamenti non è commutativo (vedi l'esempio nel trattato di Meccanica Razionale), tuttavia nel caso di prodotto di una rotazione per una traslazione la commutatività sussiste.

esclusivamente con spostamenti rigidi rotatori. Vediamo allora adesso quale è l'espressione analitica di un sistema di spostamenti rigidi rotatori.

Nel piano π avviene una rotazione rigida intorno all'asse a , che intercetta il piano stesso in Q . Ci proponiamo di ricavare lo spostamento del punto P se l'ampiezza della rotazione – e il suo verso – sono definiti dall'anomalia α .



Con riferimento alla figura si ha

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP'} &= \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HP'} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QH}) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QH}) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha = \\ &= (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ} \cos \alpha) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha = \overrightarrow{PQ}(1 - \cos \alpha) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha\end{aligned}$$

che si preferisce scrivere

$$16.1) \quad \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QP}(\cos \alpha - 1) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha$$

Si può osservare che, nel secondo addendo, al posto di Q si può usare un qualunque punto di a senza cambiarne il valore (ciò non vale per il primo addendo). Uno spostamento rotatorio rigido è completamente definito in termini di ampiezza della rotazione, di asse di rotazione e di verso di rotazione, dal vettore

$$16.2) \quad \vec{r} = \alpha \hat{a}$$

detto appunto **vettore di rotazione**.

16.3. Sistema di spostamenti virtuali. Ricordando che gli sviluppi di McLaurin del primo ordine delle due funzioni trigonometriche si scrivono

$$16.3) \quad \begin{cases} \sin \alpha = \sin 0 + \alpha \cos 0 + o(\alpha) = \alpha + o(\alpha) \\ \cos \alpha = \cos 0 - \alpha \sin 0 + o(\alpha) = 1 + o(\alpha) \end{cases}$$

e sostituendoli nella **16.1** abbiamo

$$16.4) \quad \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QP}o(\alpha) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP})(\alpha + o(\alpha)) = \alpha \left(\overrightarrow{QP} \frac{o(\alpha)}{\alpha} + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) \right)$$

Dividendo per l'angolo di rotazione si ha

$$16.5) \quad \frac{\overrightarrow{PP'}}{\alpha} = \left(\overrightarrow{QP} \frac{o(\alpha)}{\alpha} + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) \right)$$

e mandando al limite per $\alpha \rightarrow 0$ si ha

$$16.6) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PP'}}{\alpha} = \hat{a} \times \overrightarrow{QP}$$

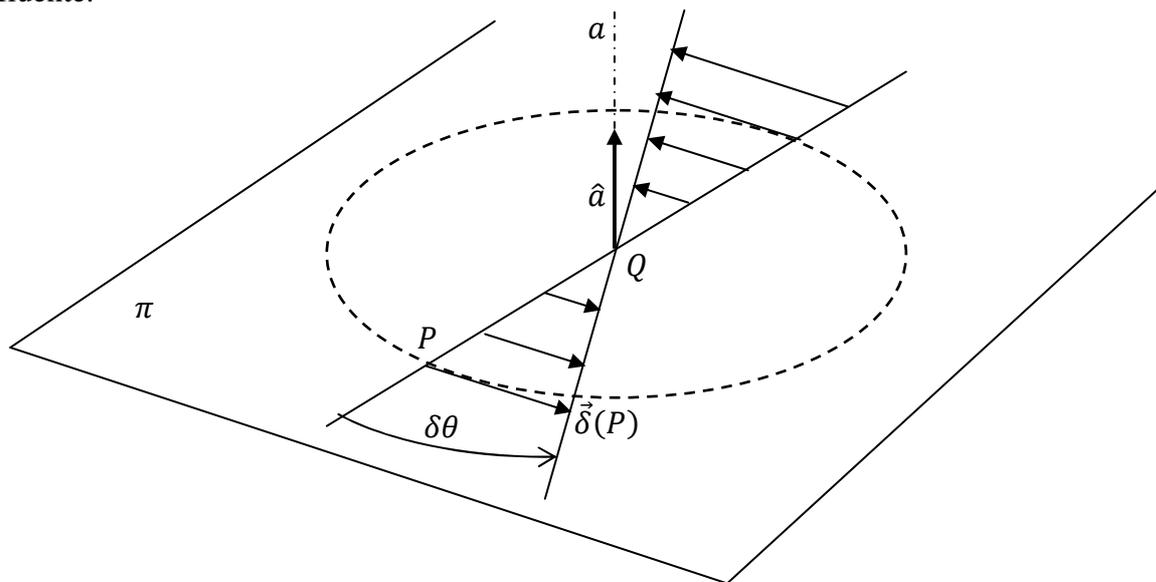
Moltiplicando poi ambo i membri per l'angolo $\delta\theta$ si ha

$$16.7) \quad \delta\theta \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PP'}}{\alpha} = \delta\theta \hat{a} \times \overrightarrow{QP}$$

Questo campo vettoriale – che è un campo circolare di asse \hat{a} – rappresenta il sistema di spostamenti virtuali associati alla rotazione di centro Q e ampiezza $\delta\theta$. Indicando $\vec{\delta}(P)$ tale campo si ha in definitiva

$$16.8) \quad \vec{\delta}(P) = \delta\theta \hat{a} \times \overrightarrow{QP}$$

La grandezza algebrica $\delta\theta$ – che ha le dimensioni di un angolo – è arbitraria e incide solo sull'intensità del campo e sul suo verso; inoltre ai fini dell'applicazione del PLV il suo valore è ininfluenza.



Si osserva che – se non per il caso limite della traslazione – il sistema di spostamenti virtuali **16.8** non coinciderà mai con un sistema di spostamenti descritto dalla **16.1**, mentre è formalmente analogo all'atto di moto rotatorio. In effetti il sistema di spostamenti virtuali non è altro che la derivata in α dello spostamento rigido rotatorio, moltiplicata per la rotazione arbitraria $\delta\theta$.

L'importanza del sistema di spostamenti virtuali – che si può considerare di primo acchito un ente puramente matematico privo di valore fisico – sta nel suo impiego nella definizione del lavoro virtuale e quindi – in definitiva – nella sua utilizzazione nel PLV.

16.4. Teoremi di Aronhold-Kennedy. Nel paragrafo precedente abbiamo visto che il sistema di spostamenti virtuali di un corpo rigido nel piano è un campo circolare descritto dalla

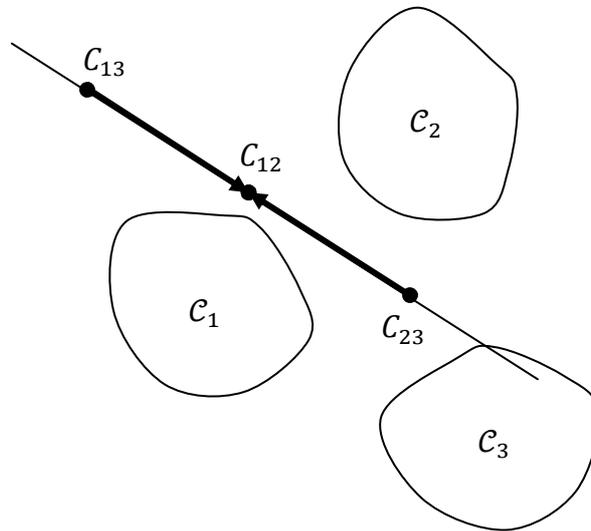
funzione vettoriale **16.8**. Ora estendiamo la nostra analisi al caso in cui si abbiano più corpi rigidi nel piano, attraverso due importanti² teoremi, detti di Aronhold-Kennedy.

Primo teorema di Aronhold-Kennedy. Dati tre corpi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ i quali si muovano sullo stesso piano, allora i centri di istantanea rotazione dei tre moti relativi (cioè del moto di \mathcal{C}_1 rispetto a \mathcal{C}_2 , del moto di \mathcal{C}_2 rispetto a \mathcal{C}_3 e del moto di \mathcal{C}_1 rispetto a \mathcal{C}_3) sono allineati.

Dimostrazione. Diciamo C_{13} il c.d.i.r. del moto 1-3 (moto di \mathcal{C}_1 rispetto a \mathcal{C}_3), C_{23} il c.d.i.r. del moto 2-3, e C_{12} il c.d.i.r. del moto 1-2. Si consideri poi un punto P di \mathcal{C}_1 . Considerando assoluto il moto di P rispetto a \mathcal{C}_3 e relativo quello rispetto a \mathcal{C}_2 , la cinematica relativa ci dice che

$$16.9) \quad \vec{v}_{aP} = \vec{v}_{rP} + \vec{v}_{\tau P} \Leftrightarrow \vec{v}_{P1,3} = \vec{v}_{P1,2} + \vec{v}_{P2,3}$$

dove si intende che $\vec{v}_{P1,3}$ è la velocità del punto P – considerato appartenente a \mathcal{C}_1 – rispetto a \mathcal{C}_3 , e così via. D'altra parte



$$16.10) \quad \begin{cases} \vec{v}_{P1,3} = \vec{\omega}_{13} \times \overrightarrow{C_{13}P} \\ \vec{v}_{P1,2} = \vec{\omega}_{12} \times \overrightarrow{C_{12}P} \\ \vec{v}_{P2,3} = \vec{\omega}_{23} \times \overrightarrow{C_{23}P} \end{cases}$$

che sostituite nella **16.9** porgono

$$16.11) \quad \vec{\omega}_{13} \times \overrightarrow{C_{13}P} = \vec{\omega}_{12} \times \overrightarrow{C_{12}P} + \vec{\omega}_{23} \times \overrightarrow{C_{23}P}$$

Se poi scegliamo in particolare $P = C_{12}$ abbiamo

$$16.12) \quad \vec{\omega}_{13} \times \overrightarrow{C_{13}C_{12}} = \vec{\omega}_{23} \times \overrightarrow{C_{23}C_{12}}$$

Dunque, essendo le velocità angolari parallele (i moti avvengono tutti nello stesso piano), devono risultare paralleli anche i due vettori $\overrightarrow{C_{13}C_{12}}, \overrightarrow{C_{23}C_{12}}$ e questo significa che i tre c.d.i.r. sono allineati.

² I teoremi seguenti si riferiscono agli atti di moto; tuttavia, come abbiamo visto nel precedente paragrafo, l'espressione degli atti di moto è formalmente analoga a quella dei sistemi di spostamenti virtuali.

Secondo teorema di Aronhold-Kennedy. Dati due corpi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ i quali si muovano sullo stesso piano, allora il centro di istantanea rotazione del moto relativo (cioè del moto di \mathcal{C}_1 rispetto a \mathcal{C}_2) è allineato ai centri di istantanea rotazione dei due moti assoluti.

Dimostrazione. Questo teorema è un corollario del precedente, infatti se nel primo teorema consideriamo fisso il corpo \mathcal{C}_3 allora abbiamo che i moti di \mathcal{C}_1 e di \mathcal{C}_2 rispetto \mathcal{C}_3 diventano moti assoluti, quindi il precedente teorema ci dice che i c.d.i.r. dei due moti assoluti sono allineati con il c.d.i.r. del moto relativo fra \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . Dunque la tesi.

16.5. Vincoli e centri di istantanea rotazione. Vediamo ora in che modo i vincoli del piano – introdotti nel paragrafo 14.3 – possano fornire indicazioni sull’ubicazione dei c.d.i.r. E’ possibile costruire con semplici ragionamenti la tabella seguente, dove si considerano i vincoli esterni e dunque il moto assoluto degli elementi che essi connettono al telaio.

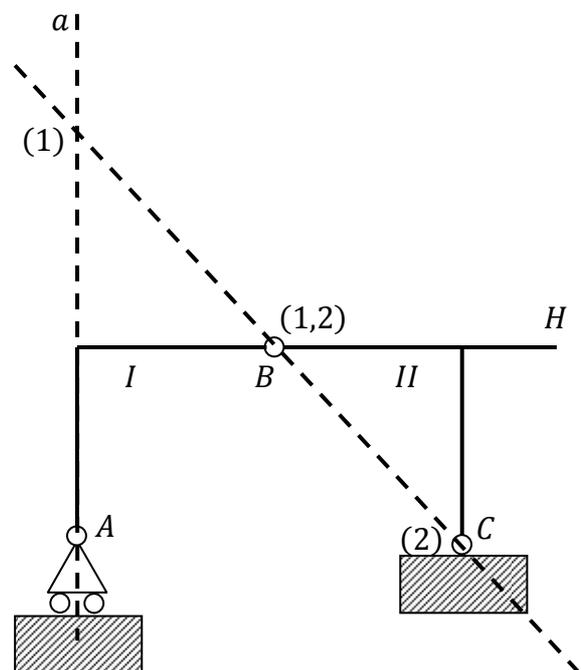
	vincolo	centro di istantanea rotazione del moto assoluto
vincoli esterni	cerniera	coincide con il centro della cerniera
	incastro scorrevole	è un punto improprio
	doppio pendolo	
	pendolo	si trova su un asse ortogonale alla direzione della traslazione consentita
	carrello	
	doppio doppio pendolo	

Nel caso in cui i vincoli siano interni valgono ancora queste considerazioni, ma in tal caso i c.d.i.r. sono quelli del moto relativo fra gli elementi connessi dai vincoli in esame.

16.6. Ricerca dei centri di istantanea rotazione. Ora che abbiamo introdotto i due teoremi di Aronhold-Kennedy e fatto le semplici considerazioni sul rapporto fra vincoli e ubicazione dei c.d.i.r., possiamo provare ad applicare tutto ciò nella ricerca dei c.d.i.r. per gli elementi traviformi delle strutture piane di nostro interesse.

Consideriamo la struttura indicata in figura, costituita da due tronchi rigidi: il tratto *I* è vincolato in *A* da un carrello esterno, e in *B* da una cerniera interna; il tratto *II* è vincolato con una cerniera al tratto *I* e con una cerniera in *C* al telaio.

In base a quanto detto nel paragrafo 16.5 il c.d.i.r.



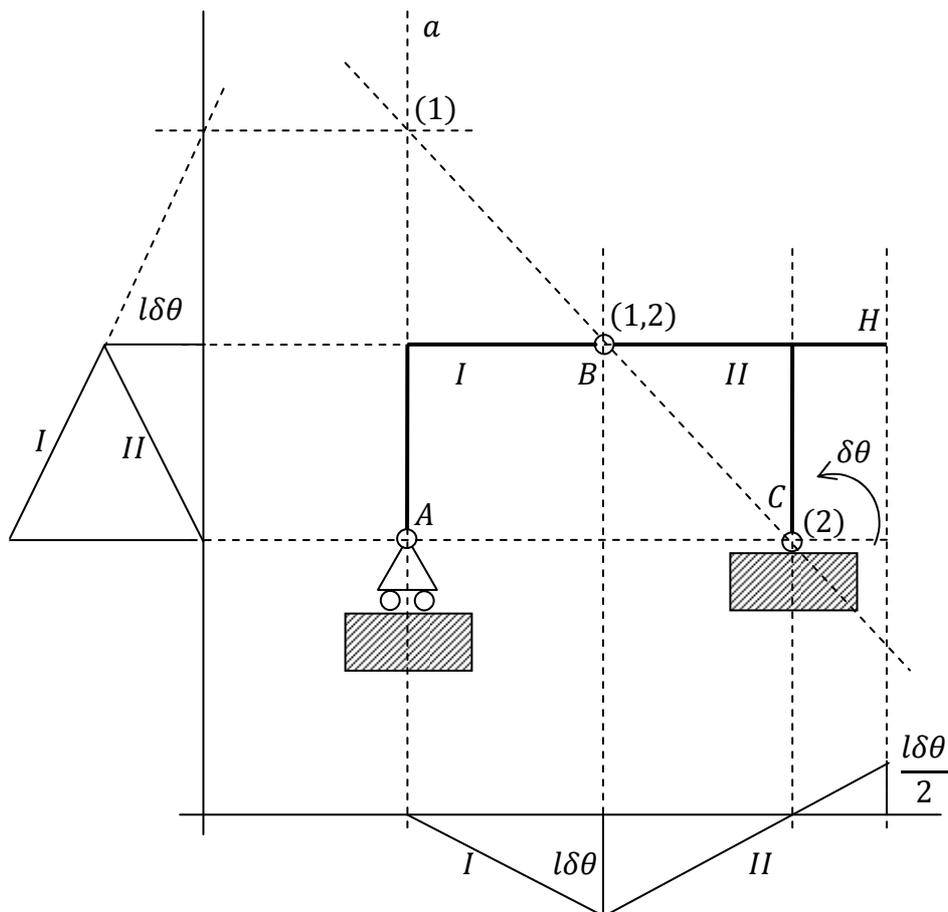
del moto assoluto di I si trova sulla retta a , quello del moto assoluto di II si trova nel punto C , quello del moto relativo si trova in B .

Il secondo teorema di Aronhold-Kennedy ci permette poi di affermare che il c.d.i.r. del moto assoluto di I deve trovarsi in corrispondenza dell'intersezione fra a e la retta per CB .

Per quanto riguarda le notazioni si precisa che

- i tronchi rigidi vengono indicati con numeri romani;
- i c.d.i.r. dei moti assoluti vengono indicati con il numero arabo (fra parentesi) del tronco rigido a cui ci si riferisce;
- i c.d.i.r. dei moti relativi vengono indicati con i due numeri arabi dei tronchi rigidi a cui ci si riferisce.

16.7. Determinazione del sistema di spostamenti virtuali. Data una struttura piana, una volta che si siano ubicati i centri di istantanea rotazione, è possibile ricavare il sistema di spostamenti virtuali tenendo presente l'espressione **16.8** del generico sistema di spostamenti virtuali. Nella pratica si riporta l'andamento delle componenti del sistema di spostamenti su due assi ortogonali.



Per dimostrare come ottenere il sistema di spostamenti virtuali si riprenda la struttura studiata nel paragrafo precedente, per la quale sono stati individuati già i tre c.d.i.r. Si traccino poi due assi ortogonali, uno verticale e uno orizzontale. Si tenga allora presente che

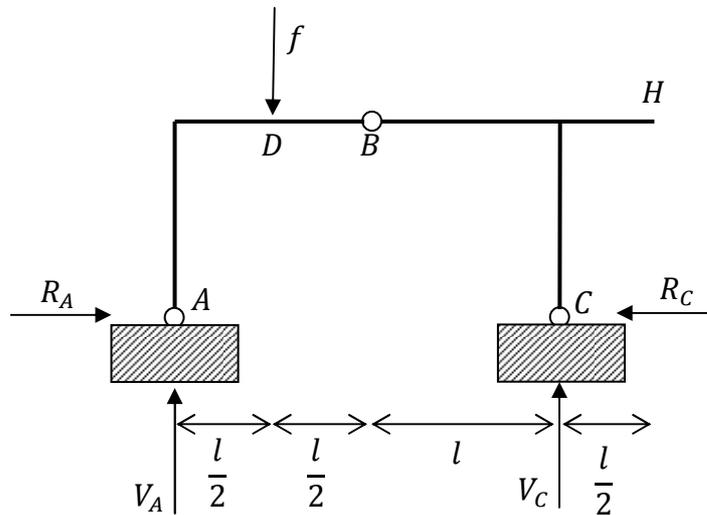
- in corrispondenza delle proiezioni dei c.d.i.r. dei moti assoluti le componenti degli spostamenti virtuali si devono annullare;

- in corrispondenza di cerniere interne il valore delle componenti degli spostamenti dei due elementi collegati deve essere il medesimo.

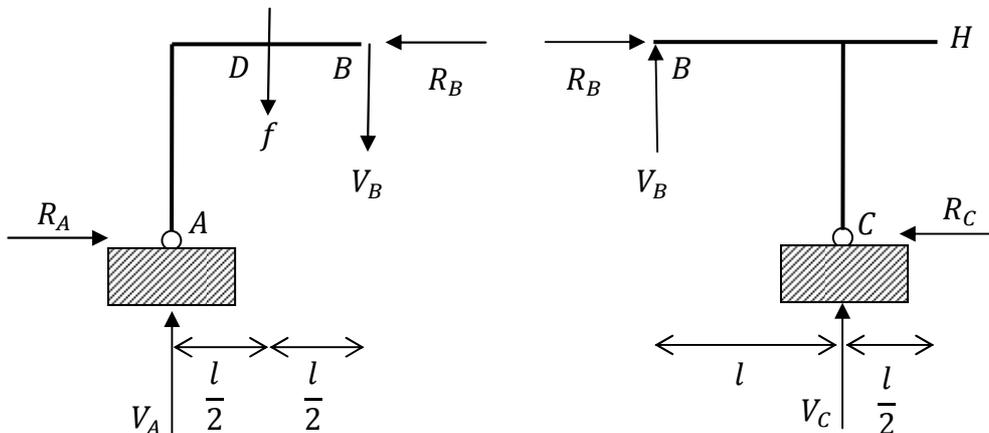
Si imprima allora una rotazione $\delta\theta$ in C e si ricavino le componenti verticali e orizzontali degli spostamenti virtuali di II attraverso la **16.8**. Fatto ciò restano determinate le componenti dello spostamento di I in B ; imposto poi l'annullamento dello spostamento in (1) si determinano completamente gli spostamenti di I .

Il procedimento illustrato negli ultimi due paragrafi, che consiste nella determinazione dei c.d.i.r. prima, e del sistema di spostamenti virtuali poi, prende il nome di **procedimento delle catene cinematiche**.

16.8. Catene cinematiche e PLV. Riprendiamo ora la trattazione del capitolo precedente, ovvero la determinazione delle reazioni vincolari attraverso il PLV in sistemi staticamente determinati, ma con l'ausilio ora del metodo delle catene cinematiche per la determinazione del sistema di spostamenti virtuali. Si consideri allora il sistema in figura.



La struttura ha 6 gradi di libertà (poiché è costituita da due corpi rigidi, ed è piana) e i vincoli impongono altrettanti gradi di vincolo: dunque è isostatica. Quindi il sistema può essere tanto staticamente indeterminato (se ci sono vincoli mal posti ma la sollecitazione garantisce l'equilibrio meccanico), quanto staticamente impossibile (se i vincoli sono mal posti ma la sollecitazione soddisfa l'equilibrio meccanico); quanto in fine staticamente determinato (se i vincoli sono tutti efficaci, a prescindere dalla sollecitazione).



Per discriminare i tre casi si può procedere secondo quanto visto nel cap 14, ovvero studiando il sistema della statica **14.3**. Si consideri tuttavia che è banalmente NON verificato il secondo teorema

di Aronhold-Kennedy, perché i tre c.d.i.r. coincidono con le tre cerniere, dunque non sono allineati: il moto è allora impossibile. Ne segue che il sistema non può essere staticamente impossibile; rimane la possibilità che sia staticamente indeterminato o staticamente determinato.

In realtà però ora non so come stabilire quale dei due casi si abbia, ovvero non so come capire se i vincoli sono mal posti o meno, senza ricorrere all'analisi della matrice A . Mi costruisco allora la matrice e ne calcolo il rango. Evidenziamo le reazioni interne relative alla cerniera interna in B . Il sistema della statica per i due corpi rigidi porge le 6 equazioni

$$16.13) \begin{cases} R_A - R_B = 0 \\ V_A - V_B = f \\ M_A = R_B l - V_B l - f \frac{l}{2} = 0 \\ R_B - R_C = 0 \\ V_B + V_C = 0 \\ M_C = -R_B l - V_B l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \\ V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ \frac{f}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

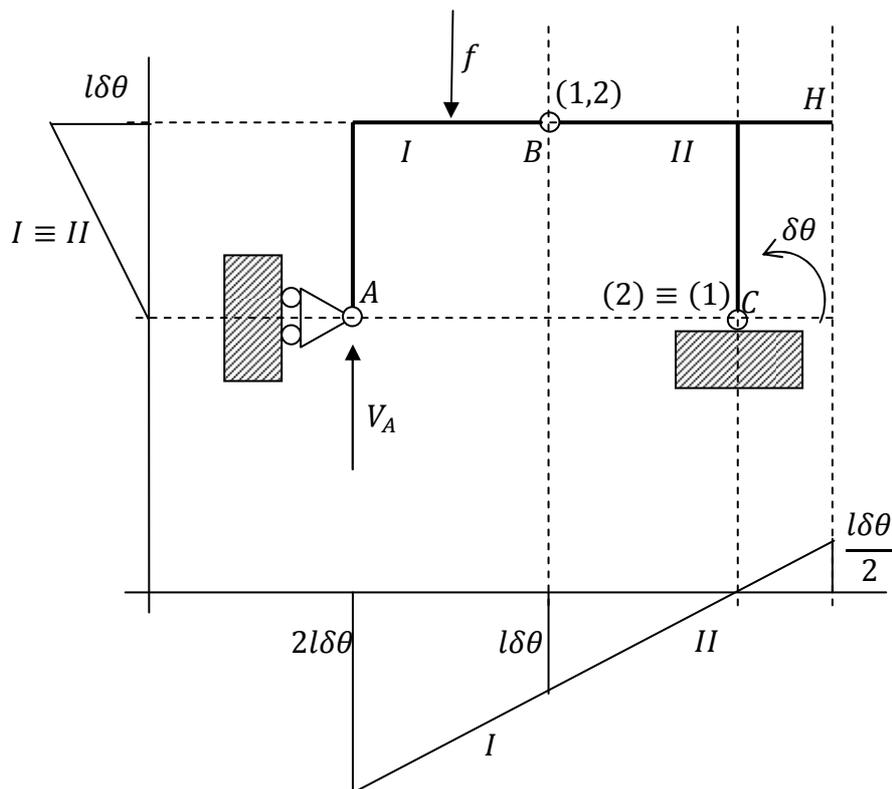
Considerando poi che

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

abbiamo che la matrice dei coefficienti ha rango massimo e dunque il sistema è del tipo **2.2** (capitolo 14), ovvero è staticamente determinato.

Procedo ora all'applicazione del PLV partendo dal nodo A . Sostituisco la cerniera con un carrello a scorrimento orizzontale, e introduco la forza esterna R_A . L'analisi delle catene cinematiche è quella fatta per l'esempio del capitolo precedente, al quale si rimanda; dunque l'espressione del lavoro virtuale si scrive

$$16.14) L_{ve} = -R_A 2l\delta\theta + f \frac{l\delta\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow R_A = \frac{f}{4}$$

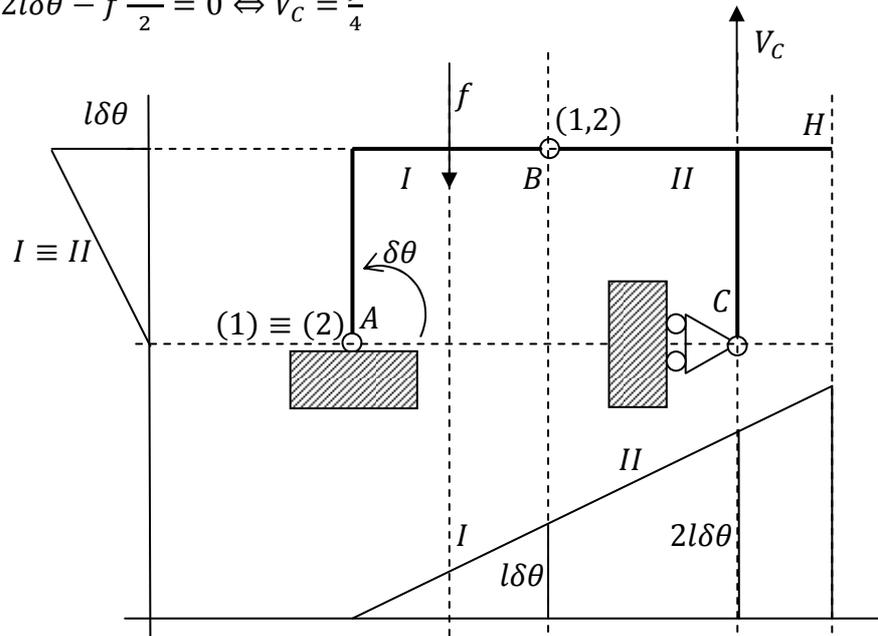


Ora sostituisco la cerniera in A con un carrello a scorrimento verticale, e introduco l'incognita dinamica V_A , procedendo poi con l'individuazione dei c.d.i.r. e quindi con la determinazione del sistema di spostamenti virtuali. In base al sistema di spostamento virtuale indicato in figura abbiamo per il lavoro virtuale

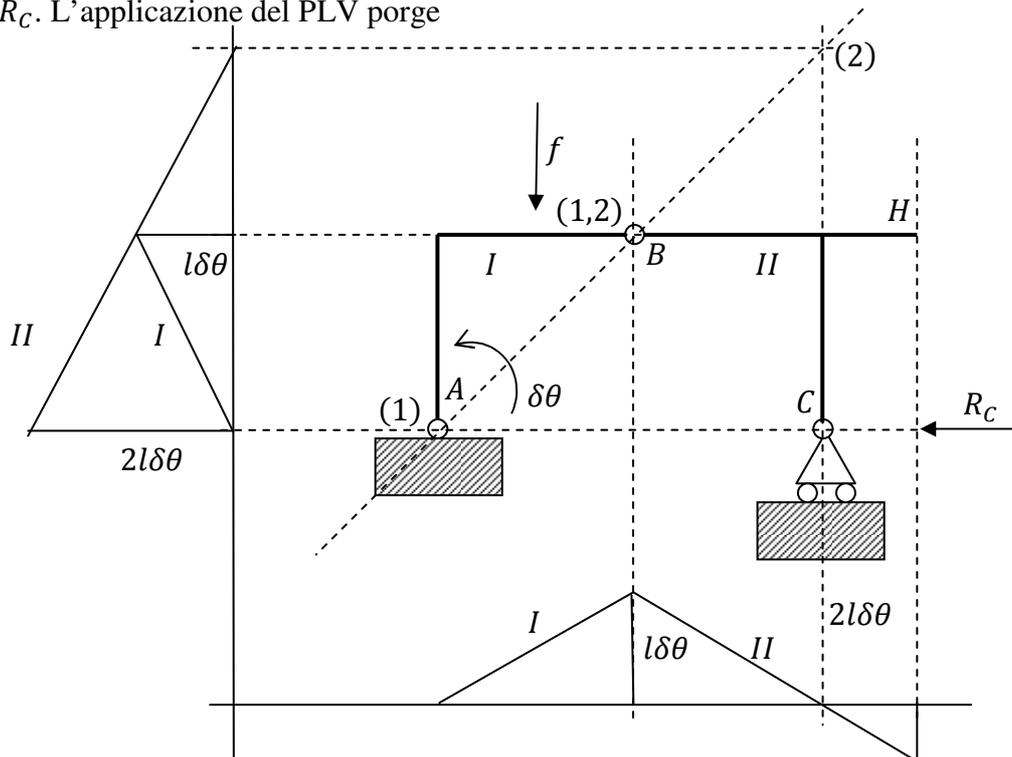
$$16.15) L_{ve} = -V_A 2l\delta\theta + f 3 \frac{l\delta\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow V_A = 3 \frac{f}{4}$$

Ora sostituiamo in C la cerniera con un carrello a scorrimento orizzontale e introduciamo l'incognita dinamica R_C . Il procedimento delle catene cinematiche e il PLV porgono allora

$$16.16) L_{ve} = V_C 2l\delta\theta - f \frac{l\delta\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow V_C = \frac{f}{4}$$



Sostituisco ora la cerniera in C con un carrello a scorrimento orizzontale e introduco l'incognita dinamica R_C . L'applicazione del PLV porge



$$16.17) L_{ve} = R_C 2l\delta\theta - f \frac{l\delta\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow R_C = \frac{f}{4}$$

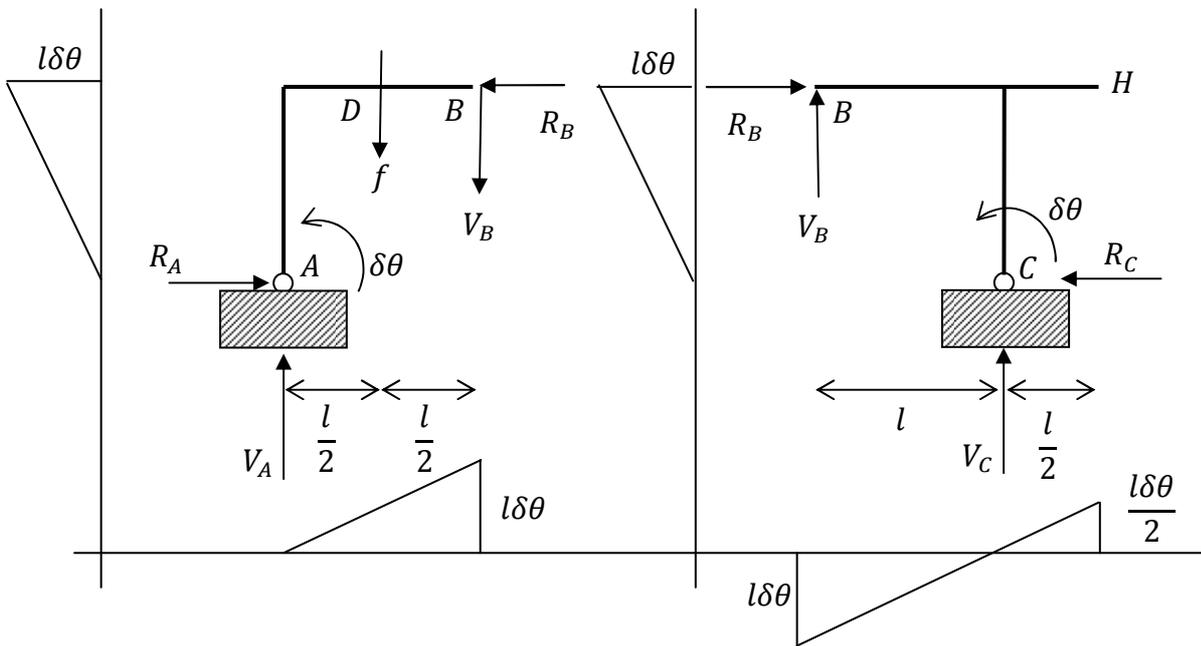
Dunque la ricerca delle reazioni vincolari esterne attraverso il metodo delle catene cinematiche e del PLV ha condotto ai valori

$$16.18) R_A = \frac{f}{4} \quad R_C = \frac{f}{4} \quad V_A = \frac{3f}{4} \quad V_C = \frac{f}{4}$$

Possiamo verificare questo risultato attraverso la risoluzione del sistema lineare **16.13**

$$16.13) \begin{cases} R_A = R_B \\ V_A - V_B = f \\ R_B - V_B = f \frac{1}{2} \\ R_B = R_C \\ V_B + V_C = 0 \\ R_B = -V_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = f \frac{1}{4} \\ V_A = f \frac{3}{4} \\ R_B = f \frac{1}{4} \\ R_C = f \frac{1}{4} \\ V_C = f \frac{1}{4} \\ V_B = -f \frac{1}{4} \end{cases}$$

Faccio ora vedere come il PLV consenta di ricavare anche le reazioni interne, che non abbiamo considerato più sopra. Si considerino infatti separatamente i due tronchi e si imprima a ciascuno un sistema di spostamenti virtuali.



Allora il PLV impone per l'equilibrio dei due tronchi le condizioni

$$\begin{cases} L_{ve}^{AB} = R_B l\delta\theta - V_B l\delta\theta - \frac{f l\delta\theta}{2} = 0 \\ L_{ve}^{BC} = -R_B l\delta\theta - V_B l\delta\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_B - V_B - \frac{f}{2} = 0 \\ R_B + V_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_B = \frac{f}{4} \\ V_B = -\frac{f}{4} \end{cases}$$

che confermano le **16.13**.

Capitolo 16. Catene cinematiche e PLV

Nel precedente capitolo si è visto come l'algoritmo per il calcolo delle reazioni vincolari – di sistemi staticamente determinati – attraverso il PLV richieda la determinazione del valore del sistema di spostamenti virtuali in tutti i punti della struttura in cui sia applicata una forza, al fine di calcolarne il lavoro virtuale; e gli esempi discussi sono stati in tal senso molto semplici, consentendo un calcolo veloce di detti valori. Ma cosa succede nel caso di strutture più articolate? Come si fa a calcolare in modo esatto il valore del campo degli spostamenti virtuali su tutta la struttura?

Ebbene in questo capitolo

- si illustra il **metodo delle catene cinematiche**, un procedimento atto proprio alla determinazione completa del campo degli spostamenti virtuali;
- inoltre si stabilisce in modo più rigoroso la definizione di spostamento virtuale, evidenziandone la differenza con gli spostamenti propriamente detti.

16.1. Teorema di Eulero. Nell'ambito della Meccanica Razionale si dimostra il seguente teorema (di Eulero)

ogni spostamento rigido sferico di centro C – ovvero con spostamento nullo in C – è riconducibile a uno spostamento rotatorio con asse di rotazione passante per C .

Siccome poi uno spostamento generico è sempre (lo diamo per buono) il prodotto¹ di uno spostamento traslatorio e di uno spostamento sferico, se ne deduce (per il teorema di Eulero) che

il generico spostamento rigido è il prodotto di una rotazione e di una traslazione.

Considerando poi che il prodotto di una rotazione intorno all'asse a per una traslazione che abbia direzione ortogonale ad a , è una rotazione con asse parallelo ad a (si veda in proposito la discussione sul campo circolare), segue che

il generico spostamento rigido è il prodotto di una rotazione e di una traslazione parallela all'asse di rotazione.

Se consideriamo allora spostamenti che avvengano esclusivamente su un piano, ovvero tali che le rotazioni abbiano sempre asse ortogonale al piano, si può affermare che

il generico spostamento rigido piano è sempre una rotazione con asse ortogonale al piano degli spostamenti.

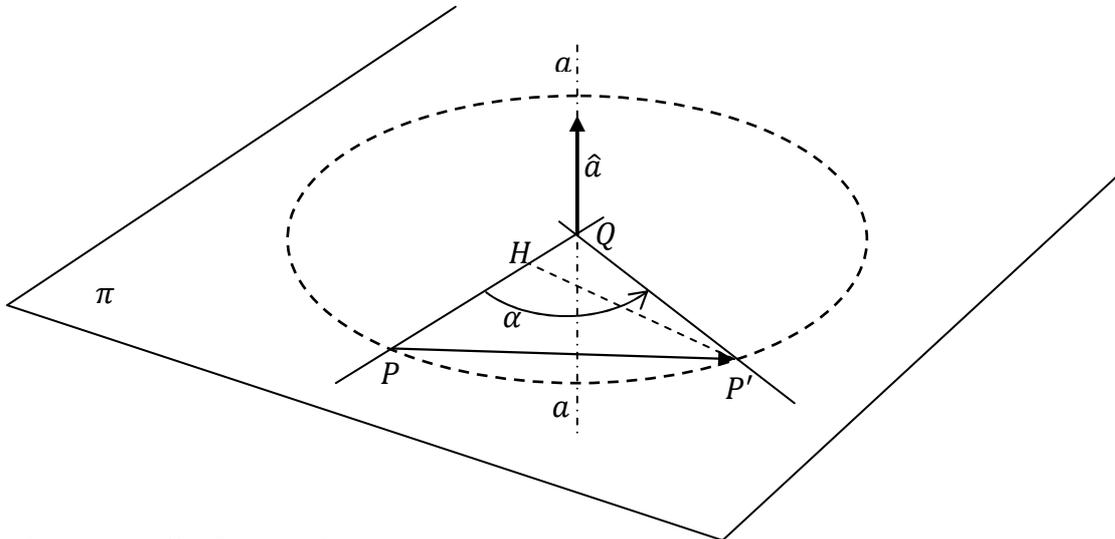
La traslazione rientra come caso particolare di rotazione, infatti lo spostamento rigido traslatorio si può immaginare come una rotazione il cui centro sia all'infinito.

16.2. Spostamento rigido rotatorio. Nella presente trattazione ci occupiamo di strutture piane, dunque per quanto visto nel paragrafo precedente, ci troveremo a dover fare i conti

¹ Si parla di prodotto di spostamenti rigidi quando si fa descrivere a uno spazio rigido prima uno spostamento (ad esempio una traslazione) e poi un altro spostamento (ad esempio una rotazione). In generale il prodotto di spostamenti non è commutativo (vedi l'esempio nel trattato di Meccanica Razionale), tuttavia nel caso di prodotto di una rotazione per una traslazione la commutatività sussiste.

esclusivamente con spostamenti rigidi rotatori. Vediamo allora adesso quale è l'espressione analitica di un sistema di spostamenti rigidi rotatori.

Nel piano π avviene una rotazione rigida intorno all'asse a , che intercetta il piano stesso in Q . Ci proponiamo di ricavare lo spostamento del punto P se l'ampiezza della rotazione – e il suo verso – sono definiti dall'anomalia α .



Con riferimento alla figura si ha

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP'} &= \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HP'} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QH}) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QH}) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha = \\ &= (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ} \cos \alpha) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha = \overrightarrow{PQ}(1 - \cos \alpha) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha\end{aligned}$$

che si preferisce scrivere

$$16.1) \quad \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QP}(\cos \alpha - 1) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \sin \alpha$$

Si può osservare che, nel secondo addendo, al posto di Q si può usare un qualunque punto di a senza cambiarne il valore (ciò non vale per il primo addendo). Uno spostamento rotatorio rigido è completamente definito in termini di ampiezza della rotazione, di asse di rotazione e di verso di rotazione, dal vettore

$$16.2) \quad \vec{r} = \alpha \hat{a}$$

detto appunto **vettore di rotazione**.

16.3. Sistema di spostamenti virtuali. Ricordando che gli sviluppi di McLaurin del primo ordine delle due funzioni trigonometriche si scrivono

$$16.3) \quad \begin{cases} \sin \alpha = \sin 0 + \alpha \cos 0 + o(\alpha) = \alpha + o(\alpha) \\ \cos \alpha = \cos 0 - \alpha \sin 0 + o(\alpha) = 1 + o(\alpha) \end{cases}$$

e sostituendoli nella **16.1** abbiamo

$$16.4) \quad \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QP}o(\alpha) + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP})(\alpha + o(\alpha)) = \alpha \left(\overrightarrow{QP} \frac{o(\alpha)}{\alpha} + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) \right)$$

Dividendo per l'angolo di rotazione si ha

$$16.5) \quad \frac{\overrightarrow{PP'}}{\alpha} = \left(\overrightarrow{QP} \frac{o(\alpha)}{\alpha} + (\hat{a} \times \overrightarrow{QP}) \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) \right)$$

e mandando al limite per $\alpha \rightarrow 0$ si ha

$$16.6) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PP'}}{\alpha} = \hat{a} \times \overrightarrow{QP}$$

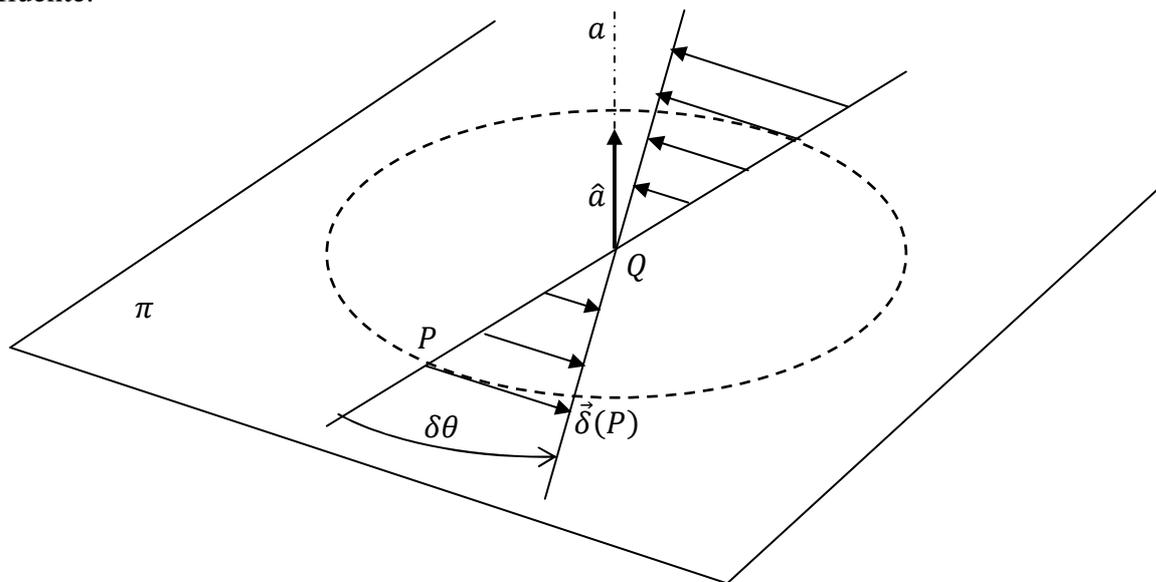
Moltiplicando poi ambo i membri per l'angolo $\delta\theta$ si ha

$$16.7) \quad \delta\theta \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PP'}}{\alpha} = \delta\theta \hat{a} \times \overrightarrow{QP}$$

Questo campo vettoriale – che è un campo circolare di asse \hat{a} – rappresenta il sistema di spostamenti virtuali associati alla rotazione di centro Q e ampiezza $\delta\theta$. Indicando $\vec{\delta}(P)$ tale campo si ha in definitiva

$$16.8) \quad \vec{\delta}(P) = \delta\theta \hat{a} \times \overrightarrow{QP}$$

La grandezza algebrica $\delta\theta$ – che ha le dimensioni di un angolo – è arbitraria e incide solo sull'intensità del campo e sul suo verso; inoltre ai fini dell'applicazione del PLV il suo valore è ininfluente.



Si osserva che – se non per il caso limite della traslazione – il sistema di spostamenti virtuali **16.8** non coinciderà mai con un sistema di spostamenti descritto dalla **16.1**, mentre è formalmente analogo all'atto di moto rotatorio. In effetti il sistema di spostamenti virtuali non è altro che la derivata in α dello spostamento rigido rotatorio, moltiplicata per la rotazione arbitraria $\delta\theta$.

L'importanza del sistema di spostamenti virtuali – che si può considerare di primo acchito un ente puramente matematico privo di valore fisico – sta nel suo impiego nella definizione del lavoro virtuale e quindi – in definitiva – nella sua utilizzazione nel PLV.

16.4. Teoremi di Aronhold-Kennedy. Nel paragrafo precedente abbiamo visto che il sistema di spostamenti virtuali di un corpo rigido nel piano è un campo circolare descritto dalla

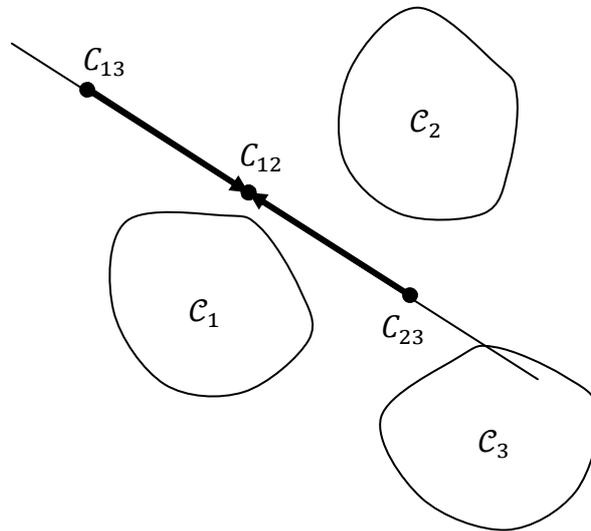
funzione vettoriale **16.8**. Ora estendiamo la nostra analisi al caso in cui si abbiano più corpi rigidi nel piano, attraverso due importanti² teoremi, detti di Aronhold-Kennedy.

Primo teorema di Aronhold-Kennedy. Dati tre corpi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ i quali si muovano sullo stesso piano, allora i centri di istantanea rotazione dei tre moti relativi (cioè del moto di \mathcal{C}_1 rispetto a \mathcal{C}_2 , del moto di \mathcal{C}_2 rispetto a \mathcal{C}_3 e del moto di \mathcal{C}_1 rispetto a \mathcal{C}_3) sono allineati.

Dimostrazione. Diciamo C_{13} il c.d.i.r. del moto 1-3 (moto di \mathcal{C}_1 rispetto a \mathcal{C}_3), C_{23} il c.d.i.r. del moto 2-3, e C_{12} il c.d.i.r. del moto 1-2. Si consideri poi un punto P di \mathcal{C}_1 . Considerando assoluto il moto di P rispetto a \mathcal{C}_3 e relativo quello rispetto a \mathcal{C}_2 , la cinematica relativa ci dice che

$$16.9) \quad \vec{v}_{aP} = \vec{v}_{rP} + \vec{v}_{\tau P} \Leftrightarrow \vec{v}_{P1,3} = \vec{v}_{P1,2} + \vec{v}_{P2,3}$$

dove si intende che $\vec{v}_{P1,3}$ è la velocità del punto P – considerato appartenente a \mathcal{C}_1 – rispetto a \mathcal{C}_3 , e così via. D'altra parte



$$16.10) \quad \begin{cases} \vec{v}_{P1,3} = \vec{\omega}_{13} \times \overrightarrow{C_{13}P} \\ \vec{v}_{P1,2} = \vec{\omega}_{12} \times \overrightarrow{C_{12}P} \\ \vec{v}_{P2,3} = \vec{\omega}_{23} \times \overrightarrow{C_{23}P} \end{cases}$$

che sostituite nella **16.9** porgono

$$16.11) \quad \vec{\omega}_{13} \times \overrightarrow{C_{13}P} = \vec{\omega}_{12} \times \overrightarrow{C_{12}P} + \vec{\omega}_{23} \times \overrightarrow{C_{23}P}$$

Se poi scegliamo in particolare $P = C_{12}$ abbiamo

$$16.12) \quad \vec{\omega}_{13} \times \overrightarrow{C_{13}C_{12}} = \vec{\omega}_{23} \times \overrightarrow{C_{23}C_{12}}$$

Dunque, essendo le velocità angolari parallele (i moti avvengono tutti nello stesso piano), devono risultare paralleli anche i due vettori $\overrightarrow{C_{13}C_{12}}, \overrightarrow{C_{23}C_{12}}$ e questo significa che i tre c.d.i.r. sono allineati.

² I teoremi seguenti si riferiscono agli atti di moto; tuttavia, come abbiamo visto nel precedente paragrafo, l'espressione degli atti di moto è formalmente analoga a quella dei sistemi di spostamenti virtuali.

Secondo teorema di Aronhold-Kennedy. Dati due corpi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ i quali si muovano sullo stesso piano, allora il centro di istantanea rotazione del moto relativo (cioè del moto di \mathcal{C}_1 rispetto a \mathcal{C}_2) è allineato ai centri di istantanea rotazione dei due moti assoluti.

Dimostrazione. Questo teorema è un corollario del precedente, infatti se nel primo teorema consideriamo fisso il corpo \mathcal{C}_3 allora abbiamo che i moti di \mathcal{C}_1 e di \mathcal{C}_2 rispetto \mathcal{C}_3 diventano moti assoluti, quindi il precedente teorema ci dice che i c.d.i.r. dei due moti assoluti sono allineati con il c.d.i.r. del moto relativo fra \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . Dunque la tesi.

16.5. Vincoli e centri di istantanea rotazione. Vediamo ora in che modo i vincoli del piano – introdotti nel paragrafo 14.3 – possano fornire indicazioni sull’ubicazione dei c.d.i.r. E’ possibile costruire con semplici ragionamenti la tabella seguente, dove si considerano i vincoli esterni e dunque il moto assoluto degli elementi che essi connettono al telaio.

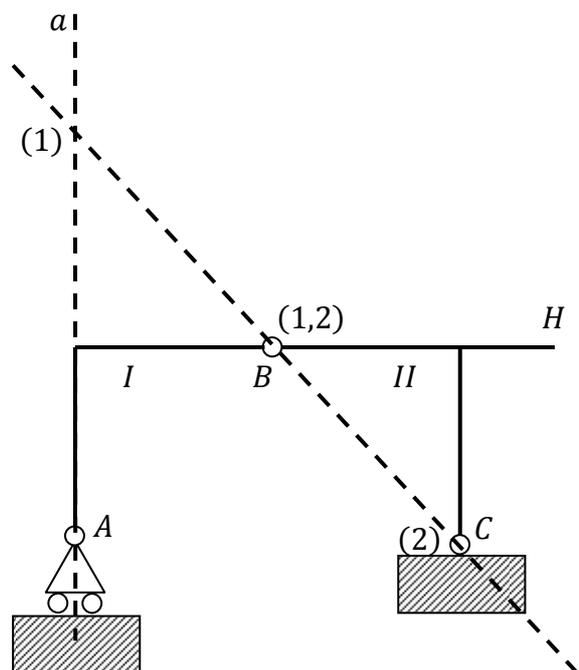
	vincolo	centro di istantanea rotazione del moto assoluto
vincoli esterni	cerniera	coincide con il centro della cerniera
	incastro scorrevole	è un punto improprio
	doppio pendolo	
	pendolo	si trova su un asse ortogonale alla direzione della traslazione consentita
	carrello	
	doppio doppio pendolo	

Nel caso in cui i vincoli siano interni valgono ancora queste considerazioni, ma in tal caso i c.d.i.r. sono quelli del moto relativo fra gli elementi connessi dai vincoli in esame.

16.6. Ricerca dei centri di istantanea rotazione. Ora che abbiamo introdotto i due teoremi di Aronhold-Kennedy e fatto le semplici considerazioni sul rapporto fra vincoli e ubicazione dei c.d.i.r., possiamo provare ad applicare tutto ciò nella ricerca dei c.d.i.r. per gli elementi traviformi delle strutture piane di nostro interesse.

Consideriamo la struttura indicata in figura, costituita da due tronchi rigidi: il tratto *I* è vincolato in *A* da un carrello esterno, e in *B* da una cerniera interna; il tratto *II* è vincolato con una cerniera al tratto *I* e con una cerniera in *C* al telaio.

In base a quanto detto nel paragrafo 16.5 il c.d.i.r.



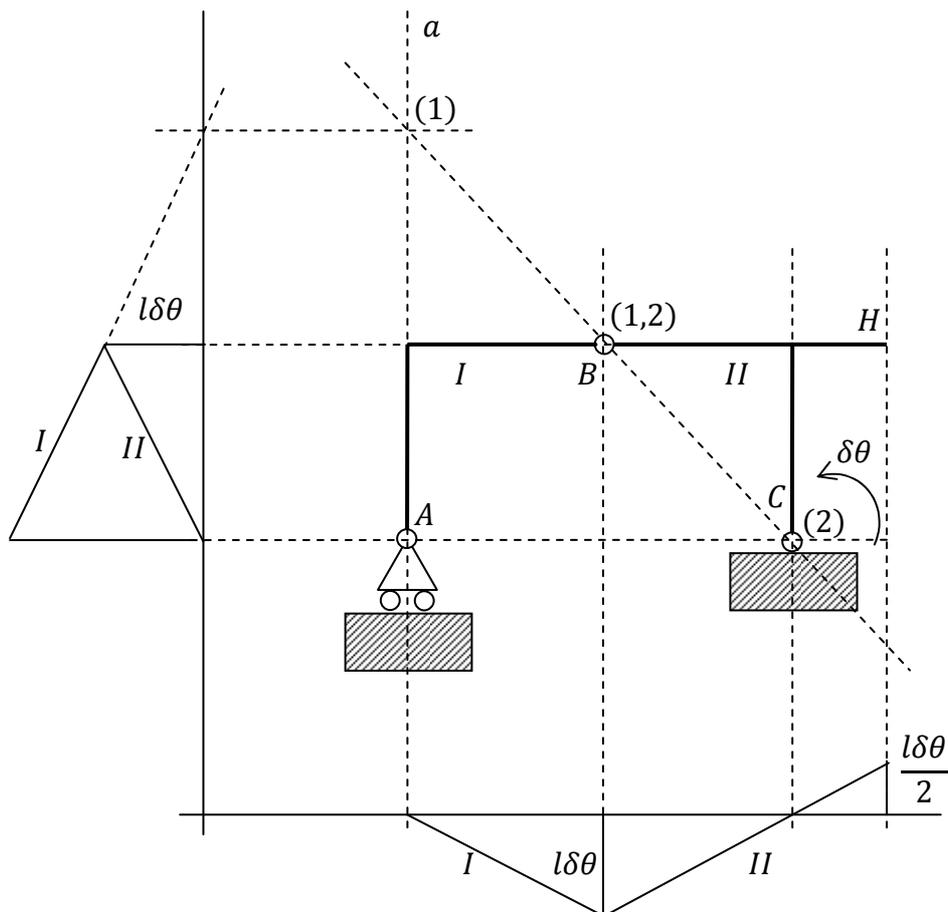
del moto assoluto di I si trova sulla retta a , quello del moto assoluto di II si trova nel punto C , quello del moto relativo si trova in B .

Il secondo teorema di Aronhold-Kennedy ci permette poi di affermare che il c.d.i.r. del moto assoluto di I deve trovarsi in corrispondenza dell'intersezione fra a e la retta per CB .

Per quanto riguarda le notazioni si precisa che

- i tronchi rigidi vengono indicati con numeri romani;
- i c.d.i.r. dei moti assoluti vengono indicati con il numero arabo (fra parentesi) del tronco rigido a cui ci si riferisce;
- i c.d.i.r. dei moti relativi vengono indicati con i due numeri arabi dei tronchi rigidi a cui ci si riferisce.

16.7. Determinazione del sistema di spostamenti virtuali. Data una struttura piana, una volta che si siano ubicati i centri di istantanea rotazione, è possibile ricavare il sistema di spostamenti virtuali tenendo presente l'espressione 16.8 del generico sistema di spostamenti virtuali. Nella pratica si riporta l'andamento delle componenti del sistema di spostamenti su due assi ortogonali.



Per dimostrare come ottenere il sistema di spostamenti virtuali si riprenda la struttura studiata nel paragrafo precedente, per la quale sono stati individuati già i tre c.d.i.r. Si traccino poi due assi ortogonali, uno verticale e uno orizzontale. Si tenga allora presente che

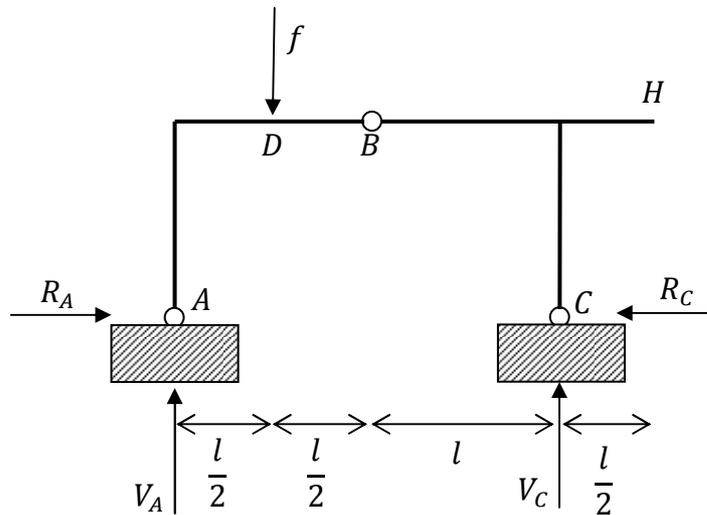
- in corrispondenza delle proiezioni dei c.d.i.r. dei moti assoluti le componenti degli spostamenti virtuali si devono annullare;

- in corrispondenza di cerniere interne il valore delle componenti degli spostamenti dei due elementi collegati deve essere il medesimo.

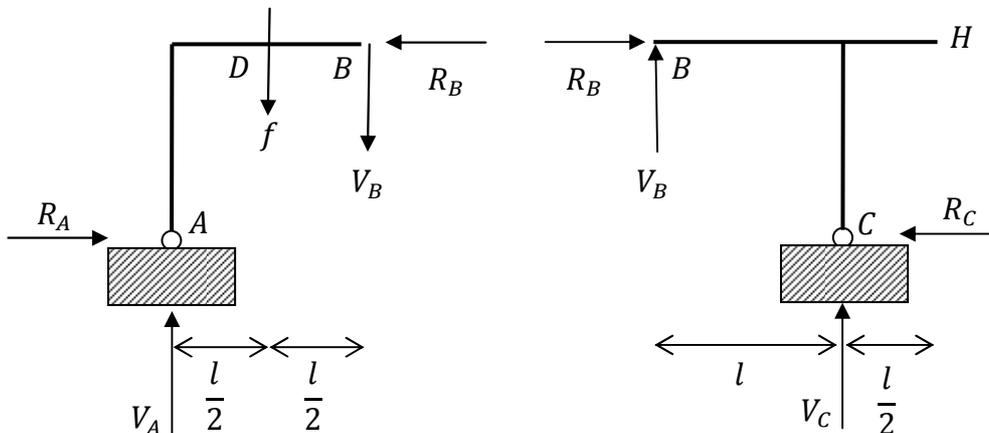
Si imprima allora una rotazione $\delta\theta$ in C e si ricavino le componenti verticali e orizzontali degli spostamenti virtuali di II attraverso la **16.8**. Fatto ciò restano determinate le componenti dello spostamento di I in B ; imposto poi l'annullamento dello spostamento in (1) si determinano completamente gli spostamenti di I .

Il procedimento illustrato negli ultimi due paragrafi, che consiste nella determinazione dei c.d.i.r. prima, e del sistema di spostamenti virtuali poi, prende il nome di **procedimento delle catene cinematiche**.

16.8. Catene cinematiche e PLV. Riprendiamo ora la trattazione del capitolo precedente, ovvero la determinazione delle reazioni vincolari attraverso il PLV in sistemi staticamente determinati, ma con l'ausilio ora del metodo delle catene cinematiche per la determinazione del sistema di spostamenti virtuali. Si consideri allora il sistema in figura.



La struttura ha 6 gradi di libertà (poiché è costituita da due corpi rigidi, ed è piana) e i vincoli impongono altrettanti gradi di vincolo: dunque è isostatica. Quindi il sistema può essere tanto staticamente indeterminato (se ci sono vincoli mal posti ma la sollecitazione garantisce l'equilibrio meccanico), quanto staticamente impossibile (se i vincoli sono mal posti ma la sollecitazione soddisfa l'equilibrio meccanico); quanto in fine staticamente determinato (se i vincoli sono tutti efficaci, a prescindere dalla sollecitazione).



Per discriminare i tre casi si può procedere secondo quanto visto nel cap 14, ovvero studiando il sistema della statica **14.3**. Si consideri tuttavia che è banalmente NON verificato il secondo teorema

di Aronhold-Kennedy, perché i tre c.d.i.r. coincidono con le tre cerniere, dunque non sono allineati: il moto è allora impossibile. Ne segue che il sistema non può essere staticamente impossibile; rimane la possibilità che sia staticamente indeterminato o staticamente determinato.

In realtà però ora non so come stabilire quale dei due casi si abbia, ovvero non so come capire se i vincoli sono mal posti o meno, senza ricorrere all'analisi della matrice A . Mi costruisco allora la matrice e ne calcolo il rango. Evidenziamo le reazioni interne relative alla cerniera interna in B . Il sistema della statica per i due corpi rigidi porge le 6 equazioni

$$16.13) \begin{cases} R_A - R_B = 0 \\ V_A - V_B = f \\ M_A = R_B l - V_B l - f \frac{l}{2} = 0 \\ R_B - R_C = 0 \\ V_B + V_C = 0 \\ M_C = -R_B l - V_B l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \\ V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ \frac{f}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

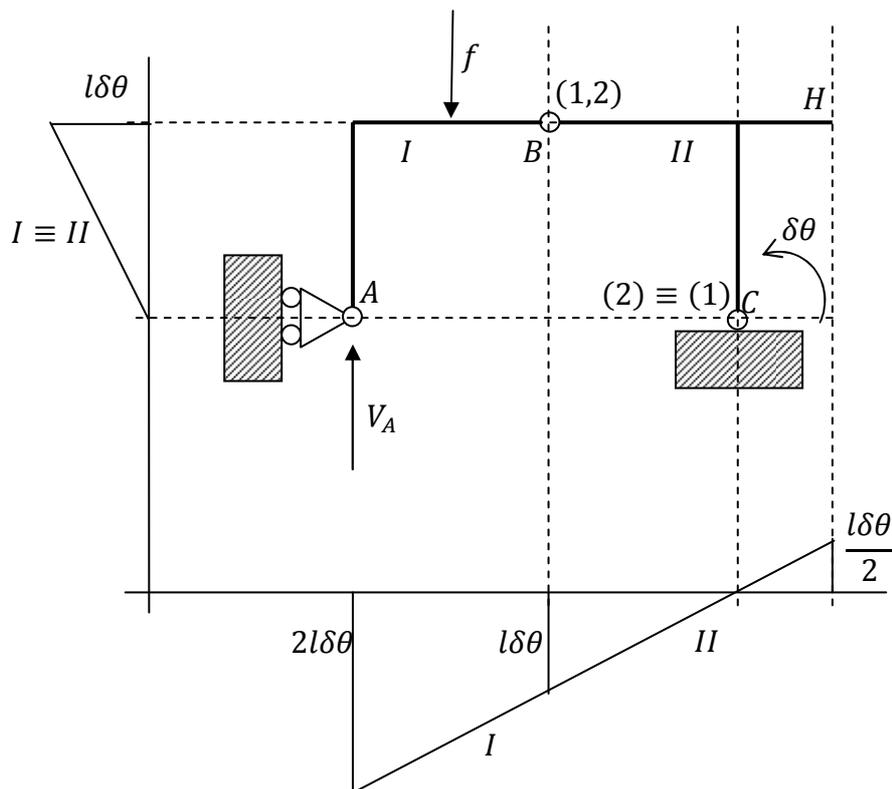
Considerando poi che

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

abbiamo che la matrice dei coefficienti ha rango massimo e dunque il sistema è del tipo **2.2** (capitolo 14), ovvero è staticamente determinato.

Procedo ora all'applicazione del PLV partendo dal nodo A . Sostituisco la cerniera con un carrello a scorrimento orizzontale, e introduco la forza esterna R_A . L'analisi delle catene cinematiche è quella fatta per l'esempio del capitolo precedente, al quale si rimanda; dunque l'espressione del lavoro virtuale si scrive

$$16.14) L_{ve} = -R_A 2l\delta\theta + f \frac{l\delta\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow R_A = \frac{f}{4}$$

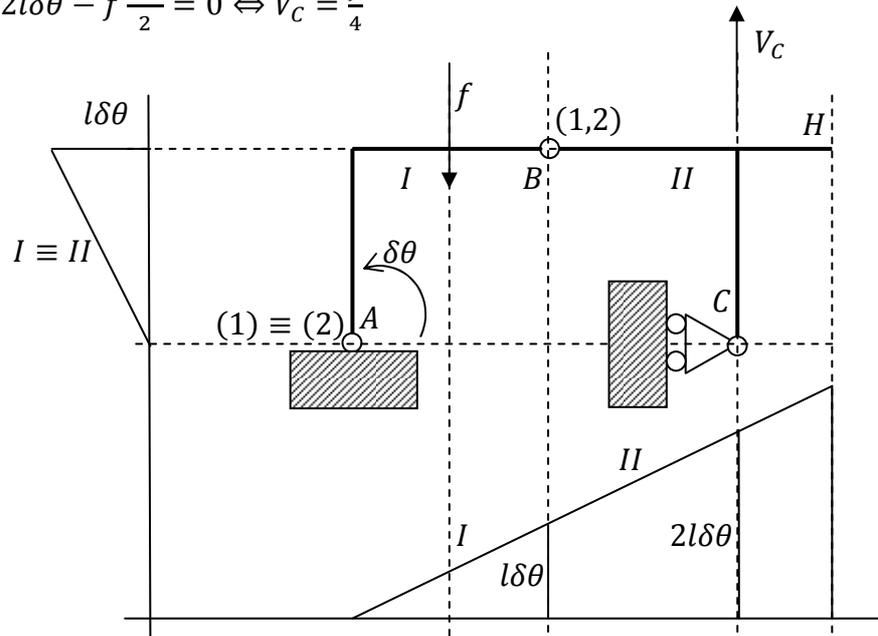


Ora sostituisco la cerniera in A con un carrello a scorrimento verticale, e introduco l'incognita dinamica V_A , procedendo poi con l'individuazione dei c.d.i.r. e quindi con la determinazione del sistema di spostamenti virtuali. In base al sistema di spostamento virtuale indicato in figura abbiamo per il lavoro virtuale

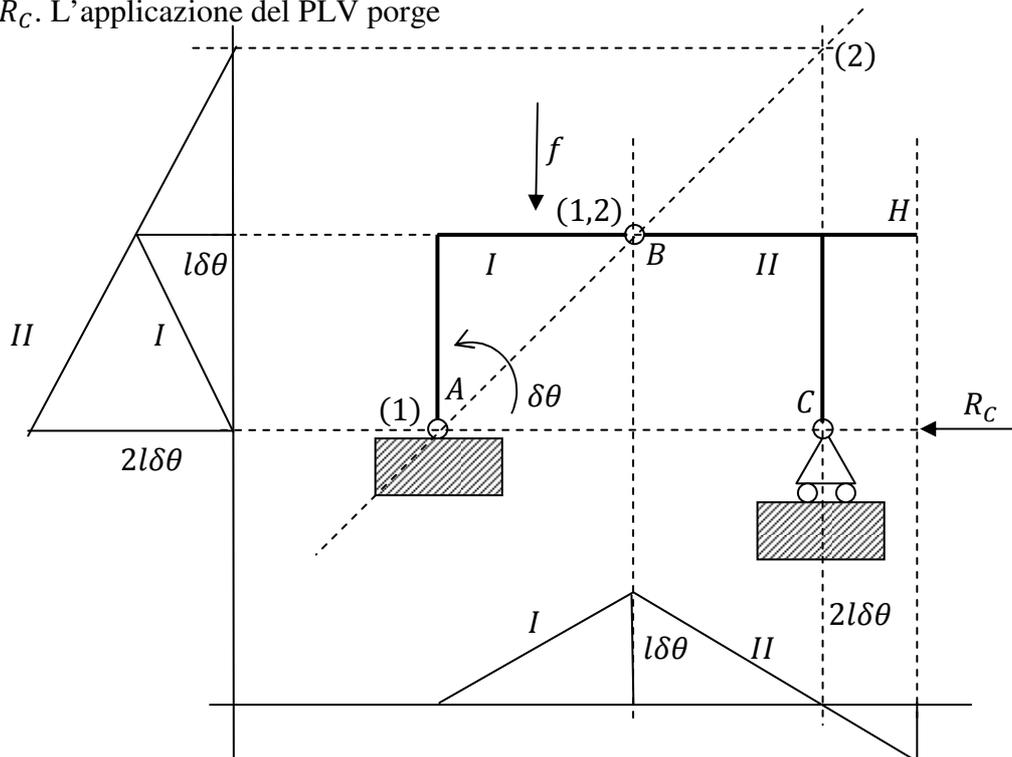
$$16.15) L_{ve} = -V_A 2l\delta\theta + f 3 \frac{l\delta\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow V_A = 3 \frac{f}{4}$$

Ora sostituiamo in C la cerniera con un carrello a scorrimento orizzontale e introduciamo l'incognita dinamica R_C . Il procedimento delle catene cinematiche e il PLV porgono allora

$$16.16) L_{ve} = V_C 2l\delta\theta - f \frac{l\delta\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow V_C = \frac{f}{4}$$



Sostituisco ora la cerniera in C con un carrello a scorrimento orizzontale e introduco l'incognita dinamica R_C . L'applicazione del PLV porge



$$16.17) L_{ve} = R_C 2l\delta\theta - f \frac{l\delta\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow R_C = \frac{f}{4}$$

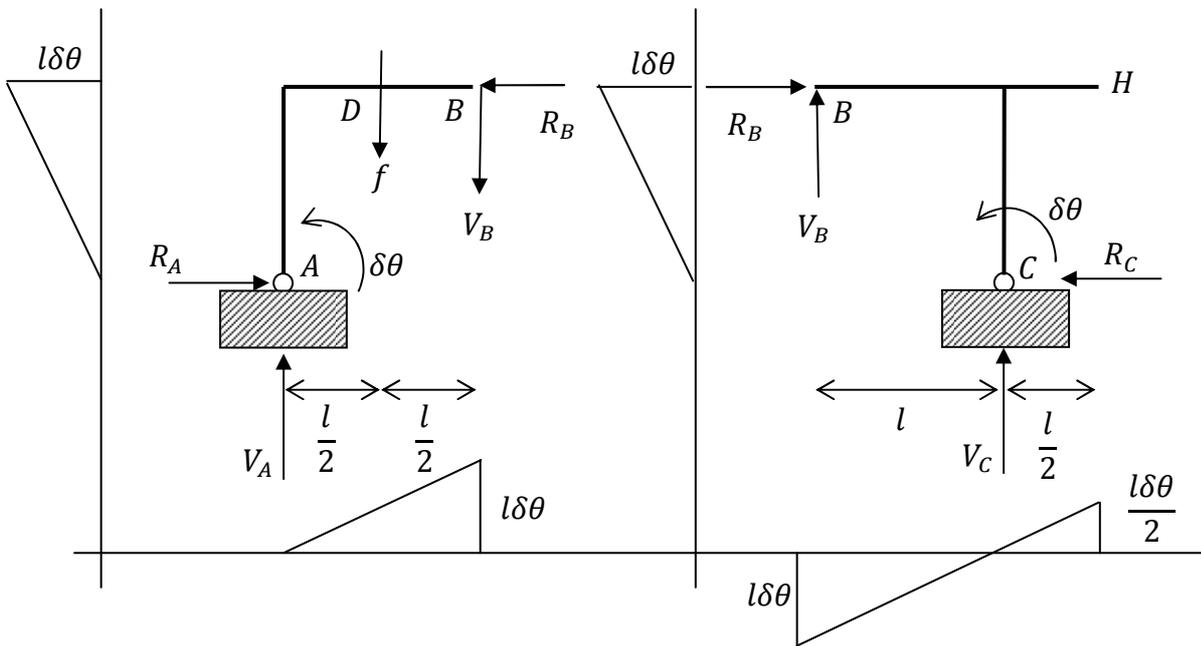
Dunque la ricerca delle reazioni vincolari esterne attraverso il metodo delle catene cinematiche e del PLV ha condotto ai valori

$$16.18) R_A = \frac{f}{4} \quad R_C = \frac{f}{4} \quad V_A = \frac{3f}{4} \quad V_C = \frac{f}{4}$$

Possiamo verificare questo risultato attraverso la risoluzione del sistema lineare **16.13**

$$16.13) \begin{cases} R_A = R_B \\ V_A - V_B = f \\ R_B - V_B = f \frac{1}{2} \\ R_B = R_C \\ V_B + V_C = 0 \\ R_B = -V_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = f \frac{1}{4} \\ V_A = f \frac{3}{4} \\ R_B = f \frac{1}{4} \\ R_C = f \frac{1}{4} \\ V_C = f \frac{1}{4} \\ V_B = -f \frac{1}{4} \end{cases}$$

Faccio ora vedere come il PLV consenta di ricavare anche le reazioni interne, che non abbiamo considerato più sopra. Si considerino infatti separatamente i due tronchi e si imprima a ciascuno un sistema di spostamenti virtuali.



Allora il PLV impone per l'equilibrio dei due tronchi le condizioni

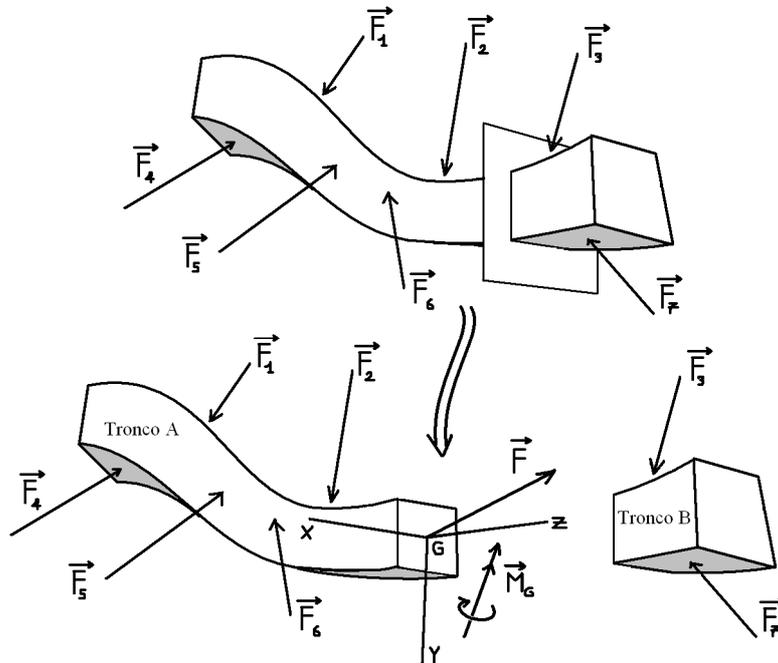
$$\begin{cases} L_{ve}^{AB} = R_B l\delta\theta - V_B l\delta\theta - \frac{f l\delta\theta}{2} = 0 \\ L_{ve}^{BC} = -R_B l\delta\theta - V_B l\delta\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_B - V_B - \frac{f}{2} = 0 \\ R_B + V_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_B = \frac{f}{4} \\ V_B = -\frac{f}{4} \end{cases}$$

che confermano le **16.13**.

Capitolo 17. Caratteristiche di sollecitazione

In questo capitolo introduco degli enti, con dimensione di sforzo e di momento, in grado di definire lo stato tensionale della generica sezione della trave. Si tratta di 6 parametri dinamici (3 componenti di sforzo e tre componenti di momento) i quali prendono il nome di **caratteristiche della sollecitazione**. Spesso le caratteristiche della sollecitazione prendono il nome di **componenti delle azioni interne**.

17.1. Caratteristiche della sollecitazione, caso generale. Seziono idealmente una trave in due tronchi (vedi figura). Affinché il tronco *A* sia in equilibrio, la sollecitazione che il tronco *B* esercita su di esso deve equilibrare la sollecitazione esterna agente sul tronco *A*. Se \vec{F} è la risultante della sollecitazione esercitata da *B* su *A*, e \vec{M}_G è il momento totale rispetto al baricentro *G* della sezione, allora tale sollecitazione è equivalente alla forza \vec{F} applicata in *G* e a una coppia di momento \vec{M}_G .



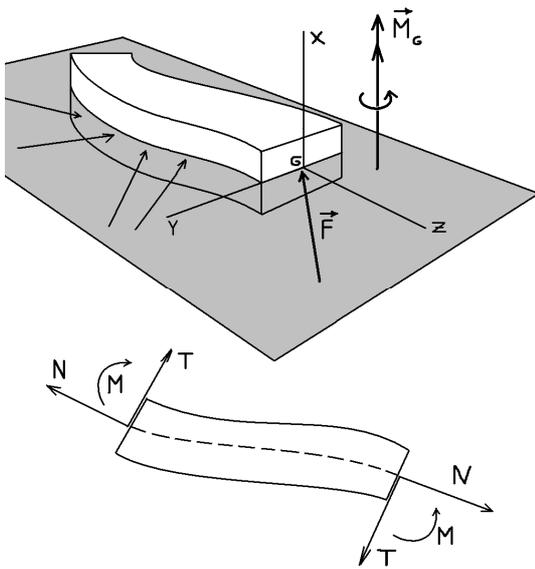
Se fissiamo una terna $(G; x, y, z)$ tale che l'asse *z* sia ortogonale alla sezione in *G* e gli assi *x, y* individuino due direzioni centrali di inerzia della sezione, sul piano della sezione stessa, allora le componenti della sollecitazione equivalente di cui sopra rispetto questa terna prendono il nome di **caratteristiche della sollecitazione**. In particolare si pongono le definizioni seguenti:

$$17.1) \begin{cases} M_{Gx}, M_{Gy}: \text{momenti flettenti} \\ M_{Gz}: \text{momento torcente} \\ F_x, F_y: \text{componenti di taglio} \\ F_z: \text{componente normale} \end{cases}$$

La simbologia comunemente in uso per le caratteristiche della sollecitazione è poi quella seguente

$$17.2) \begin{matrix} M_x = M_{Gx} & M_y = M_{Gy} & M_z = M_{Gz} \\ T_x \triangleq F_x & T_y \triangleq F_y & N \triangleq F_z \end{matrix}$$

17.2. Caratteristiche della sollecitazione per trave piana. Nel caso di travi piane la sollecitazione è piana e dunque la risultante agente sulla sezione è parallela al piano della trave, mentre il momento totale risulta ortogonale al piano della trave. Nel caso di trave piana si adotta il seguente sistema di riferimento per proiettare la sollecitazione agente sulla sezione:



- l'asse z lo si prende anche in questo caso ortogonale alla sezione nel punto G ;
- l'asse y lo si prende giacente sul piano, venendo così a coincidere con una direzione centrale di inerzia della sezione; per il verso dell'asse y (e quindi quello dell'asse x) si osservano le convenzioni indicate in figura, dove sono segnati i versi positivi per le caratteristiche di sollecitazione, cioè i versi positivi degli assi del sistema di riferimento.

Per quanto riguarda la simbologia la 17.2 si adatta al

caso piano nel modo seguente

$$17.3) \quad \begin{aligned} M &\triangleq M_{Gx} \\ T &\triangleq F_y \quad N \triangleq F_z \end{aligned}$$

17.3. Equazioni indefinite di equilibrio per trave piana ad asse qualunque. Consideriamo travi ad asse piano qualunque con sollecitazione distribuita con continuità lungo l'asse geometrico e sia

- q è la componente orizzontale costante del carico distribuito (forza su unità di lunghezza);
- p è la componente verticale costante del carico distribuito (forza su unità di lunghezza);
- m è la coppia distribuita (forza);
- s è l'ascissa curvilinea fissata sull'asse geometrico;
- $R(s)$ è il raggio di curvatura dell'asse geometrico in funzione dell'ascissa curvilinea.

Si consideri la trave piana ad asse curvilineo indicata in figura, e sia

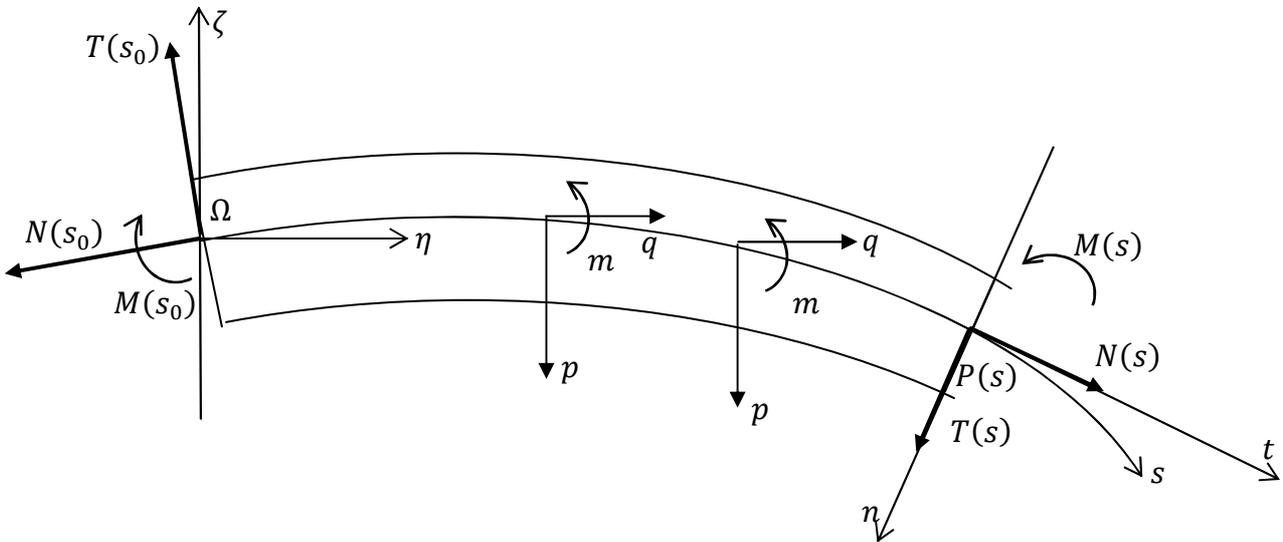
$$17.4) \quad \begin{cases} \eta = \eta(s) \\ \zeta = \zeta(s) \end{cases}$$

l'equazione parametrica del suo asse geometrico in funzione dell'ascissa curvilinea, rispetto al sistema di riferimento $(\Omega; \eta, \zeta)$. Allora l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione può essere espresso in funzione del versore tangente $\hat{t}(s)$ e del versore normale $\hat{n}(s)$ i quali sono dati da

$$17.5) \quad \begin{cases} \hat{t}(s) = \left(\frac{d\eta(s)}{ds} \quad \frac{d\zeta(s)}{ds} \right) \\ \hat{n}(s) = \left(\frac{d\zeta(s)}{ds} \quad -\frac{d\eta(s)}{ds} \right) \end{cases}$$

Definito il sistema di riferimento $(P(s); t, n)$ i cui assi abbiano orientamento e verso dei versori $\hat{t}(s), \hat{n}(s)$ rispettivamente, allora la risultante $\vec{F}(s)$ della sollecitazione agente sulla sezione in $P(s)$ può essere scritta attraverso le caratteristiche di sollecitazione $T(s), N(s)$ come

$$17.6) \quad \vec{F}(s) = T(s)\hat{n}(s) + N(s)\hat{t}(s) = T(s) \begin{pmatrix} \frac{d\zeta(s)}{ds} \\ -\frac{d\eta(s)}{ds} \end{pmatrix} + N(s) \begin{pmatrix} \frac{d\eta(s)}{ds} \\ \frac{d\zeta(s)}{ds} \end{pmatrix}$$



Il versore normale qui introdotto è quello che si ottiene ruotando in senso orario il versore tangente di $\pi/2$. In base alla teoria delle curve piane si ha allora che sussistono le relazioni

$$17.7) \quad \begin{cases} \frac{d^2\eta(s)}{ds^2} = -K(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \\ \frac{d^2\zeta(s)}{ds^2} = K(s) \frac{d\eta(s)}{ds} \end{cases}$$

dove la funzione $K(s)$ – detta curvatura – è legata al raggio di curvatura dell'asse geometrico $R(s)$ dalla relazione

$$17.8) \quad R(s) = 1/|K(s)|$$

Dalle 17.7 si può dedurre che la curvatura è negativa nei punti in cui l'asse geometrico ha concavità verso il basso, è positiva se la concavità è verso l'alto. Ciò posto imponiamo che il tratto di trave sia in equilibrio meccanico, ovvero imponiamo che sia soddisfatto il sistema della statica. Per l'equilibrio alla traslazione, proiettando l'equazione vettoriale sugli assi η, ζ , abbiamo

$$\begin{cases} -T(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} - N(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds} + q(s - s_0) + T(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\eta(s)}{ds} = 0 \\ T(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds} - N(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} - p(s - s_0) - T(s) \frac{d\eta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$17.9) \quad \begin{cases} -T(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} - N(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds} + q(s - s_0) + T(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\eta(s)}{ds} = 0 \\ T(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds} - N(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} - p(s - s_0) - T(s) \frac{d\eta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} = 0 \end{cases}$$

dove si è considerato che in $s = s_0$ il valore delle caratteristiche di sollecitazione relative alla faccia che guarda a sinistra, sono ottenute cambiando di segno quelle in 17.6. Per l'equilibrio dei momenti –valutando il momento totale rispetto all'origine delle ascisse curvilinee – si ha invece

$$17.10) -M(s_0) + \int_{\gamma} m ds - \int_{\gamma} p\eta(s) ds - \int_{\gamma} q\zeta(s) ds + T(s) \left(-\eta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \right) + N(s) \left(\eta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} \right) + M(s) = 0$$

dove si è considerato che

$$\begin{aligned} \vec{F}(s) \times \overrightarrow{PO} &= \overrightarrow{OP} \times \vec{F}(s) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & \eta(s) & \zeta(s) \\ 0 & T(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\eta(s)}{ds} & -T(s) \frac{d\eta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \end{vmatrix} = \\ &= T(s) \left(-\eta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \right) + N(s) \left(\eta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} \right) \end{aligned}$$

Valutando gli integrali curvilinei si ha

$$17.11) M(s) - M(s_0) + m(s - s_0) - p \int_{s_0}^s \eta(\sigma) d\sigma - q \int_{s_0}^s \zeta(\sigma) d\sigma + T(s) \left(-\eta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \right) + N(s) \left(\eta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} \right) = 0$$

Derivando in s la **17.11** si ha

$$\begin{aligned} \frac{dM(s)}{ds} + m - p\eta(s) - q\zeta(s) + \frac{dT(s)}{ds} \left(-\eta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \right) + \\ + T(s) \left(-\left(\frac{d\eta(s)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d\zeta(s)}{ds} \right)^2 - \eta(s) \frac{d^2\eta(s)}{ds^2} - \zeta(s) \frac{d^2\zeta(s)}{ds^2} \right) + \\ + \frac{dN(s)}{ds} \left(\eta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} \right) + N(s) \left(\frac{d\eta(s)}{ds} \frac{d\zeta(s)}{ds} - \frac{d\zeta(s)}{ds} \frac{d\eta(s)}{ds} + \eta(s) \frac{d^2\zeta(s)}{ds^2} - \zeta(s) \frac{d^2\eta(s)}{ds^2} \right) \end{aligned}$$

Si consideri – per l'ultima parentesi – che

$$\frac{d\eta(s)}{ds} \frac{d\zeta(s)}{ds} - \frac{d\zeta(s)}{ds} \frac{d\eta(s)}{ds} = \hat{t} \cdot \hat{n} = 0$$

In $s = s_0$ si ha dunque

$$\frac{dM(s)}{ds} + m - T(s) \left(\left(\frac{d\eta(s)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta(s)}{ds} \right)^2 \right) = 0$$

e considerando che in parentesi si ha il modulo del versore tangente, si ottiene

$$17.12) \frac{dM(s)}{ds} + m - T(s) = 0$$

Dividendo ambo i membri per $(s - s_0)$ la prima delle **17.9** si scrive

$$\frac{T(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - T(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds}}{s - s_0} + \frac{N(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - N(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds}}{s - s_0} + q = 0$$

Mandando al limite per $(s - s_0) \rightarrow 0$ si ha

$$d \left. \frac{T(s) \frac{d\zeta(s)}{ds}}{ds} \right|_{s=s_0} + d \left. \frac{N(s) \frac{d\eta(s)}{ds}}{ds} \right|_{s=s_0} + q = 0$$

e calcolando le derivate

$$17.13) \frac{dT(s_0)}{ds} \frac{d\zeta(s_0)}{ds} + T(s_0) \frac{d^2\zeta(s_0)}{ds^2} + \frac{dN(s_0)}{ds} \frac{d\eta(s_0)}{ds} + N(s_0) \frac{d^2\eta(s_0)}{ds^2} + q = 0$$

Sostituendo le **17.7** nella **17.13** si ha

$$17.14) \left(-N(s_0)K(s_0) + \frac{dT(s_0)}{ds} \right) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} + \left(\frac{dN(s_0)}{ds} + T(s_0)K(s_0) \right) \frac{d\eta(s_0)}{ds} + q = 0$$

Operando analogamente con la seconda delle **17.9** si ha

$$\frac{T(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds} - T(s) \frac{d\eta(s)}{ds}}{s - s_0} + \frac{N(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - N(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds}}{s - s_0} - p = 0 \Rightarrow$$

$$17.15) d \left. \frac{T(s) \frac{d\eta(s)}{ds}}{ds} \right|_{s=s_0} - d \left. \frac{N(s) \frac{d\zeta(s)}{ds}}{ds} \right|_{s=s_0} + p = 0$$

Calcolando le derivate abbiamo

$$17.16) \frac{dT(s_0)}{ds} \frac{d\eta(s_0)}{ds} + T(s_0) \frac{d^2\eta(s_0)}{ds^2} - \frac{dN(s_0)}{ds} \frac{d\zeta(s_0)}{ds} - N(s_0) \frac{d^2\zeta(s_0)}{ds^2} + p = 0$$

Sostituendovi poi le **17.7** si ha

$$17.17) \left(\frac{dT(s_0)}{ds} - N(s_0)K(s_0) \right) \frac{d\eta(s_0)}{ds} - \left(T(s_0)K(s_0) + \frac{dN(s_0)}{ds} \right) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} + p = 0$$

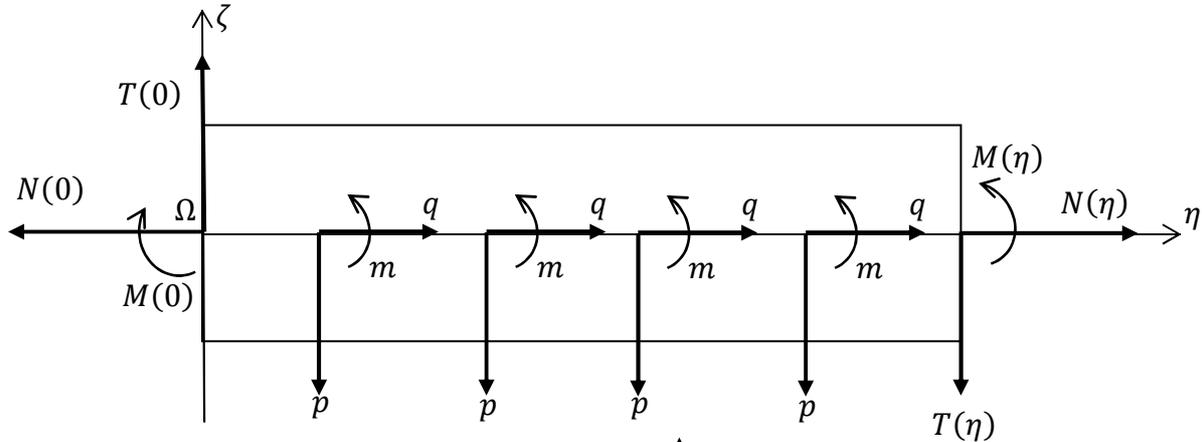
Dunque le equazioni indefinite dell'equilibrio per una trave piana ad asse qualunque – relative al punto individuato dal valore s dell'ascissa curvilinea – si scrivono

$$17.18) \begin{cases} \left(\frac{dT(s)}{ds} - N(s)K(s) \right) \frac{d\eta(s)}{ds} - \left(T(s)K(s) + \frac{dN(s)}{ds} \right) \frac{d\zeta(s)}{ds} + p = 0 \\ \left(\frac{dT(s)}{ds} - N(s)K(s) \right) \frac{d\zeta(s)}{ds} + \left(T(s)K(s) + \frac{dN(s)}{ds} \right) \frac{d\eta(s)}{ds} + q = 0 \\ \frac{dM(s)}{ds} + m - T(s) = 0 \end{cases}$$

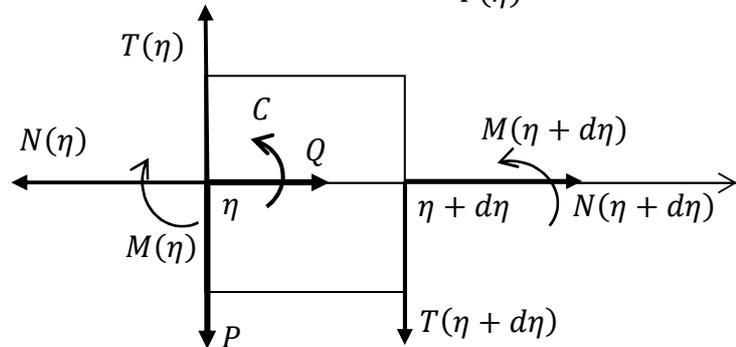
17.4. Equazioni indefinite di equilibrio per trave ad asse rettilineo. Ora particolarezziamo quanto visto nel precedente paragrafo al caso di trave in cui l'asse geometrico è rettilineo. Con riferimento al precedente paragrafo, si consideri che l'asse geometrico coincida con l'asse η : allora si ha

$$17.19) \begin{cases} \frac{d\eta(s)}{ds} = 1 \\ \frac{d\zeta(s)}{ds} = 0 \end{cases} \Rightarrow K(s) = 0$$

e dunque, sostituendo, nelle 17.18 abbiamo



$$17.20) \begin{cases} \frac{dT(\eta)}{d\eta} + p = 0 \\ \frac{dN(\eta)}{d\eta} + q = 0 \\ \frac{dM(\eta)}{d\eta} + m - T(\eta) = 0 \end{cases}$$



Nel caso del carico concentrato in η indicato in figura, isolando il concio il cui asse geometrico va da η a $\eta + d\eta$, l'imposizione dell'equilibrio meccanico porge banalmente

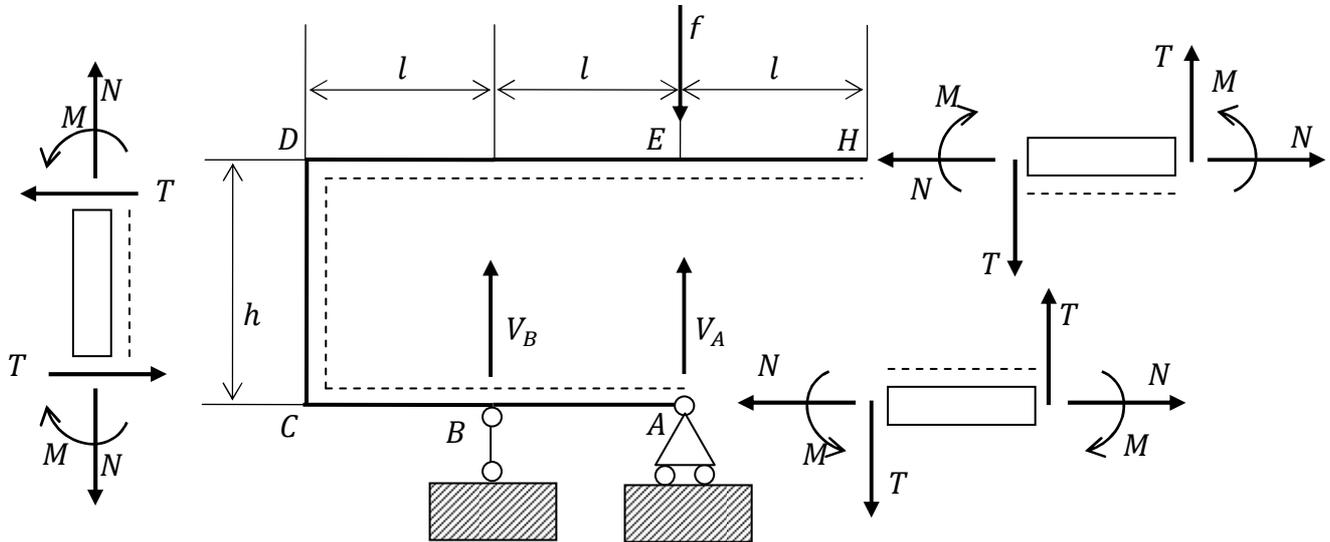
$$17.21) \begin{cases} N(\eta + d\eta) - N(\eta) + Q = 0 \\ T(\eta + d\eta) - T(\eta) + P = 0 \\ M(\eta + d\eta) - M(\eta) + C + Pd\eta - T(\eta)d\eta = 0 \end{cases}$$

17.5. Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione. Nel tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione si devono rispettare le seguenti convenzioni:

- il diagramma del momento si assume positivo dalla parte delle fibre tese;
- se in una trave la parte delle fibre tese dovesse cambiare si può fissare un verso positivo dei momenti – tracciando un tratteggio – e rispettare quello per tutta la lunghezza della trave, anziché seguire la convenzione precedente;
- i diagrammi di N, T si riportano con l'accortezza di porre \oplus dalla parte positiva, oppure – nel caso in cui sia fissato con un tratteggio il verso positivo dei momenti – riportando i valori positivi di N, T dalla parte dei momenti negativi;

Con il seguente esempio dimostro come applicare tutti i concetti introdotti nel presente capitolo al fine del tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

- 1) Traccio un tratteggio lungo tutta la struttura, fissando il verso positivo dei momenti, e quello negativo di N, T . Riporto inoltre dei concetti elementari con le convenzioni sui segni delle caratteristiche della sollecitazione per tutti e tre i tratti rettilinei.
- 2) Al fine di integrare le **17.20** occorre ricavare le reazioni vincolari, che ne costituiscono le condizioni al contorno.



Il sistema della statica porge

$$\begin{cases} V_A + V_B - f = 0 \\ M_A = -V_B l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

dunque abbiamo un sistema staticamente determinato con una struttura labile, che quindi evidentemente è bilanciata dalla sollecitazione esterna.

- 3) Tratto HE . Partendo da H fisso un'asse z_1 su cui integro le **17.20**. Il carico distribuito è nullo, dunque integrando le prime due delle **17.20** si ha

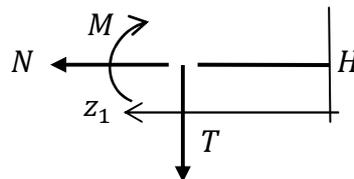
$$17.22) \begin{cases} \frac{dT(z_1)}{dz_1} = 0 \\ \frac{dN(z_1)}{dz_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(z_1) = T(z_1 = 0) \\ N(z_1) = N(z_1 = 0) \end{cases}$$

Sostituendo nella terza delle **17.20**, dove si consideri che la coppia distribuita è nulla, e integrando si ha

$$17.23) \frac{dM(z_1)}{dz_1} = 0 \Rightarrow M(z_1) = M(0)$$

Considerando poi che la sollecitazione esterna agente in H è nulla, si ha $T(0) = N(0) = M(0) = 0$. Dunque in definitiva abbiamo trovato

$$17.24) \begin{cases} T(z_1) = 0 \\ N(z_1) = 0 \\ M(z_1) = 0 \end{cases}$$



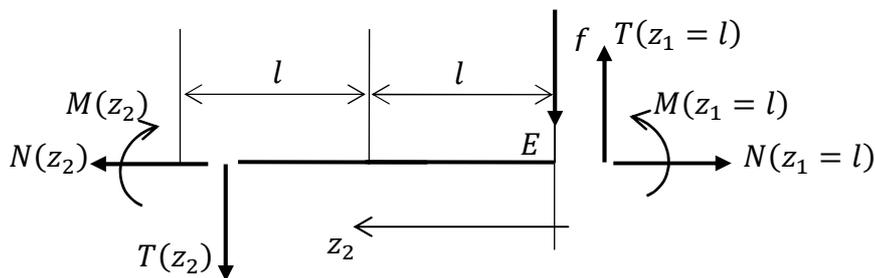
cioè i diagrammi delle tre caratteristiche di sollecitazione – che riporto in fondo all'analisi, sull'asse geometrico stesso della struttura – sono identicamente nulli.

4) Tratto *ED*. Partendo da *E* fisso un'asse coordinato z_2 . Poiché non si ha carico distribuito, ma solo carico concentrato, si può usare il **17.21** che porge

$$17.25) \begin{cases} T(z_2) = T(z_2 = 0) - f = T(z_1 = l) - f = -f \\ N(z_2) = N(z_2 = 0) = N(z_1 = l) = 0 \\ M(z_2) = M(z_2 = 0) - fz_2 + T(z_1 = l)z_2 = -M(z_1 = l) - fz_2 = -fz_2 \end{cases}$$

In realtà possiamo anche integrare le prime due delle **17.20**, considerando il carico concentrato nelle condizioni al contorno. Si ha

$$17.26) \begin{cases} \frac{dT(z_2)}{dz_2} = 0 \\ \frac{dN(z_2)}{dz_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(z_2) = T(z_2 = 0) - f = T(z_1 = l) - f = -f \\ N(z_2) = N(z_2 = 0) = N(z_1 = l) = 0 \end{cases}$$

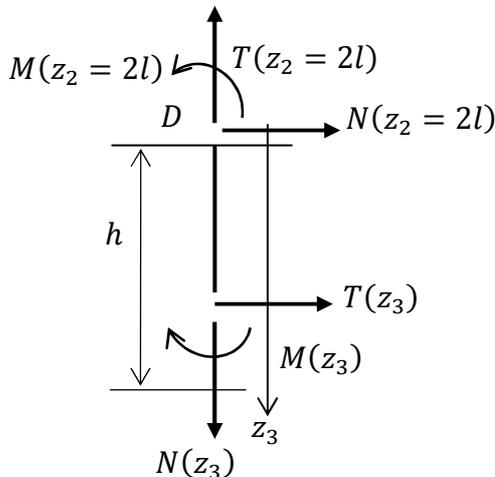


Sostituendo poi la prima delle **17.26** nella terza delle **17.20** si ha

$$17.27) \frac{dM(z_2)}{dz_2} = T(z_2) \Rightarrow M(z_2) = -fz_2 + M(z_2 = 0) = -fz_2 + M(z_1 = l) = -fz_2$$

5) Tratto *DC*. Partendo da *D* introduco l'asse coordinato z_3 . Integrando le prime due del **17.20** con le condizioni iniziali indicate in figura, si ha

$$17.28) \begin{cases} \frac{dT(z_3)}{dz_3} = 0 \\ \frac{dN(z_3)}{dz_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(z_3) = T(z_3 = 0) = -N(z_2 = 2l) = 0 \\ N(z_3) = N(z_3 = 0) = T(z_2 = 2l) = -f \end{cases}$$

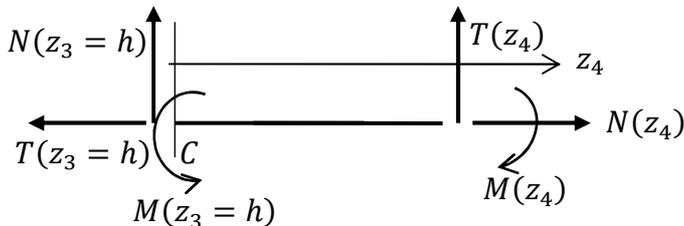


Sostituendo la seconda delle **17.28** nella terza delle **17.20** si ha

$$17.29) \frac{dM(z_3)}{dz_3} = T(z_3) = 0 \Rightarrow M(z_3) = M(z_3 = 0) = M(z_2 = 2l) = -2fl$$

6) Tratto CA. Partendo da C introduco l'asse coordinato z_4 . Le prime due delle 17.20 vanno integrate con le condizioni iniziali indicate in figura, dunque si ha

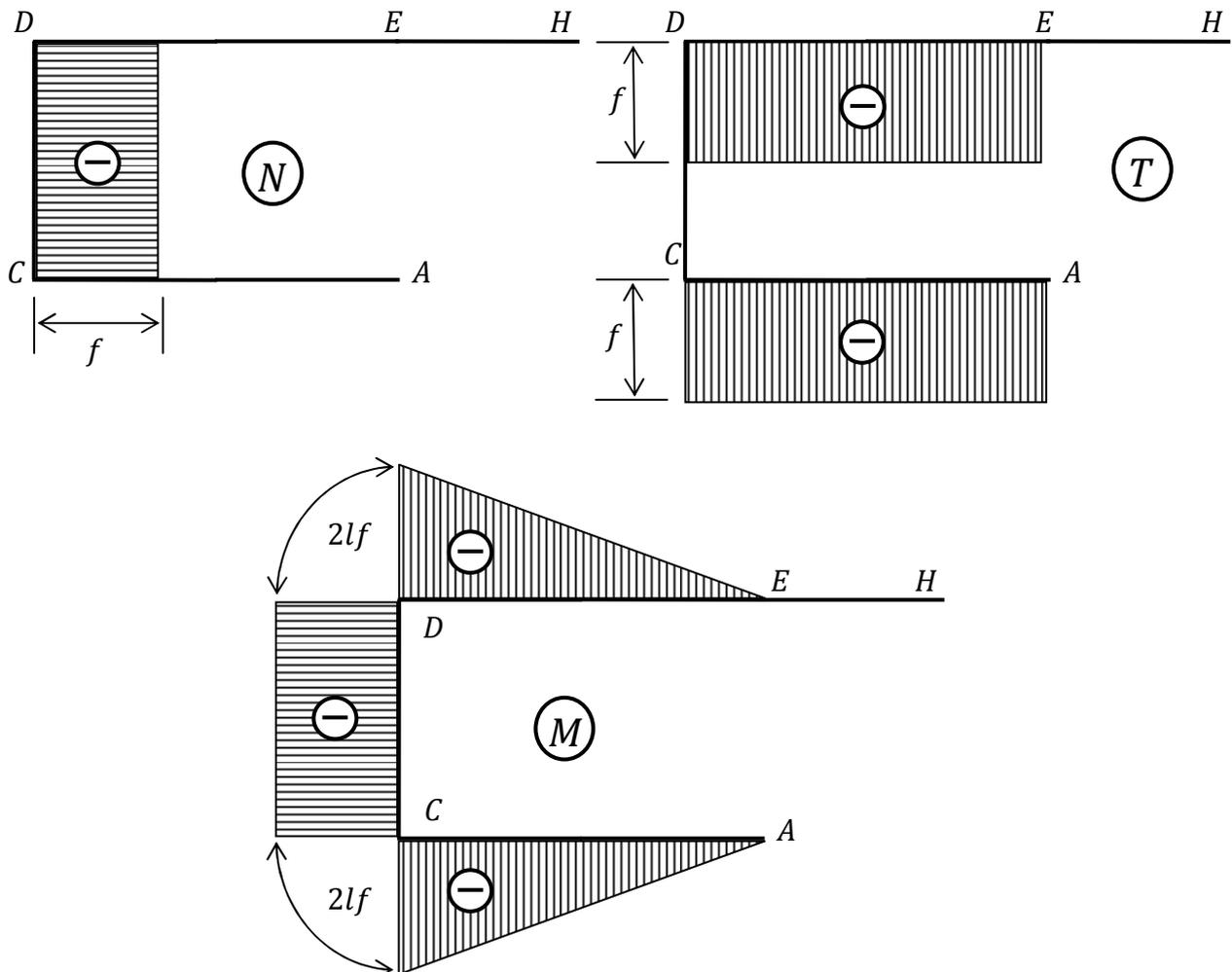
$$17.30) \begin{cases} \frac{dT(z_4)}{dz_4} = 0 \\ \frac{dN(z_4)}{dz_4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(z_4) = T(z_4 = 0) = -N(z_3 = h) = f \\ N(z_4) = N(z_4 = 0) = T(z_3 = h) = 0 \end{cases}$$



Sostituendo la prima delle 17.30 nelle terza delle 17.20 e integrando si ha

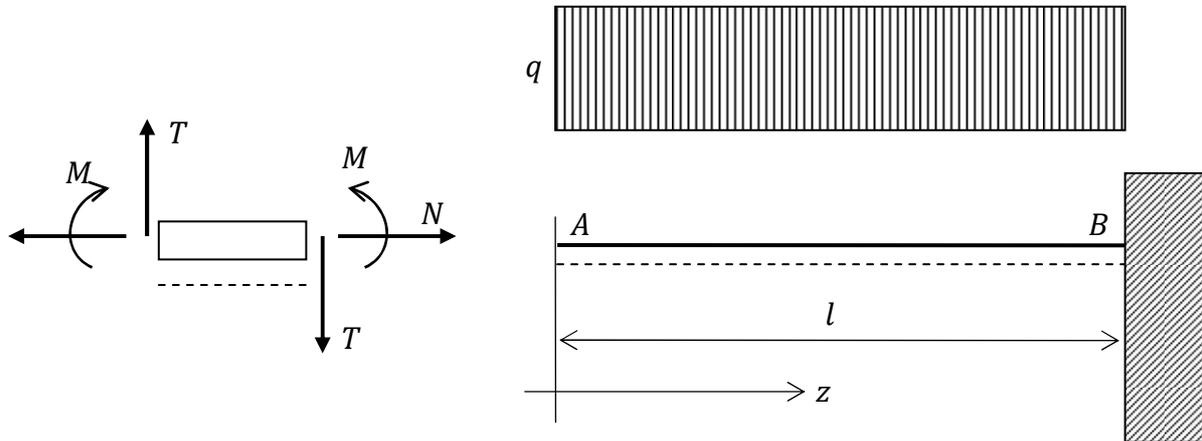
$$17.31) \frac{dM(z_4)}{dz_4} = T(z_4) = f \Rightarrow M(z_4) = fz_4 + M(z_4 = 0) = fz_4 + M(z_3 = h) = f(z_4 - 2l)$$

7) La determinazione dell'andamento delle caratteristiche di sollecitazione lungo la struttura è così completato e le funzioni ottenute possono essere riportate sull'asse geometrico della struttura, secondo le convenzioni indicate nel presente paragrafo. Per chiarezza le tre caratteristiche si riportano separatamente, prima N poi T , in fine M .



17.6. Diagramma parabolico del momento. La terza delle 17.20 ci dice che se il taglio ha andamento lineare, allora il momento ha andamento parabolico. Il tracciamento allora del diagramma del momento allora non è così immediato come nel caso in cui esso abbia andamento lineare (vedi esempio precedente) e torna allora utile illustrare un **metodo pratico per disegnare la parabola** del momento.

Per introdurre questo metodo consideriamo la trave a mensola AB sottoposta a un carico verticale uniforme.

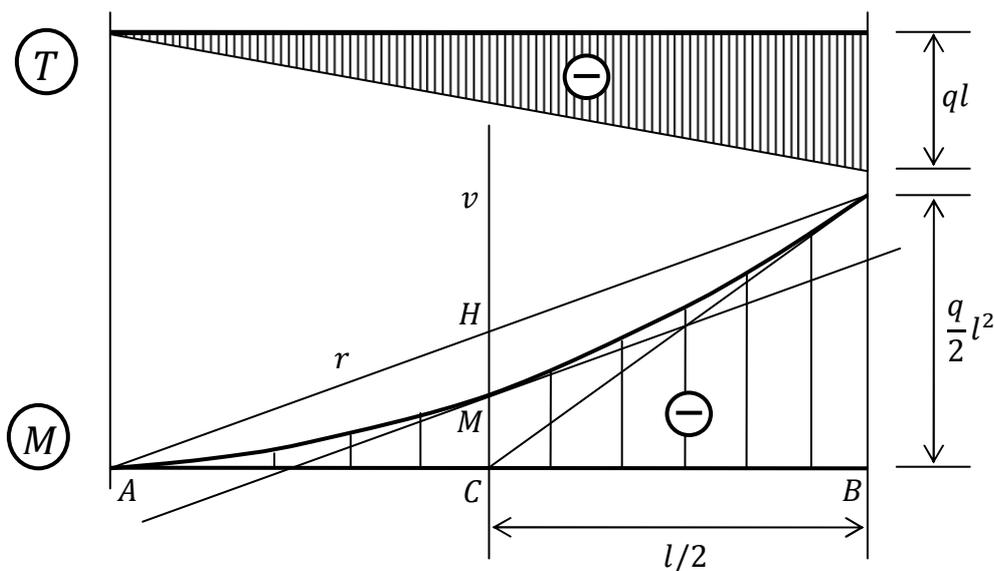


Con le posizioni fatte in figura per l'asse coordinato e per i segni delle caratteristiche di sollecitazione, l'equilibrio meccanico alla traslazione del concio di lunghezza z a partire dall'estremo A , porge per il taglio

$$17.32) \quad qz + T(z) = 0 \Rightarrow T(z) = -qz$$

mentre la componente normale è banalmente nulla; sostituendo poi la 17.32 nella terza delle 17.20 abbiamo

$$17.33) \quad \frac{dM(z)}{dz} = T(z) = -qz \Rightarrow M(z) = -\frac{q}{2}z^2 + M(z=0) = -\frac{q}{2}z^2$$



Tenendo presente la terza delle 17.20 la costruzione della parabola del momento flettente segue il procedimento seguente:

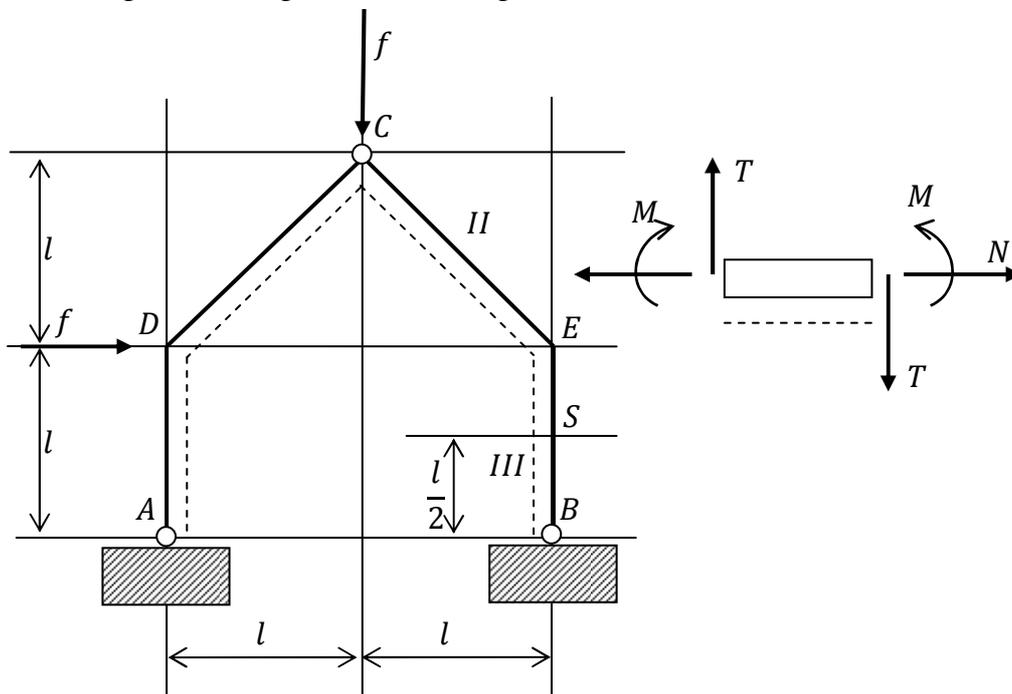
- 1) si tracciano le due tangenti alle estremità A, B della trave, la cui inclinazione è fornita dai valori del taglio alle estremità stesse;
- 2) dall'intersezione C delle tangenti si traccia una linea verticale v che intercetta la retta r in H ;
- 3) il punto medio M di CH è punto della parabola, che vi passa con tangente parallela ad r .

Questo procedimento fornisce tre punti della parabola e le rispettive tangenti, permettendo un suo tracciamento qualitativo.

17.7. Caratteristiche della sollecitazione e PLV. Nel caso in cui si richieda una delle caratteristiche della sollecitazione esclusivamente in un punto di una struttura può essere conveniente ricorrere al procedimento illustrato nei capitoli 15 e 16, ovvero al PLV. In particolare volendo calcolare una caratteristica di sollecitazione in S si segue questo algoritmo:

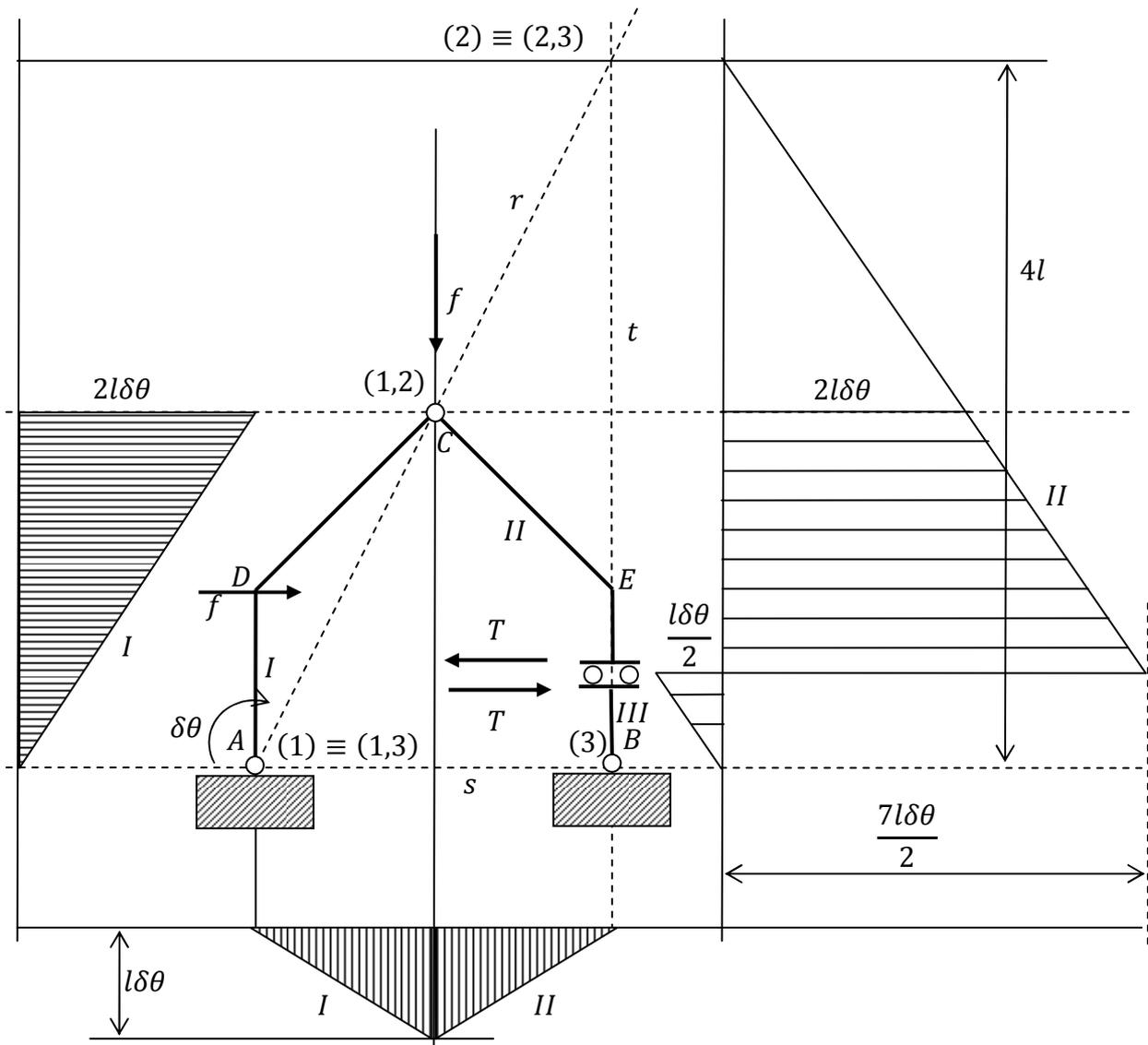
- 1) si sostituisce in S l'incastro interno con un vincolo doppio che lasci libero solo il grado di libertà su cui agisce la caratteristica interna richiesta;
- 2) si introduce la caratteristica interna richiesta come sollecitazione esterna incognita;
- 3) si imprime un opportuno sistema di spostamenti virtuali, valutandolo col metodo delle catene cinematiche, e si calcola il relativo lavoro virtuale;
- 4) imponendo che il lavoro virtuale sia nullo si ha una equazione avente come unica incognita la caratteristica interna richiesta.

Il sistema che si ottiene con il punto due dovrebbe essere un sistema con struttura labile, che possa però essere bilanciato dalla sollecitazione esterna. Per esemplificare tutto ciò si consideri il sistema piano indicato in figura, e si voglia ricavare il taglio in S .



Si noti anzitutto che per i nostri scopi non è richiesto il calcolo delle reazioni vincolari, infatti esse sono a lavoro nullo, e dunque non concorrono nella determinazione della espressione del lavoro virtuale. Si procede allora a 'tagliare' in S la struttura, a inserire ivi un carrello a scorrimento orizzontale, e una forza esterna orizzontale T con verso concorde a quello del positivo del taglio. Si procede quindi con il metodo delle catene cinematiche per ricavare i c.d.i.r. e quindi il sistema di spostamenti virtuali. Per i c.d.i.r. si osserva che

- (1) coincide con il centro A della cerniera;
- (1,2) coincide con il centro della cerniera in C ;
- (2) si trova sulla retta r per (1) e (1,2) in base al secondo teorema di Aronhold-Kennedy;
- (3) coincide con il centro B della cerniera;
- (1,3) deve trovarsi sulla retta s per il 2° di A-K applicato a I, III ;
- (2,3) deve trovarsi sulla retta t per via del tipo di vincolo che li congiunge;
- poiché (3) e (2,3) si trovano entrambi su t , segue che anche (2) si trova su t , per il 2° di A-K, dunque (2) cade sull'intersezione fra r e t ;
- per ubicare (2,3) su t e (1,3) su s ricorriamo al 1° di A-K applicato ai tre corpi rigidi che costituiscono la struttura, concludendo che l'unico modo per allinearli è quello di far coincidere (2,3) con (2) e (1,3) con (1).



Ora che i c.d.i.r. sono ubicati imprimiamo una rotazione oraria $\delta\theta$ in A e valutiamo il relativo sistema di spostamenti virtuali. A tale scopo si consideri che, mentre le cerniere interne trasmettono gli spostamenti da un corpo rigido all'altro, il carrello interno trasmette la rotazione e la componente dello spostamento ortogonale alla retta di scorrimento.

Con il sistema di spostamenti virtuali indicato in figura il lavoro virtuale esterno si scrive

$$17.34) L_{ve} = fl\delta\theta + fl\delta\theta - T \frac{7l\delta\theta}{2} - T \frac{l\delta\theta}{2} = 2fl\delta\theta - T4l\delta\theta$$

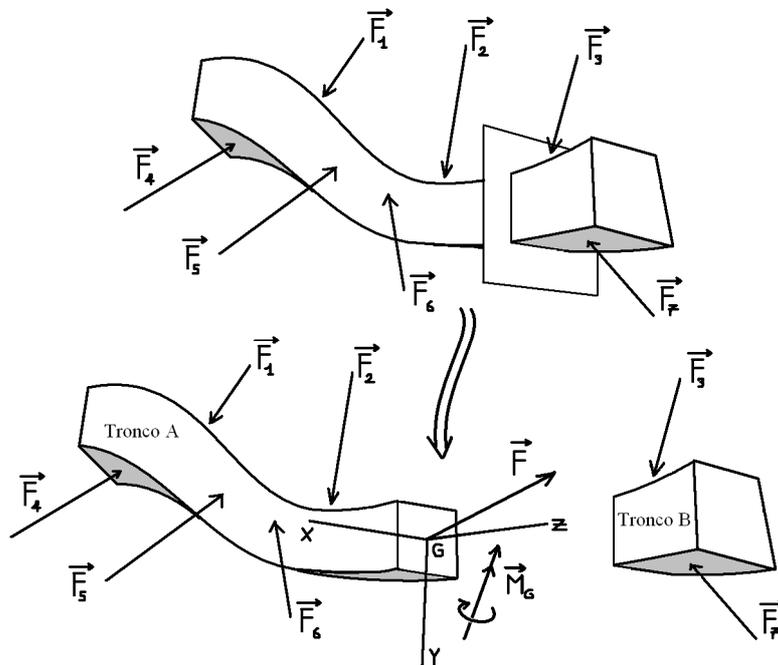
Il taglio T deve essere in grado di garantire l'equilibrio meccanico della struttura, quindi per il PLV esso si ottiene imponendo l'annullamento del lavoro virtuale **17.34**, condizione che porge

$$17.35) T = f/2$$

Capitolo 17. Caratteristiche di sollecitazione

In questo capitolo introduco degli enti, con dimensione di sforzo e di momento, in grado di definire lo stato tensionale della generica sezione della trave. Si tratta di 6 parametri dinamici (3 componenti di sforzo e tre componenti di momento) i quali prendono il nome di **caratteristiche della sollecitazione**. Spesso le caratteristiche della sollecitazione prendono il nome di **componenti delle azioni interne**.

17.1. Caratteristiche della sollecitazione, caso generale. Seziono idealmente una trave in due tronchi (vedi figura). Affinché il tronco *A* sia in equilibrio, la sollecitazione che il tronco *B* esercita su di esso deve equilibrare la sollecitazione esterna agente sul tronco *A*. Se \vec{F} è la risultante della sollecitazione esercitata da *B* su *A*, e \vec{M}_G è il momento totale rispetto al baricentro *G* della sezione, allora tale sollecitazione è equivalente alla forza \vec{F} applicata in *G* e a una coppia di momento \vec{M}_G .



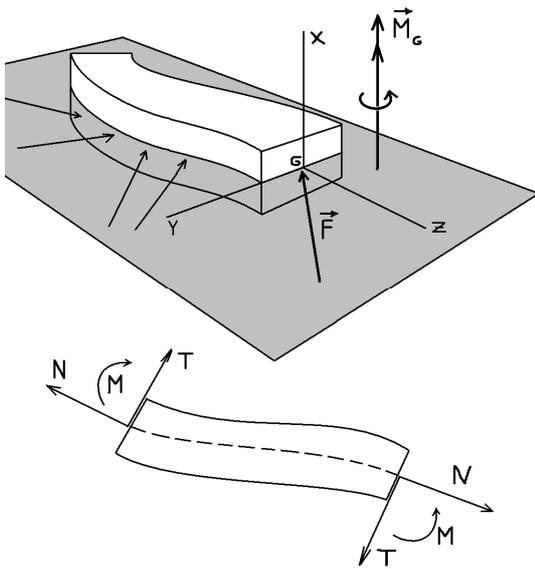
Se fissiamo una terna $(G; x, y, z)$ tale che l'asse *z* sia ortogonale alla sezione in *G* e gli assi *x, y* individuino due direzioni centrali di inerzia della sezione, sul piano della sezione stessa, allora le componenti della sollecitazione equivalente di cui sopra rispetto questa terna prendono il nome di **caratteristiche della sollecitazione**. In particolare si pongono le definizioni seguenti:

$$17.1) \begin{cases} M_{Gx}, M_{Gy}: \text{momenti flettenti} \\ M_{Gz}: \text{momento torcente} \\ F_x, F_y: \text{componenti di taglio} \\ F_z: \text{componente normale} \end{cases}$$

La simbologia comunemente in uso per le caratteristiche della sollecitazione è poi quella seguente

$$17.2) \begin{matrix} M_x = M_{Gx} & M_y = M_{Gy} & M_z = M_{Gz} \\ T_x \triangleq F_x & T_y \triangleq F_y & N \triangleq F_z \end{matrix}$$

17.2. Caratteristiche della sollecitazione per trave piana. Nel caso di travi piane la sollecitazione è piana e dunque la risultante agente sulla sezione è parallela al piano della trave, mentre il momento totale risulta ortogonale al piano della trave. Nel caso di trave piana si adotta il seguente sistema di riferimento per proiettare la sollecitazione agente sulla sezione:



- l'asse z lo si prende anche in questo caso ortogonale alla sezione nel punto G ;
- l'asse y lo si prende giacente sul piano, venendo così a coincidere con una direzione centrale di inerzia della sezione; per il verso dell'asse y (e quindi quello dell'asse x) si osservano le convenzioni indicate in figura, dove sono segnati i versi positivi per le caratteristiche di sollecitazione, cioè i versi positivi degli assi del sistema di riferimento.

Per quanto riguarda la simbologia la **17.2** si adatta al

caso piano nel modo seguente

$$17.3) \quad \begin{aligned} M &\triangleq M_{Gx} \\ T &\triangleq F_y \quad N \triangleq F_z \end{aligned}$$

17.3. Equazioni indefinite di equilibrio per trave piana ad asse qualunque. Consideriamo travi ad asse piano qualunque con sollecitazione distribuita con continuità lungo l'asse geometrico e sia

- q è la componente orizzontale costante del carico distribuito (forza su unità di lunghezza);
- p è la componente verticale costante del carico distribuito (forza su unità di lunghezza);
- m è la coppia distribuita (forza);
- s è l'ascissa curvilinea fissata sull'asse geometrico;
- $R(s)$ è il raggio di curvatura dell'asse geometrico in funzione dell'ascissa curvilinea.

Si consideri la trave piana ad asse curvilineo indicata in figura, e sia

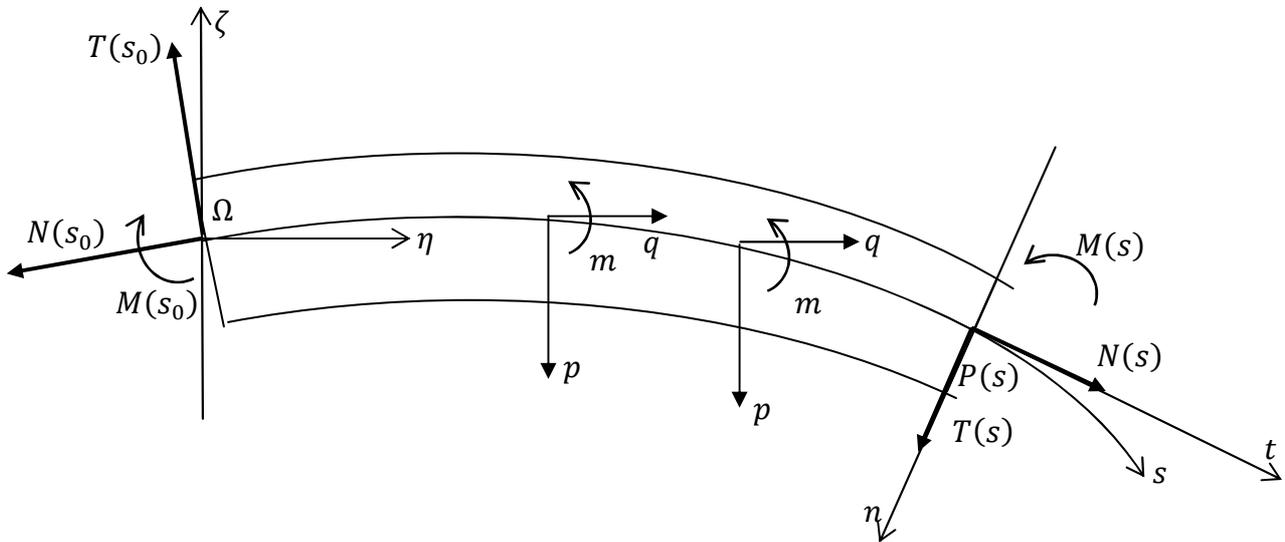
$$17.4) \quad \begin{cases} \eta = \eta(s) \\ \zeta = \zeta(s) \end{cases}$$

l'equazione parametrica del suo asse geometrico in funzione dell'ascissa curvilinea, rispetto al sistema di riferimento $(\Omega; \eta, \zeta)$. Allora l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione può essere espresso in funzione del versore tangente $\hat{t}(s)$ e del versore normale $\hat{n}(s)$ i quali sono dati da

$$17.5) \quad \begin{cases} \hat{t}(s) = \left(\frac{d\eta(s)}{ds} \quad \frac{d\zeta(s)}{ds} \right) \\ \hat{n}(s) = \left(\frac{d\zeta(s)}{ds} \quad -\frac{d\eta(s)}{ds} \right) \end{cases}$$

Definito il sistema di riferimento $(P(s); t, n)$ i cui assi abbiano orientamento e verso dei versori $\hat{t}(s), \hat{n}(s)$ rispettivamente, allora la risultante $\vec{F}(s)$ della sollecitazione agente sulla sezione in $P(s)$ può essere scritta attraverso le caratteristiche di sollecitazione $T(s), N(s)$ come

$$17.6) \quad \vec{F}(s) = T(s)\hat{n}(s) + N(s)\hat{t}(s) = T(s) \begin{pmatrix} \frac{d\zeta(s)}{ds} \\ -\frac{d\eta(s)}{ds} \end{pmatrix} + N(s) \begin{pmatrix} \frac{d\eta(s)}{ds} \\ \frac{d\zeta(s)}{ds} \end{pmatrix}$$



Il versore normale qui introdotto è quello che si ottiene ruotando in senso orario il versore tangente di $\pi/2$. In base alla teoria delle curve piane si ha allora che sussistono le relazioni

$$17.7) \quad \begin{cases} \frac{d^2\eta(s)}{ds^2} = -K(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \\ \frac{d^2\zeta(s)}{ds^2} = K(s) \frac{d\eta(s)}{ds} \end{cases}$$

dove la funzione $K(s)$ – detta curvatura – è legata al raggio di curvatura dell'asse geometrico $R(s)$ dalla relazione

$$17.8) \quad R(s) = 1/|K(s)|$$

Dalle 17.7 si può dedurre che la curvatura è negativa nei punti in cui l'asse geometrico ha concavità verso il basso, è positiva se la concavità è verso l'alto. Ciò posto imponiamo che il tratto di trave sia in equilibrio meccanico, ovvero imponiamo che sia soddisfatto il sistema della statica. Per l'equilibrio alla traslazione, proiettando l'equazione vettoriale sugli assi η, ζ , abbiamo

$$\begin{cases} -T(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} - N(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds} + q(s - s_0) + T(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\eta(s)}{ds} = 0 \\ T(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds} - N(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} - p(s - s_0) - T(s) \frac{d\eta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$17.9) \quad \begin{cases} -T(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} - N(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds} + q(s - s_0) + T(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\eta(s)}{ds} = 0 \\ T(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds} - N(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} - p(s - s_0) - T(s) \frac{d\eta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} = 0 \end{cases}$$

dove si è considerato che in $s = s_0$ il valore delle caratteristiche di sollecitazione relative alla faccia che guarda a sinistra, sono ottenute cambiando di segno quelle in 17.6. Per l'equilibrio dei momenti –valutando il momento totale rispetto all'origine delle ascisse curvilinee – si ha invece

$$17.10) -M(s_0) + \int_{\gamma} m ds - \int_{\gamma} p\eta(s)ds - \int_{\gamma} q\zeta(s)ds + T(s) \left(-\eta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \right) + N(s) \left(\eta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} \right) + M(s) = 0$$

dove si è considerato che

$$\begin{aligned} \vec{F}(s) \times \overrightarrow{PO} &= \overrightarrow{OP} \times \vec{F}(s) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & \eta(s) & \zeta(s) \\ 0 & T(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\eta(s)}{ds} & -T(s) \frac{d\eta(s)}{ds} + N(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \end{vmatrix} = \\ &= T(s) \left(-\eta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \right) + N(s) \left(\eta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} \right) \end{aligned}$$

Valutando gli integrali curvilinei si ha

$$17.11) M(s) - M(s_0) + m(s - s_0) - p \int_{s_0}^s \eta(\sigma) d\sigma - q \int_{s_0}^s \zeta(\sigma) d\sigma + T(s) \left(-\eta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \right) + N(s) \left(\eta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} \right) = 0$$

Derivando in s la **17.11** si ha

$$\begin{aligned} &\frac{dM(s)}{ds} + m - p\eta(s) - q\zeta(s) + \frac{dT(s)}{ds} \left(-\eta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} \right) + \\ &\quad + T(s) \left(-\left(\frac{d\eta(s)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d\zeta(s)}{ds} \right)^2 - \eta(s) \frac{d^2\eta(s)}{ds^2} - \zeta(s) \frac{d^2\zeta(s)}{ds^2} \right) + \\ &\quad + \frac{dN(s)}{ds} \left(\eta(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - \zeta(s) \frac{d\eta(s)}{ds} \right) + N(s) \left(\frac{d\eta(s)}{ds} \frac{d\zeta(s)}{ds} - \frac{d\zeta(s)}{ds} \frac{d\eta(s)}{ds} + \eta(s) \frac{d^2\zeta(s)}{ds^2} - \zeta(s) \frac{d^2\eta(s)}{ds^2} \right) \end{aligned}$$

Si consideri – per l'ultima parentesi – che

$$\frac{d\eta(s)}{ds} \frac{d\zeta(s)}{ds} - \frac{d\zeta(s)}{ds} \frac{d\eta(s)}{ds} = \hat{t} \cdot \hat{n} = 0$$

In $s = s_0$ si ha dunque

$$\frac{dM(s)}{ds} + m - T(s) \left(\left(\frac{d\eta(s)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta(s)}{ds} \right)^2 \right) = 0$$

e considerando che in parentesi si ha il modulo del versore tangente, si ottiene

$$17.12) \frac{dM(s)}{ds} + m - T(s) = 0$$

Dividendo ambo i membri per $(s - s_0)$ la prima delle **17.9** si scrive

$$\frac{T(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - T(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds}}{s - s_0} + \frac{N(s) \frac{d\eta(s)}{ds} - N(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds}}{s - s_0} + q = 0$$

Mandando al limite per $(s - s_0) \rightarrow 0$ si ha

$$d \left. \frac{T(s) \frac{d\zeta(s)}{ds}}{ds} \right|_{s=s_0} + d \left. \frac{N(s) \frac{d\eta(s)}{ds}}{ds} \right|_{s=s_0} + q = 0$$

e calcolando le derivate

$$17.13) \frac{dT(s_0)}{ds} \frac{d\zeta(s_0)}{ds} + T(s_0) \frac{d^2\zeta(s_0)}{ds^2} + \frac{dN(s_0)}{ds} \frac{d\eta(s_0)}{ds} + N(s_0) \frac{d^2\eta(s_0)}{ds^2} + q = 0$$

Sostituendo le **17.7** nella **17.13** si ha

$$17.14) \left(-N(s_0)K(s_0) + \frac{dT(s_0)}{ds} \right) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} + \left(\frac{dN(s_0)}{ds} + T(s_0)K(s_0) \right) \frac{d\eta(s_0)}{ds} + q = 0$$

Operando analogamente con la seconda delle **17.9** si ha

$$\frac{T(s_0) \frac{d\eta(s_0)}{ds} - T(s) \frac{d\eta(s)}{ds}}{s - s_0} + \frac{N(s) \frac{d\zeta(s)}{ds} - N(s_0) \frac{d\zeta(s_0)}{ds}}{s - s_0} - p = 0 \Rightarrow$$

$$17.15) d \left. \frac{T(s) \frac{d\eta(s)}{ds}}{ds} \right|_{s=s_0} - d \left. \frac{N(s) \frac{d\zeta(s)}{ds}}{ds} \right|_{s=s_0} + p = 0$$

Calcolando le derivate abbiamo

$$17.16) \frac{dT(s_0)}{ds} \frac{d\eta(s_0)}{ds} + T(s_0) \frac{d^2\eta(s_0)}{ds^2} - \frac{dN(s_0)}{ds} \frac{d\zeta(s_0)}{ds} - N(s_0) \frac{d^2\zeta(s_0)}{ds^2} + p = 0$$

Sostituendovi poi le **17.7** si ha

$$17.17) \left(\frac{dT(s_0)}{ds} - N(s_0)K(s_0) \right) \frac{d\eta(s_0)}{ds} - \left(T(s_0)K(s_0) + \frac{dN(s_0)}{ds} \right) \frac{d\zeta(s_0)}{ds} + p = 0$$

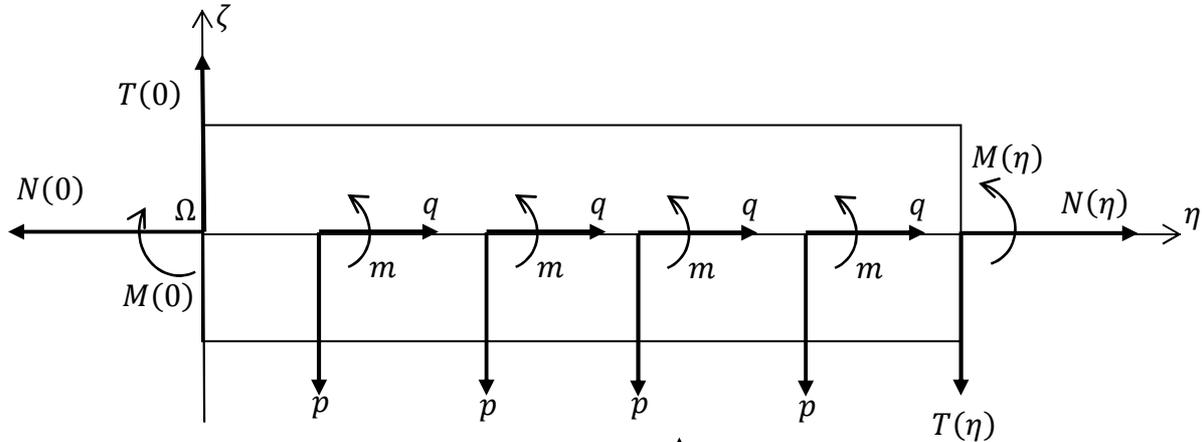
Dunque le equazioni indefinite dell'equilibrio per una trave piana ad asse qualunque – relative al punto individuato dal valore s dell'ascissa curvilinea – si scrivono

$$17.18) \begin{cases} \left(\frac{dT(s)}{ds} - N(s)K(s) \right) \frac{d\eta(s)}{ds} - \left(T(s)K(s) + \frac{dN(s)}{ds} \right) \frac{d\zeta(s)}{ds} + p = 0 \\ \left(\frac{dT(s)}{ds} - N(s)K(s) \right) \frac{d\zeta(s)}{ds} + \left(T(s)K(s) + \frac{dN(s)}{ds} \right) \frac{d\eta(s)}{ds} + q = 0 \\ \frac{dM(s)}{ds} + m - T(s) = 0 \end{cases}$$

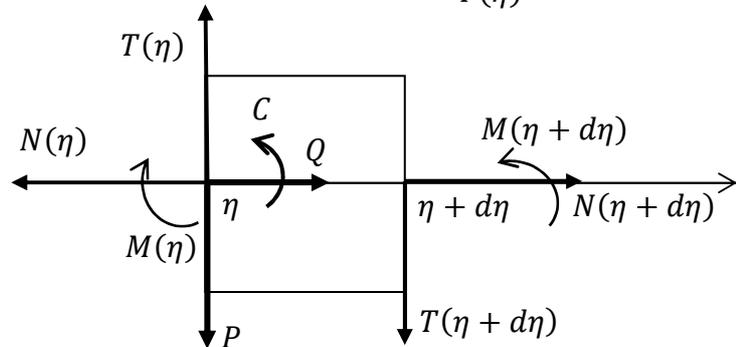
17.4. Equazioni indefinite di equilibrio per trave ad asse rettilineo. Ora particolarezziamo quanto visto nel precedente paragrafo al caso di trave in cui l'asse geometrico è rettilineo. Con riferimento al precedente paragrafo, si consideri che l'asse geometrico coincida con l'asse η : allora si ha

$$17.19) \begin{cases} \frac{d\eta(s)}{ds} = 1 \\ \frac{d\zeta(s)}{ds} = 0 \end{cases} \Rightarrow K(s) = 0$$

e dunque, sostituendo, nelle 17.18 abbiamo



$$17.20) \begin{cases} \frac{dT(\eta)}{d\eta} + p = 0 \\ \frac{dN(\eta)}{d\eta} + q = 0 \\ \frac{dM(\eta)}{d\eta} + m - T(\eta) = 0 \end{cases}$$



Nel caso del carico concentrato in η indicato in figura, isolando il concio il cui asse geometrico va da η a $\eta + d\eta$, l'imposizione dell'equilibrio meccanico porge banalmente

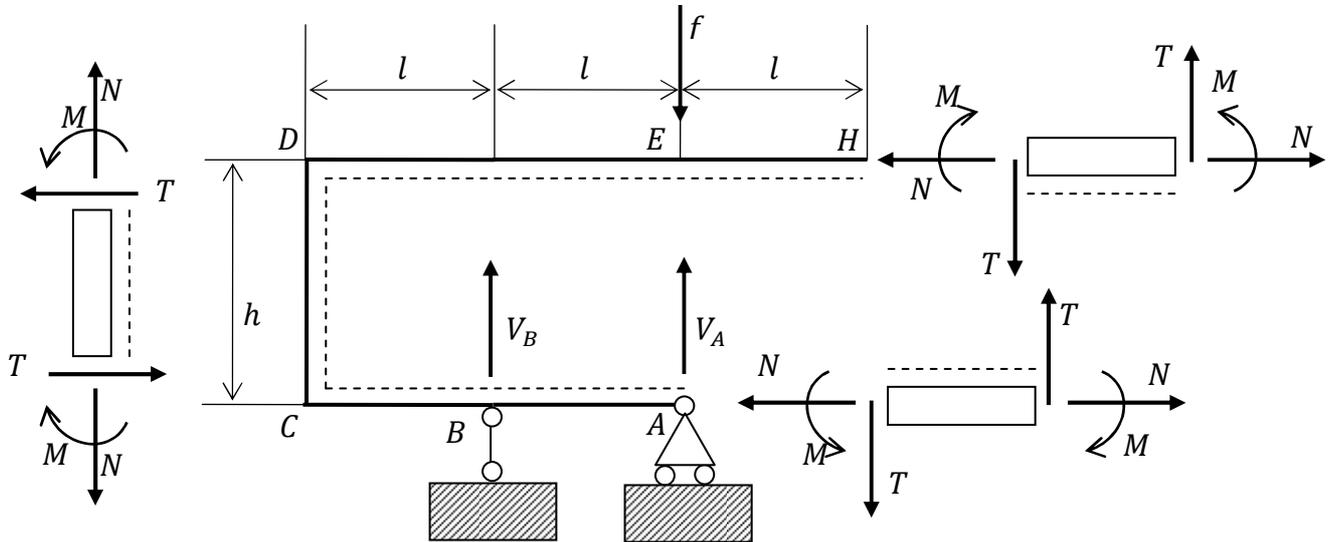
$$17.21) \begin{cases} N(\eta + d\eta) - N(\eta) + Q = 0 \\ T(\eta + d\eta) - T(\eta) + P = 0 \\ M(\eta + d\eta) - M(\eta) + C + Pd\eta - T(\eta)d\eta = 0 \end{cases}$$

17.5. Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione. Nel tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione si devono rispettare le seguenti convenzioni:

- il diagramma del momento si assume positivo dalla parte delle fibre tese;
- se in una trave la parte delle fibre tese dovesse cambiare si può fissare un verso positivo dei momenti – tracciando un tratteggio – e rispettare quello per tutta la lunghezza della trave, anziché seguire la convenzione precedente;
- i diagrammi di N, T si riportano con l'accortezza di porre \oplus dalla parte positiva, oppure – nel caso in cui sia fissato con un tratteggio il verso positivo dei momenti – riportando i valori positivi di N, T dalla parte dei momenti negativi;

Con il seguente esempio dimostro come applicare tutti i concetti introdotti nel presente capitolo al fine del tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

- 1) Traccio un tratteggio lungo tutta la struttura, fissando il verso positivo dei momenti, e quello negativo di N, T . Riporto inoltre dei concetti elementari con le convenzioni sui segni delle caratteristiche della sollecitazione per tutti e tre i tratti rettilinei.
- 2) Al fine di integrare le **17.20** occorre ricavare le reazioni vincolari, che ne costituiscono le condizioni al contorno.



Il sistema della statica porge

$$\begin{cases} V_A + V_B - f = 0 \\ M_A = -V_B l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

dunque abbiamo un sistema staticamente determinato con una struttura labile, che quindi evidentemente è bilanciata dalla sollecitazione esterna.

- 3) Tratto HE . Partendo da H fisso un'asse z_1 su cui integro le **17.20**. Il carico distribuito è nullo, dunque integrando le prime due delle **17.20** si ha

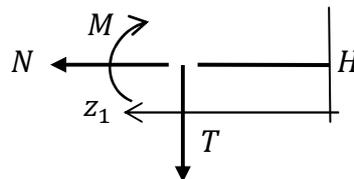
$$17.22) \begin{cases} \frac{dT(z_1)}{dz_1} = 0 \\ \frac{dN(z_1)}{dz_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(z_1) = T(z_1 = 0) \\ N(z_1) = N(z_1 = 0) \end{cases}$$

Sostituendo nella terza delle **17.20**, dove si consideri che la coppia distribuita è nulla, e integrando si ha

$$17.23) \frac{dM(z_1)}{dz_1} = 0 \Rightarrow M(z_1) = M(0)$$

Considerando poi che la sollecitazione esterna agente in H è nulla, si ha $T(0) = N(0) = M(0) = 0$. Dunque in definitiva abbiamo trovato

$$17.24) \begin{cases} T(z_1) = 0 \\ N(z_1) = 0 \\ M(z_1) = 0 \end{cases}$$



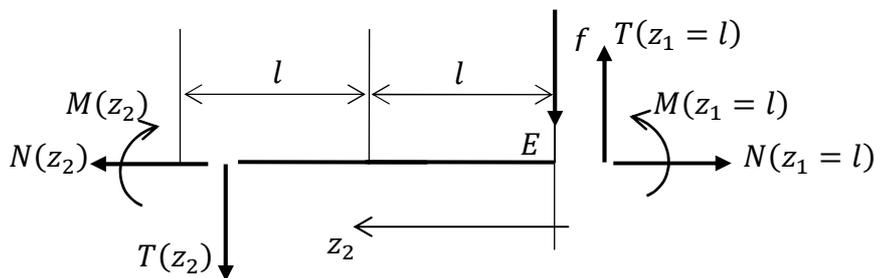
cioè i diagrammi delle tre caratteristiche di sollecitazione – che riporto in fondo all'analisi, sull'asse geometrico stesso della struttura – sono identicamente nulli.

4) Tratto *ED*. Partendo da *E* fisso un'asse coordinato z_2 . Poiché non si ha carico distribuito, ma solo carico concentrato, si può usare il **17.21** che porge

$$17.25) \begin{cases} T(z_2) = T(z_2 = 0) - f = T(z_1 = l) - f = -f \\ N(z_2) = N(z_2 = 0) = N(z_1 = l) = 0 \\ M(z_2) = M(z_2 = 0) - fz_2 + T(z_1 = l)z_2 = -M(z_1 = l) - fz_2 = -fz_2 \end{cases}$$

In realtà possiamo anche integrare le prime due delle **17.20**, considerando il carico concentrato nelle condizioni al contorno. Si ha

$$17.26) \begin{cases} \frac{dT(z_2)}{dz_2} = 0 \\ \frac{dN(z_2)}{dz_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(z_2) = T(z_2 = 0) - f = T(z_1 = l) - f = -f \\ N(z_2) = N(z_2 = 0) = N(z_1 = l) = 0 \end{cases}$$

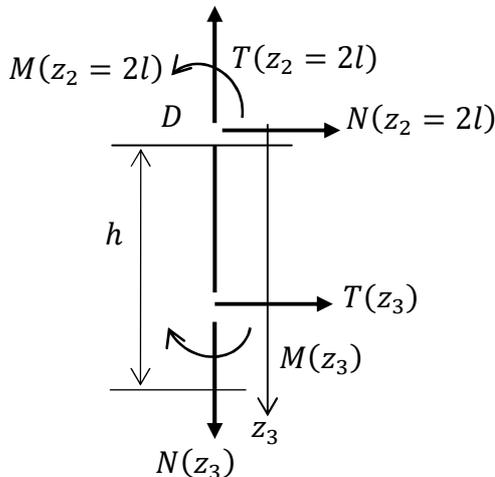


Sostituendo poi la prima delle **17.26** nella terza delle **17.20** si ha

$$17.27) \frac{dM(z_2)}{dz_2} = T(z_2) \Rightarrow M(z_2) = -fz_2 + M(z_2 = 0) = -fz_2 + M(z_1 = l) = -fz_2$$

5) Tratto *DC*. Partendo da *D* introduco l'asse coordinato z_3 . Integrando le prime due del **17.20** con le condizioni iniziali indicate in figura, si ha

$$17.28) \begin{cases} \frac{dT(z_3)}{dz_3} = 0 \\ \frac{dN(z_3)}{dz_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(z_3) = T(z_3 = 0) = -N(z_2 = 2l) = 0 \\ N(z_3) = N(z_3 = 0) = T(z_2 = 2l) = -f \end{cases}$$

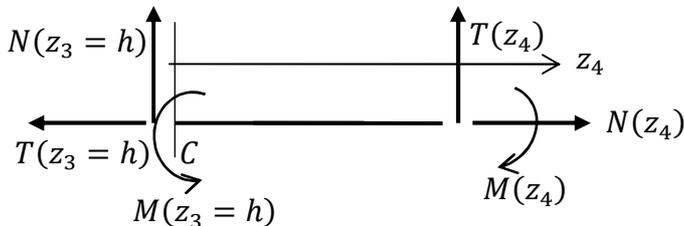


Sostituendo la seconda delle **17.28** nella terza delle **17.20** si ha

$$17.29) \frac{dM(z_3)}{dz_3} = T(z_3) = 0 \Rightarrow M(z_3) = M(z_3 = 0) = M(z_2 = 2l) = -2fl$$

6) Tratto CA. Partendo da C introduco l'asse coordinato z_4 . Le prime due delle 17.20 vanno integrate con le condizioni iniziali indicate in figura, dunque si ha

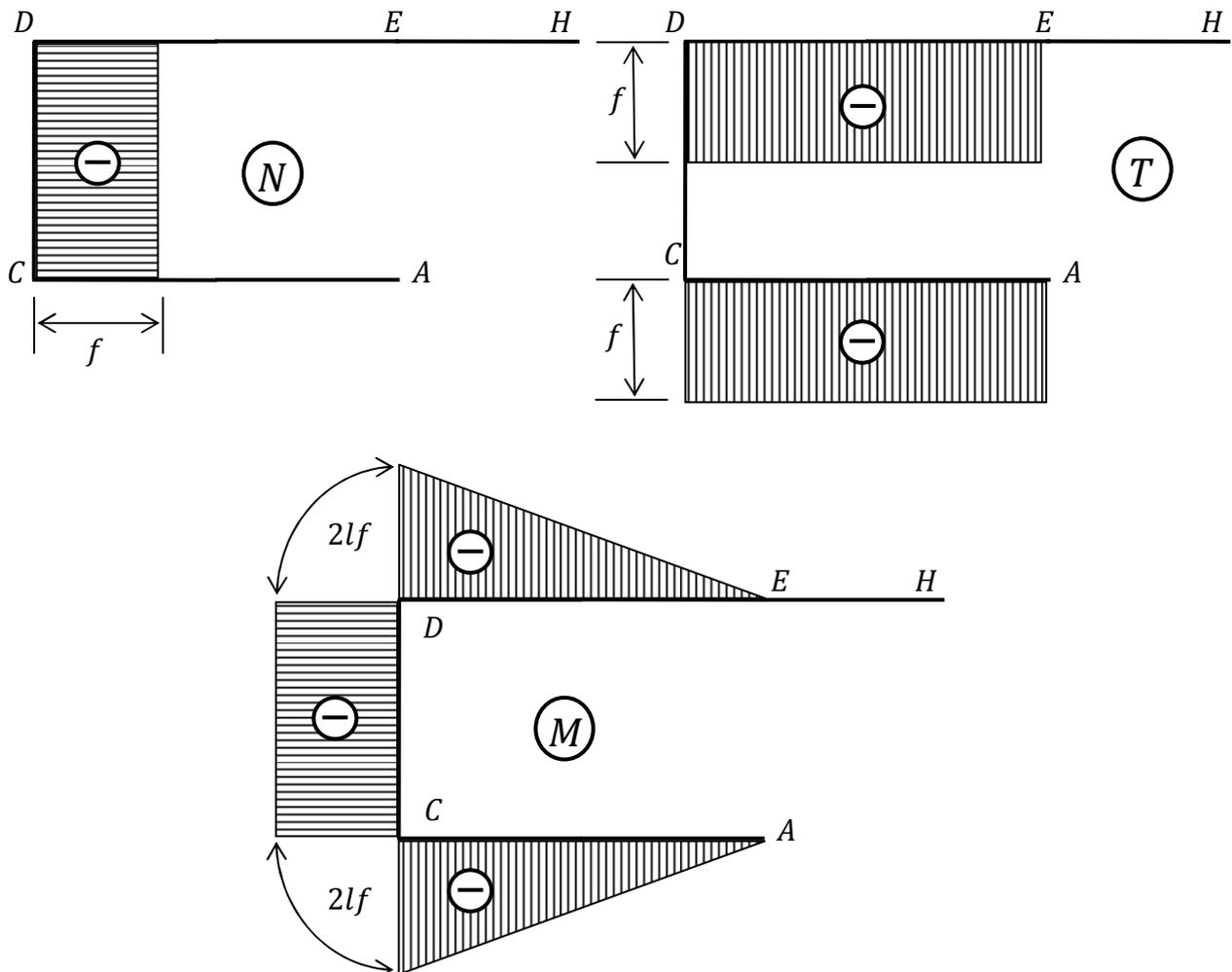
$$17.30) \begin{cases} \frac{dT(z_4)}{dz_4} = 0 \\ \frac{dN(z_4)}{dz_4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(z_4) = T(z_4 = 0) = -N(z_3 = h) = f \\ N(z_4) = N(z_4 = 0) = T(z_3 = h) = 0 \end{cases}$$



Sostituendo la prima delle 17.30 nelle terza delle 17.20 e integrando si ha

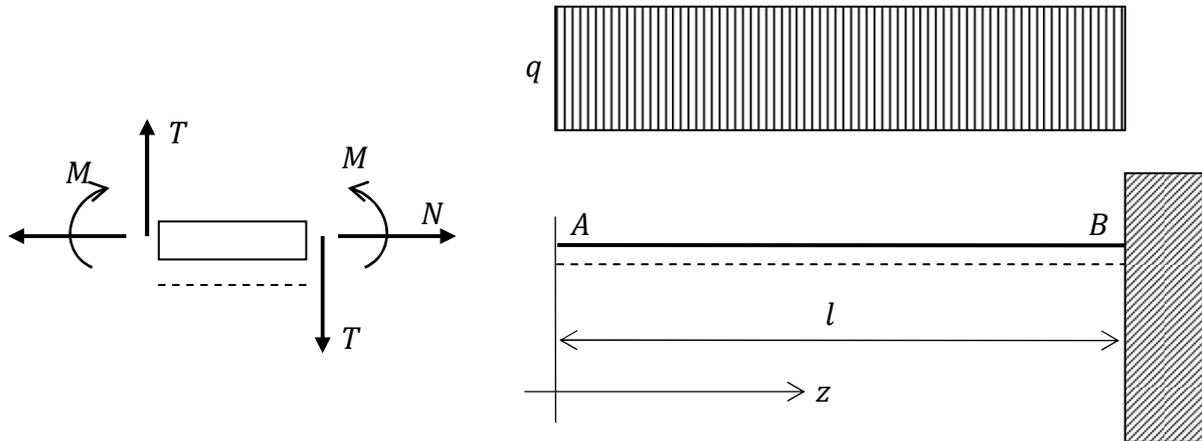
$$17.31) \frac{dM(z_4)}{dz_4} = T(z_4) = f \Rightarrow M(z_4) = fz_4 + M(z_4 = 0) = fz_4 + M(z_3 = h) = f(z_4 - 2l)$$

7) La determinazione dell'andamento delle caratteristiche di sollecitazione lungo la struttura è così completato e le funzioni ottenute possono essere riportate sull'asse geometrico della struttura, secondo le convenzioni indicate nel presente paragrafo. Per chiarezza le tre caratteristiche si riportano separatamente, prima N poi T, in fine M.



17.6. Diagramma parabolico del momento. La terza delle 17.20 ci dice che se il taglio ha andamento lineare, allora il momento ha andamento parabolico. Il tracciamento allora del diagramma del momento allora non è così immediato come nel caso in cui esso abbia andamento lineare (vedi esempio precedente) e torna allora utile illustrare un **metodo pratico per disegnare la parabola** del momento.

Per introdurre questo metodo consideriamo la trave a mensola AB sottoposta a un carico verticale uniforme.

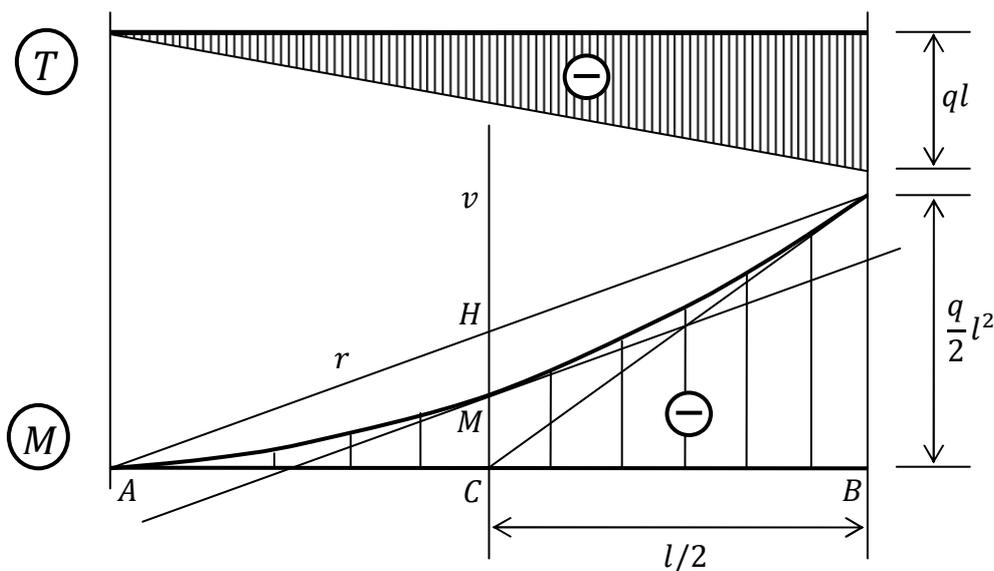


Con le posizioni fatte in figura per l'asse coordinato e per i segni delle caratteristiche di sollecitazione, l'equilibrio meccanico alla traslazione del concio di lunghezza z a partire dall'estremo A , porge per il taglio

$$17.32) \quad qz + T(z) = 0 \Rightarrow T(z) = -qz$$

mentre la componente normale è banalmente nulla; sostituendo poi la 17.32 nella terza delle 17.20 abbiamo

$$17.33) \quad \frac{dM(z)}{dz} = T(z) = -qz \Rightarrow M(z) = -\frac{q}{2}z^2 + M(z=0) = -\frac{q}{2}z^2$$



Tenendo presente la terza delle 17.20 la costruzione della parabola del momento flettente segue il procedimento seguente:

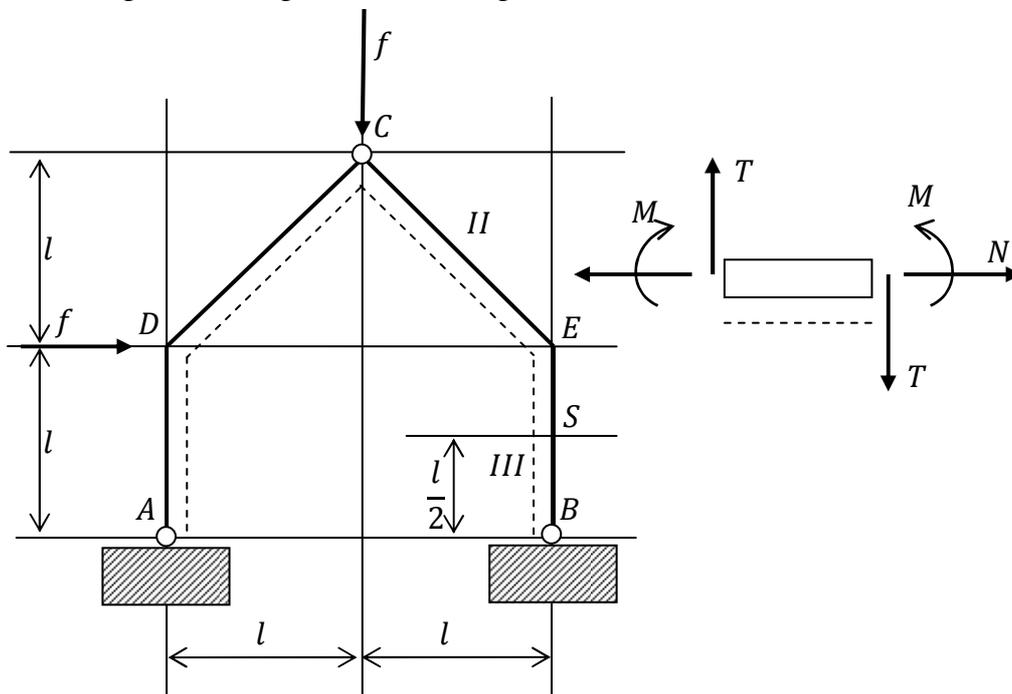
- 1) si tracciano le due tangenti alle estremità A, B della trave, la cui inclinazione è fornita dai valori del taglio alle estremità stesse;
- 2) dall'intersezione C delle tangenti si traccia una linea verticale v che intercetta la retta r in H ;
- 3) il punto medio M di CH è punto della parabola, che vi passa con tangente parallela ad r .

Questo procedimento fornisce tre punti della parabola e le rispettive tangenti, permettendo un suo tracciamento qualitativo.

17.7. Caratteristiche della sollecitazione e PLV. Nel caso in cui si richieda una delle caratteristiche della sollecitazione esclusivamente in un punto di una struttura può essere conveniente ricorrere al procedimento illustrato nei capitoli 15 e 16, ovvero al PLV. In particolare volendo calcolare una caratteristica di sollecitazione in S si segue questo algoritmo:

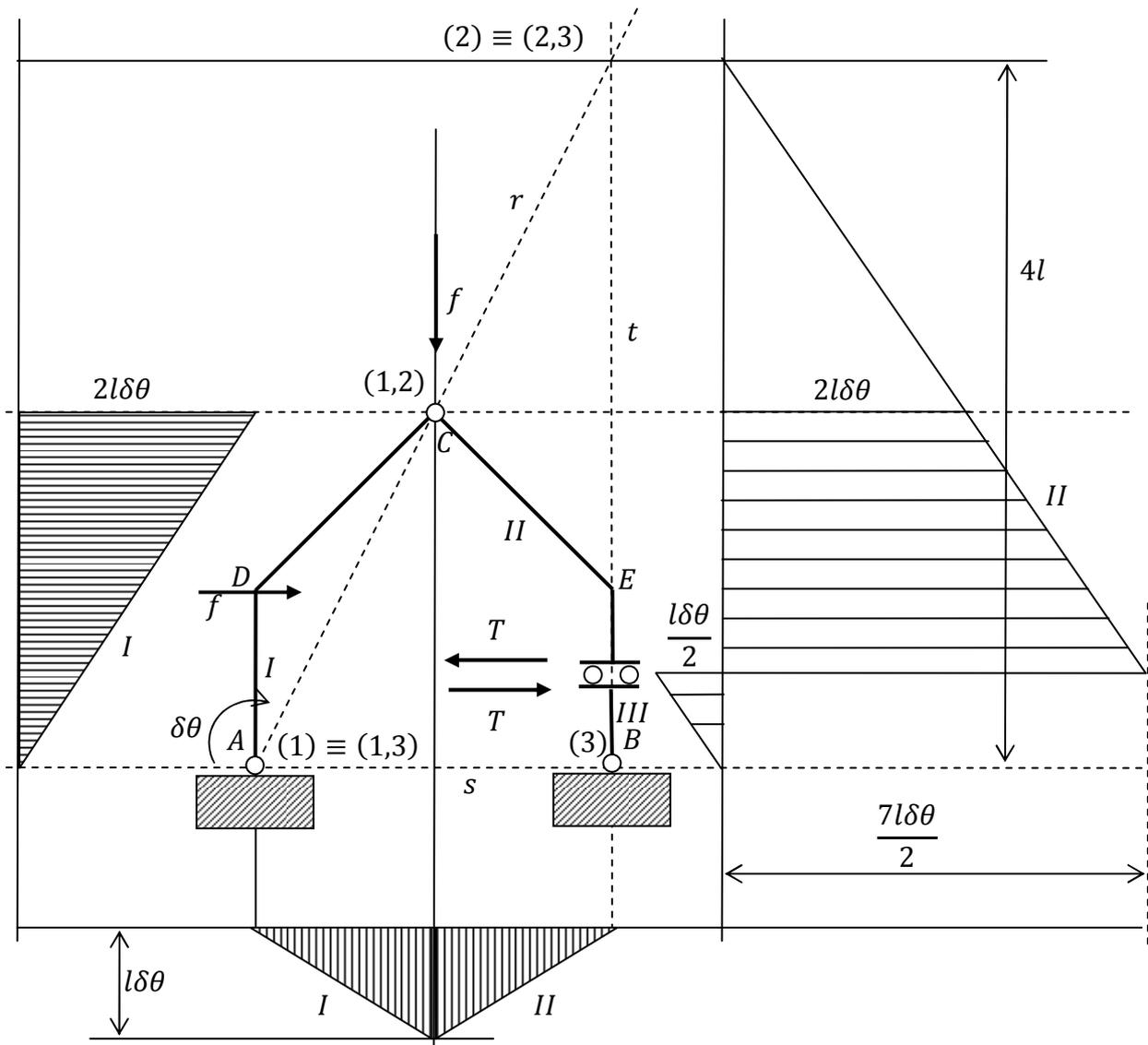
- 1) si sostituisce in S l'incastro interno con un vincolo doppio che lasci libero solo il grado di libertà su cui agisce la caratteristica interna richiesta;
- 2) si introduce la caratteristica interna richiesta come sollecitazione esterna incognita;
- 3) si imprime un opportuno sistema di spostamenti virtuali, valutandolo col metodo delle catene cinematiche, e si calcola il relativo lavoro virtuale;
- 4) imponendo che il lavoro virtuale sia nullo si ha una equazione avente come unica incognita la caratteristica interna richiesta.

Il sistema che si ottiene con il punto due dovrebbe essere un sistema con struttura labile, che possa però essere bilanciato dalla sollecitazione esterna. Per esemplificare tutto ciò si consideri il sistema piano indicato in figura, e si voglia ricavare il taglio in S .



Si noti anzitutto che per i nostri scopi non è richiesto il calcolo delle reazioni vincolari, infatti esse sono a lavoro nullo, e dunque non concorrono nella determinazione della espressione del lavoro virtuale. Si procede allora a 'tagliare' in S la struttura, a inserire ivi un carrello a scorrimento orizzontale, e una forza esterna orizzontale T con verso concorde a quello del positivo del taglio. Si procede quindi con il metodo delle catene cinematiche per ricavare i c.d.i.r. e quindi il sistema di spostamenti virtuali. Per i c.d.i.r. si osserva che

- (1) coincide con il centro A della cerniera;
- (1,2) coincide con il centro della cerniera in C ;
- (2) si trova sulla retta r per (1) e (1,2) in base al secondo teorema di Aronhold-Kennedy;
- (3) coincide con il centro B della cerniera;
- (1,3) deve trovarsi sulla retta s per il 2° di A-K applicato a I, III ;
- (2,3) deve trovarsi sulla retta t per via del tipo di vincolo che li congiunge;
- poiché (3) e (2,3) si trovano entrambi su t , segue che anche (2) si trova su t , per il 2° di A-K, dunque (2) cade sull'intersezione fra r e t ;
- per ubicare (2,3) su t e (1,3) su s ricorriamo al 1° di A-K applicato ai tre corpi rigidi che costituiscono la struttura, concludendo che l'unico modo per allinearli è quello di far coincidere (2,3) con (2) e (1,3) con (1).



Ora che i c.d.i.r. sono ubicati imprimiamo una rotazione oraria $\delta\theta$ in A e valutiamo il relativo sistema di spostamenti virtuali. A tale scopo si consideri che, mentre le cerniere interne trasmettono gli spostamenti da un corpo rigido all'altro, il carrello interno trasmette la rotazione e la componente dello spostamento ortogonale alla retta di scorrimento.

Con il sistema di spostamenti virtuali indicato in figura il lavoro virtuale esterno si scrive

$$17.34) L_{ve} = fl\delta\theta + fl\delta\theta - T \frac{7l\delta\theta}{2} - T \frac{l\delta\theta}{2} = 2fl\delta\theta - T4l\delta\theta$$

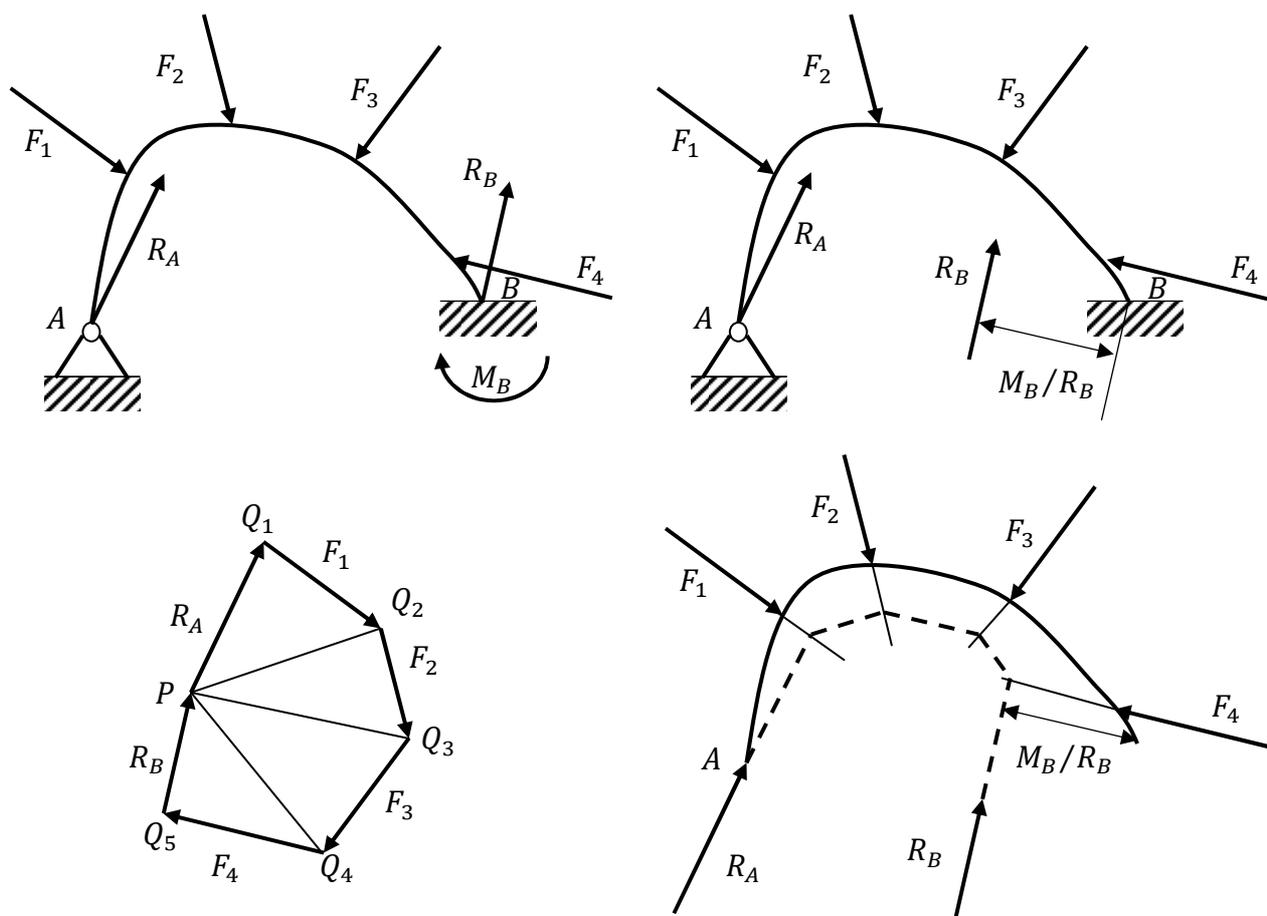
Il taglio T deve essere in grado di garantire l'equilibrio meccanico della struttura, quindi per il PLV esso si ottiene imponendo l'annullamento del lavoro virtuale **17.34**, condizione che porge

$$17.35) T = f/2$$

Capitolo 18. Curva delle pressioni

18.1. Curva delle pressioni per carichi concentrati. Si consideri la trave piana AB rappresentata in figura. Trattasi di trave una volta iperstatica per la quale immaginiamo di avere ricavato le reazioni vincolari esterne attraverso l'analisi delle deformazioni (vedi in merito i successivi capitoli). Costruiamo allora il **poligono delle forze** secondo il procedimento seguente:

- eliminiamo le coppie concentrate attraverso le operazioni elementari che garantiscono di ottenere sollecitazioni equivalenti: nel caso in oggetto ad esempio applico sulla sezione estrema in B una coppia di forze di intensità R_B e di braccio M_B/R_B ; questa operazione è necessaria per ottenere il poligono delle forze;
- partendo da un estremo della struttura (diciamo da A) disegno la prima forza, poi disegno la seconda forza che incontro lungo la struttura, spiccandola dall'estremo libero della prima forza; quindi disegno la terza forza spiccandola dall'estremo libero della seconda, e così di seguito; al termine di questa operazione si deve ottenere che l'estremo libero dell'ultima forza disegnata coincida con il punto di applicazione della prima: se così non fosse la sollecitazione agente sulla struttura non avrebbe risultante nulla e la struttura non si troverebbe in condizione di equilibrio meccanico.



Costruito il poligono delle forze si può passare alla costruzione della **curva delle pressioni** il cui pregnante significato fisico sarà discusso più oltre. Si procede come segue:

- si fissa nell'origine del primo vettore – disegnato nella costruzione del poligono delle forze (nel nostro caso R_A) – il punto P , detto **polo**;

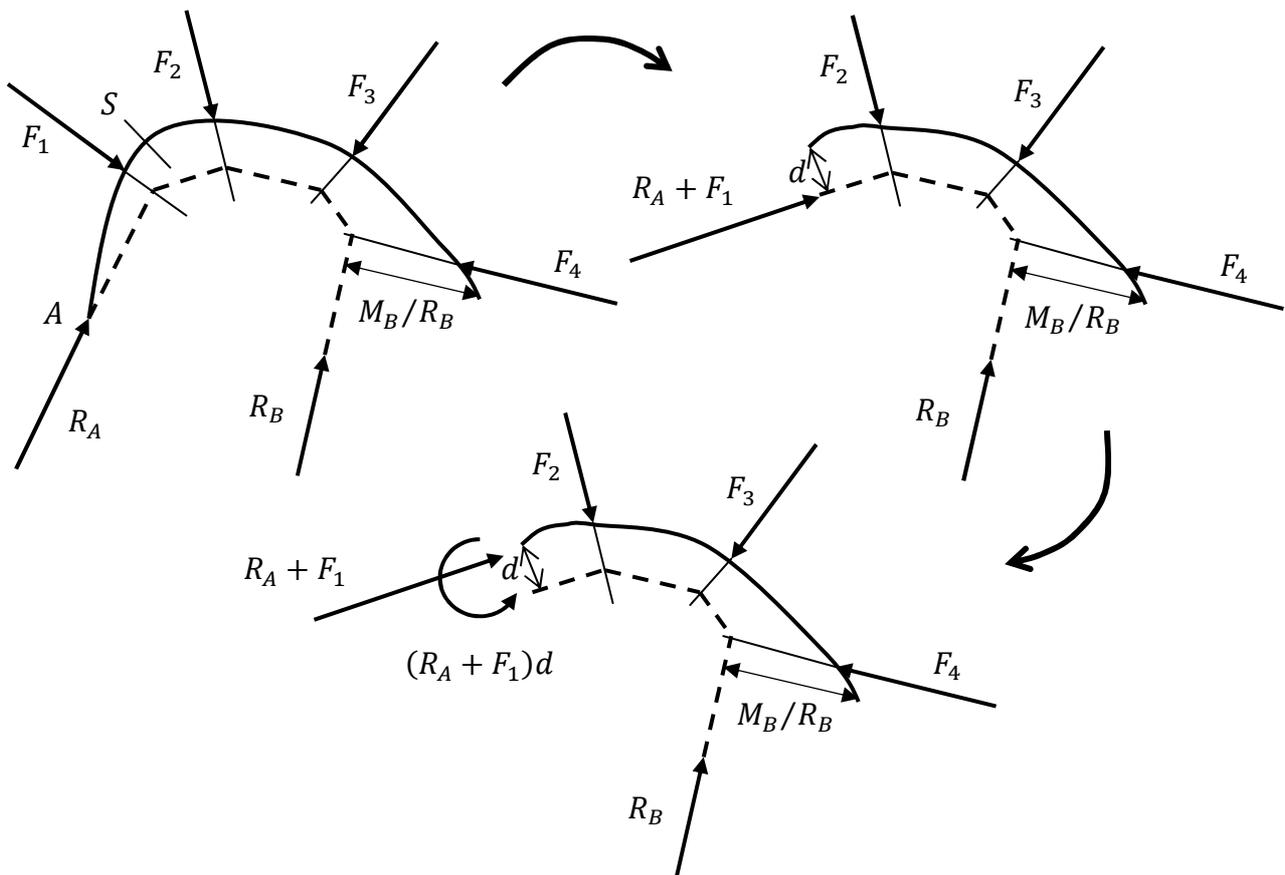
- dal polo si tracciano i segmenti che congiungono lo stesso agli estremi liberi di tutti i vettori che costituiscono la poligonale, ovvero che congiungono il polo con tutti i vertici della poligonale; questi segmenti sono detti **raggi**;

- dall'estremo A della struttura traccio un segmento parallelo al raggio PQ_1 fino a intercettare la retta d'azione della forza F_1 ; da tale punto di intersezione traccio un segmento parallelo al raggio PQ_2 fino a intercettare la retta d'azione della forza F_2 ; e così di seguito fino a tracciare il segmento parallelo al raggio PQ_5 .

Ebbene la poligonale ottenuta (in figura è riportata con un tratteggio) prende il nome di **curva delle pressioni** della struttura data.

Si accenna qui al fatto che la curva delle pressioni di una struttura è una delle sue infinite **curve funicolari**, è cioè una particolare curva funicolare della struttura stessa. Per la definizione di curva funicolare si rimanda al testo *E. Viola, Esercitazioni di Scienza delle costruzioni volume I*.

18.2. Significato fisico della curva delle pressioni. Consideriamo la sezione S indicata in figura, della trave in esame. Tracciamo da S la perpendicolare alla curva delle pressioni. Allora si ha che:

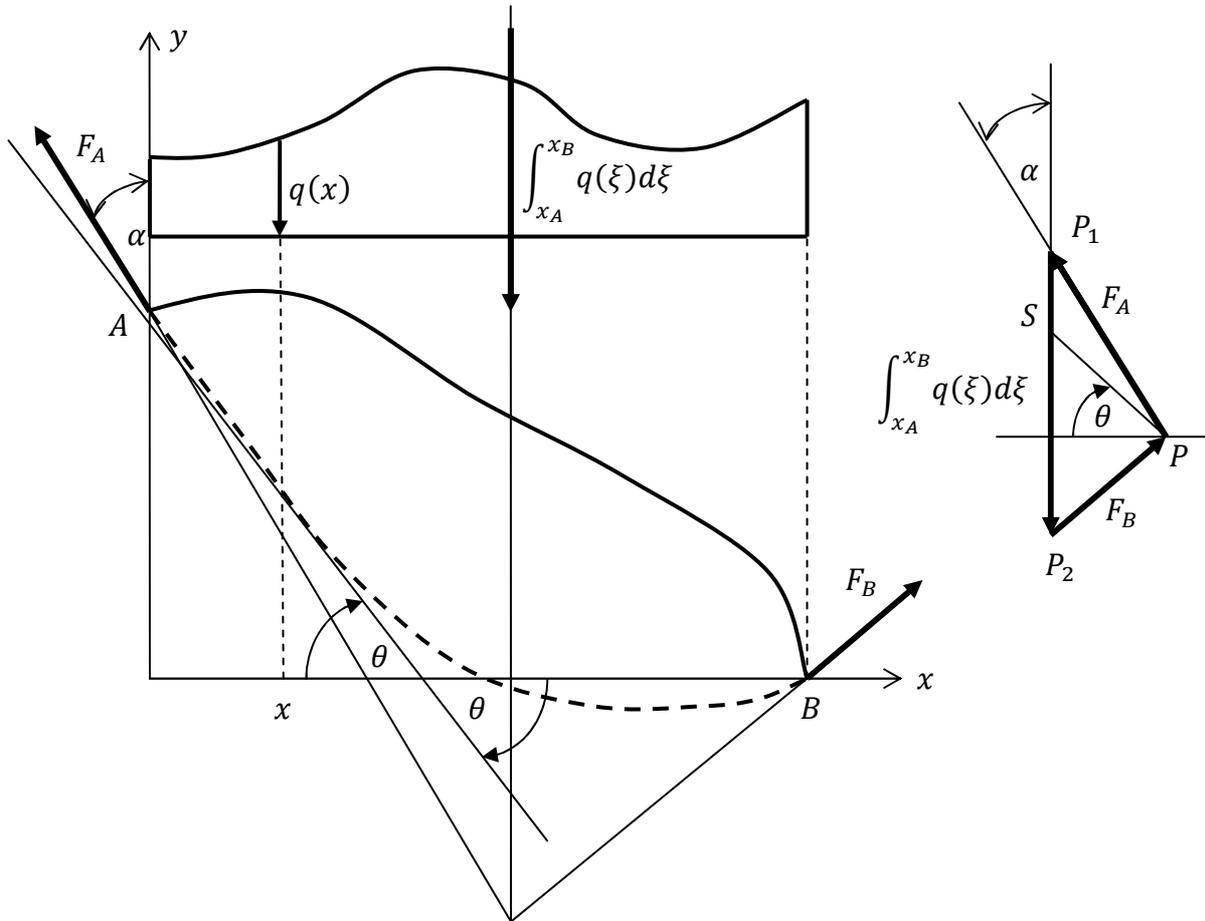


- la tangente alla curva delle pressioni nel punto che intercettiamo fornisce la retta di azione della forza che agisce sulla faccia sinistra della sezione S ;

- la distanza d del punto che intercettiamo dalla sezione S fornisce il braccio della coppia agente sulla faccia sinistra della sezione;

• l'intensità della forza agente sulla sezione e della coppia di braccio d è fornita dal raggio PQ_2 del poligono delle forze.

18.3. Curva delle pressioni per carichi distribuiti. Nel caso in cui il carico sia distribuito con continuità il procedimento per il tracciamento della curva delle pressioni non cambia, ma anziché ottenere una spezzata si ottiene una curva continua, la cui equazione è legata in modo semplice alla funzione che descrive la distribuzione del carico, come vado a dimostrare.



La distribuzione del carico agente sulla trave piana AB (ad asse curvilineo generico) sia descritta dalla funzione $q = q(x)$ allora la costruzione del triangolo delle forze è quella indicata in figura. In base al procedimento di costruzione della curva delle pressioni descritto per carichi concentrati si capisce come il raggio PS definisca la direzione della tangente alla curva delle pressioni nel punto di ascissa x (oltre ad avere lunghezza pari alla forza agente sulla sezione della trave di ascissa x). Allora detta $p = p(x)$ l'equazione della curva delle pressioni deve sussistere la relazione

$$18.1) \quad -\tan(\theta(x)) = \frac{dp(x)}{dx}$$

D'altra parte considerando il triangolo delle forze si ha pure

$$18.2) \quad \tan(\theta(x)) = \frac{F_A \cos \alpha - \int_0^x q(\xi) d\xi}{F_A \sin \alpha}$$

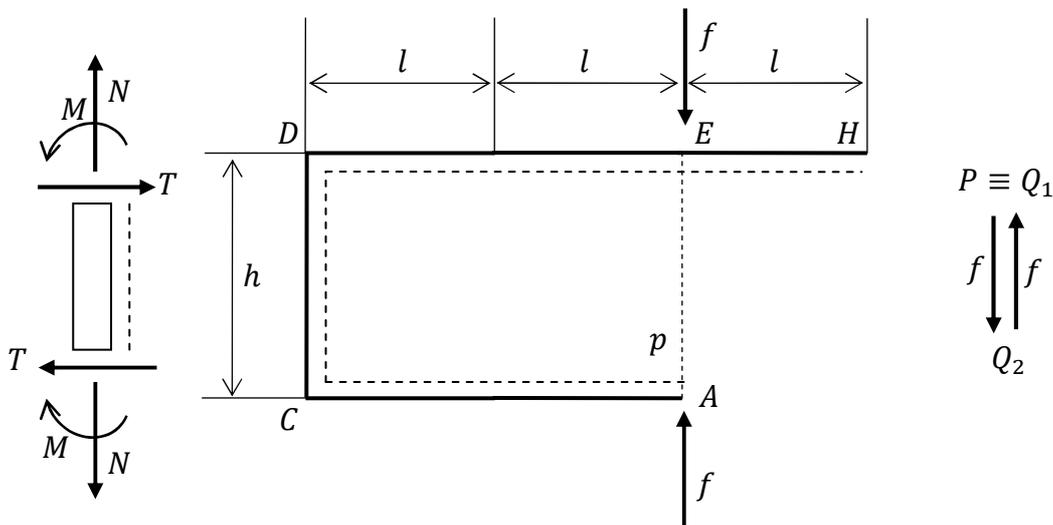
Sostituendo allora la **18.2** nella **18.1** e derivando in x si ha

$$\frac{dp(x)}{dx} = - \frac{F_A \cos \alpha - \int_0^x q(\xi) d\xi}{F_A \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$18.3) \quad \frac{d^2 p(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{F_A \sin \alpha}$$

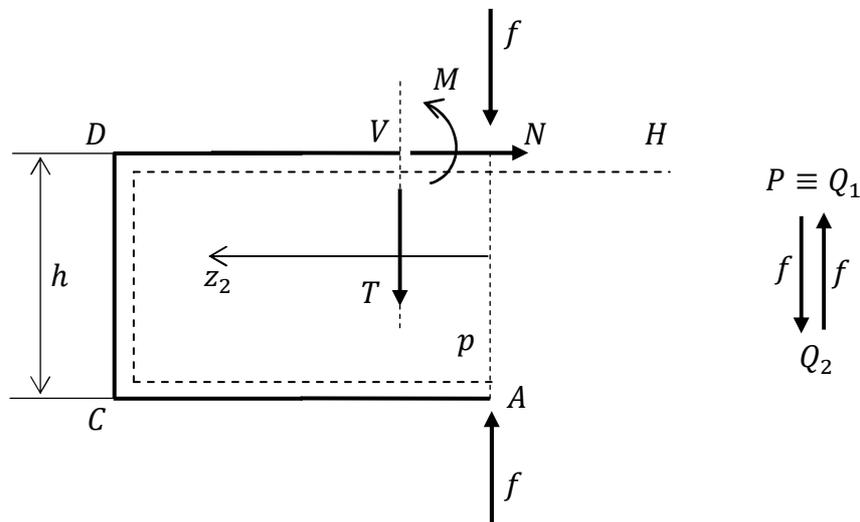
In particolare dunque se la distribuzione è costante si ottiene una parabola, se è lineare si ottiene un polinomio di terzo grado.

18.4. Esempi. Come primo esempio consideriamo un caso di carichi concentrati, e in particolare si riprenda il sistema discusso nel paragrafo 17.5: ad analisi delle reazioni vincolari compiuta la sollecitazione esterna agente sulla struttura piana è costituita dalle due forze verticali indicate in figura. La costruzione del poligono delle forze è dunque molto semplice, e partendo da H fornisce il poligono indicato a destra.



Tracciando la curva delle pressioni secondo il procedimento indicato nel paragrafo 18.1 si ottiene che essa è rappresentata dalla spezzata HEA . Vediamo ora come utilizzarla al fine del calcolo delle caratteristiche di sollecitazione.

Tratto HE . La curva delle pressioni coincide con l'asse geometrico della struttura, dunque il valore del momento flettente è nullo; inoltre il segmento PQ_1 ha lunghezza nulla è quindi anche le altre due caratteristiche di sollecitazione sono nulle.

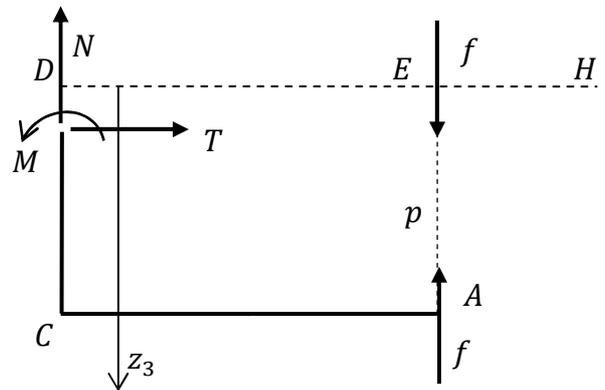


Tratto ED . Fissando un asse coordinato z_2 come in figura si ha che il momento flettente nel punto scorrevole V è la coppia di braccio z e forza f ; l'intensità del taglio poi è data dalla lunghezza del segmento PQ_2 . Considerando poi le convenzioni adottate per i segni delle caratteristiche di sollecitazione, si ha

$$18.4) \begin{cases} M = -fz_2 \\ T = f \end{cases}$$

Tratto DC . In questo caso la distanza del punto considerato dalla curva delle pressioni è invariabilmente $2l$, dunque il momento flettente è una coppia di braccio costante $2l$, ma anche di forza costante f , non essendovi nuovi contributi alla sollecitazione esterna; analogamente è costante la componente normale e nulla quella di taglio. Dunque, con le convenzioni di segno adottate si ha

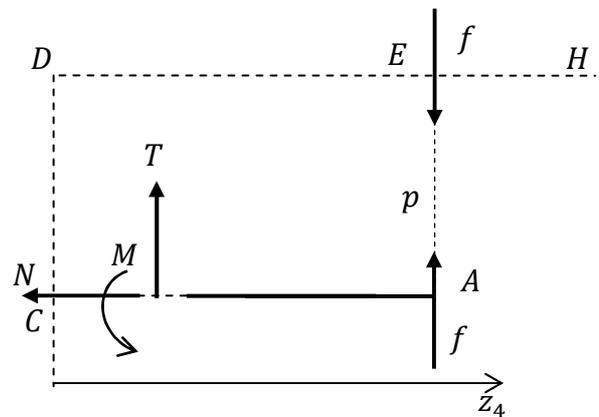
$$18.5) \begin{cases} M = -2fl \\ T = 0 \\ N = -f \end{cases}$$



Tratto CA . Introdotto l'asse coordinato z_4 indicato in figura la distanza fra la sezione mobile e la curva delle pressioni è data da $2l - z_4$ mentre il valore della forza agente sulla sezione stessa è ancora f , ed essa è tutta di taglio. In base alle convenzioni sui segni introdotte si ha allora

$$18.6) \begin{cases} M = -f(2l - z_4) \\ T = -f \\ N = 0 \end{cases}$$

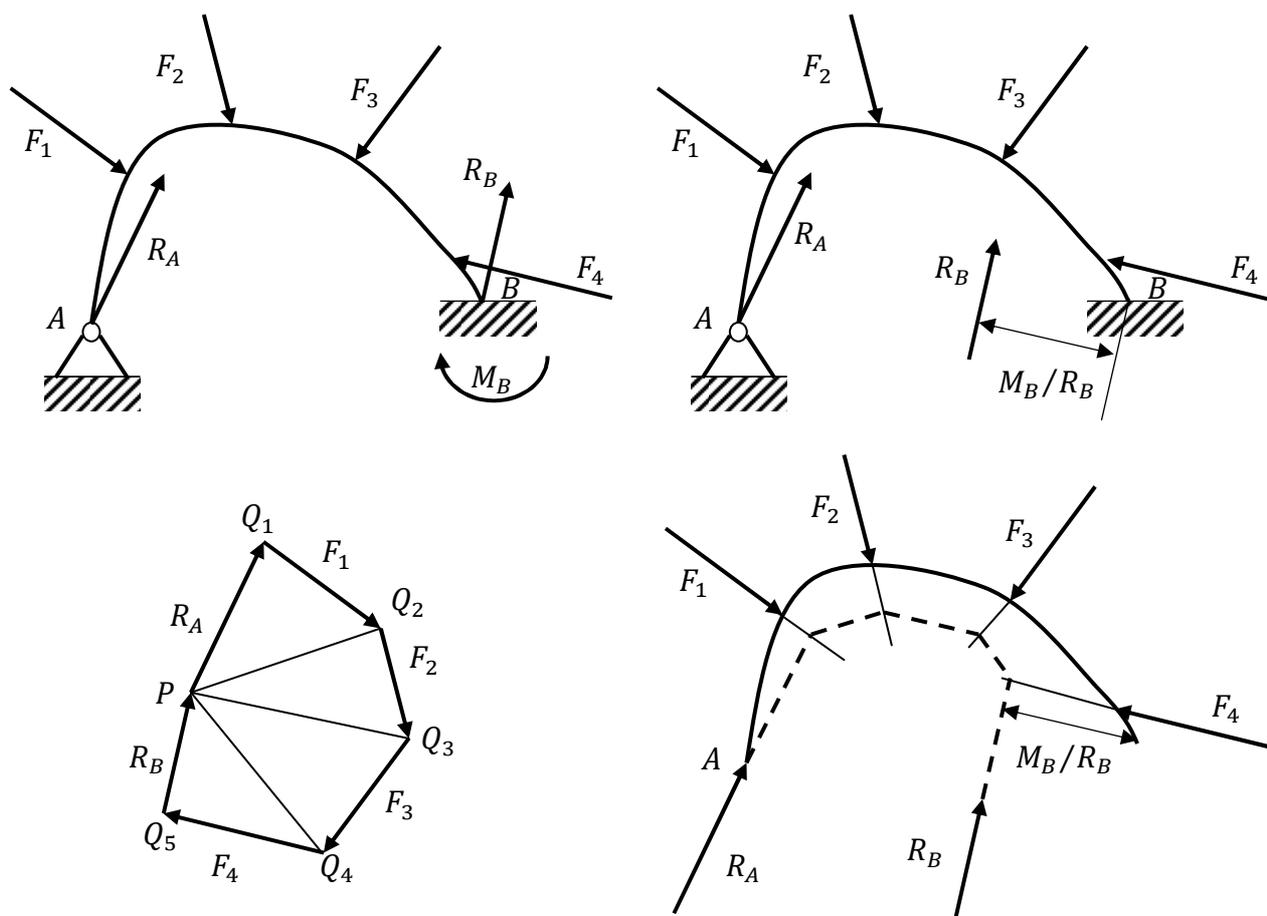
Si osservi che in questa analisi ho adottato per le caratteristiche di sollecitazione delle convenzioni di segno difformi da quelle usate nell'analisi fatta nel paragrafo 17.5.



Capitolo 18. Curva delle pressioni

18.1. Curva delle pressioni per carichi concentrati. Si consideri la trave piana AB rappresentata in figura. Trattasi di trave una volta iperstatica per la quale immaginiamo di avere ricavato le reazioni vincolari esterne attraverso l'analisi delle deformazioni (vedi in merito i successivi capitoli). Costruiamo allora il **poligono delle forze** secondo il procedimento seguente:

- eliminiamo le coppie concentrate attraverso le operazioni elementari che garantiscono di ottenere sollecitazioni equivalenti: nel caso in oggetto ad esempio applico sulla sezione estrema in B una coppia di forze di intensità R_B e di braccio M_B/R_B ; questa operazione è necessaria per ottenere il poligono delle forze;
- partendo da un estremo della struttura (diciamo da A) disegno la prima forza, poi disegno la seconda forza che incontro lungo la struttura, spiccandola dall'estremo libero della prima forza; quindi disegno la terza forza spiccandola dall'estremo libero della seconda, e così di seguito; al termine di questa operazione si deve ottenere che l'estremo libero dell'ultima forza disegnata coincida con il punto di applicazione della prima: se così non fosse la sollecitazione agente sulla struttura non avrebbe risultante nulla e la struttura non si troverebbe in condizione di equilibrio meccanico.



Costruito il poligono delle forze si può passare alla costruzione della **curva delle pressioni** il cui pregnante significato fisico sarà discusso più oltre. Si procede come segue:

- si fissa nell'origine del primo vettore – disegnato nella costruzione del poligono delle forze (nel nostro caso R_A) – il punto P , detto **polo**;

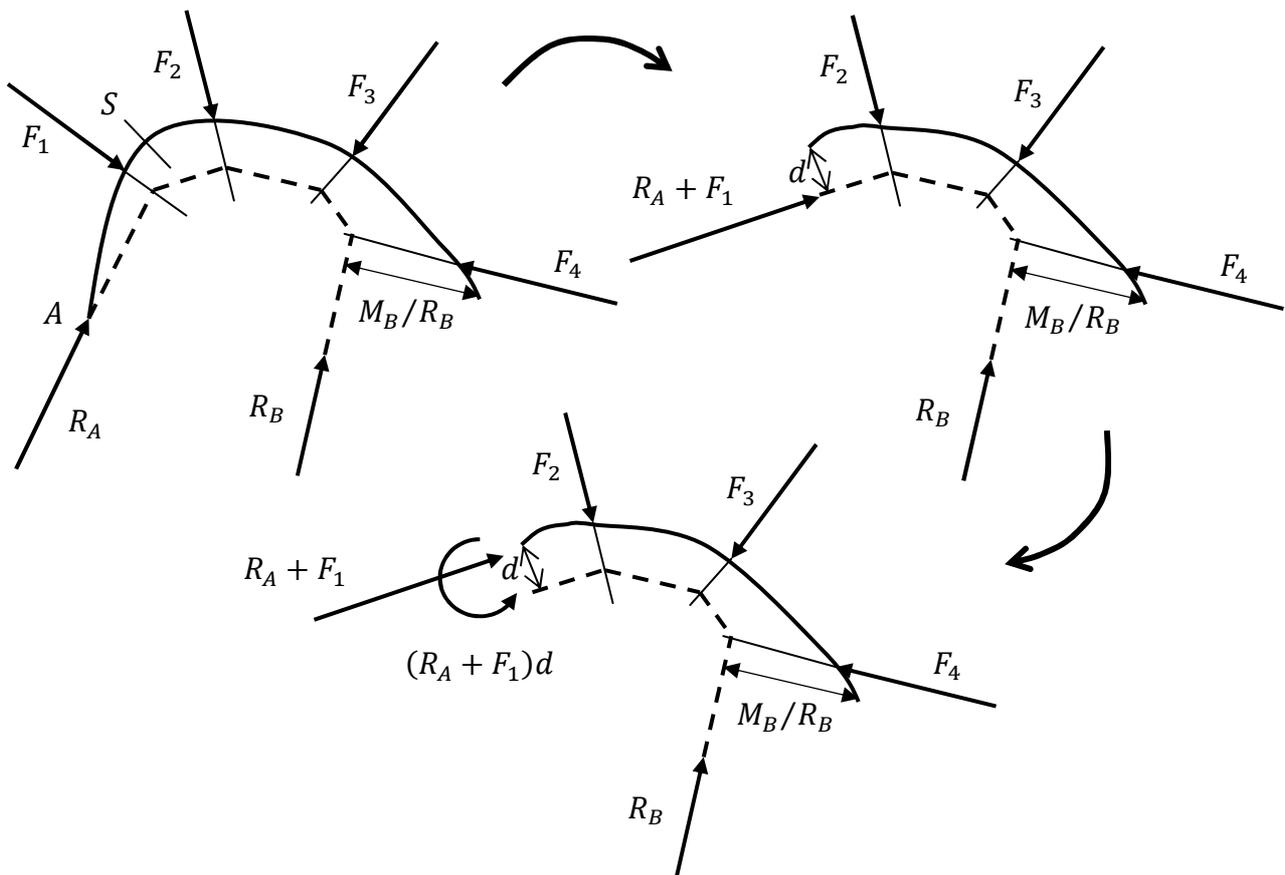
- dal polo si tracciano i segmenti che congiungono lo stesso agli estremi liberi di tutti i vettori che costituiscono la poligonale, ovvero che congiungono il polo con tutti i vertici della poligonale; questi segmenti sono detti **raggi**;

- dall'estremo A della struttura traccio un segmento parallelo al raggio PQ_1 fino a intercettare la retta d'azione della forza F_1 ; da tale punto di intersezione traccio un segmento parallelo al raggio PQ_2 fino a intercettare la retta d'azione della forza F_2 ; e così di seguito fino a tracciare il segmento parallelo al raggio PQ_5 .

Ebbene la poligonale ottenuta (in figura è riportata con un tratteggio) prende il nome di **curva delle pressioni** della struttura data.

Si accenna qui al fatto che la curva delle pressioni di una struttura è una delle sue infinite **curve funicolari**, è cioè una particolare curva funicolare della struttura stessa. Per la definizione di curva funicolare si rimanda al testo *E. Viola, Esercitazioni di Scienza delle costruzioni volume I*.

18.2. Significato fisico della curva delle pressioni. Consideriamo la sezione S indicata in figura, della trave in esame. Tracciamo da S la perpendicolare alla curva delle pressioni. Allora si ha che:

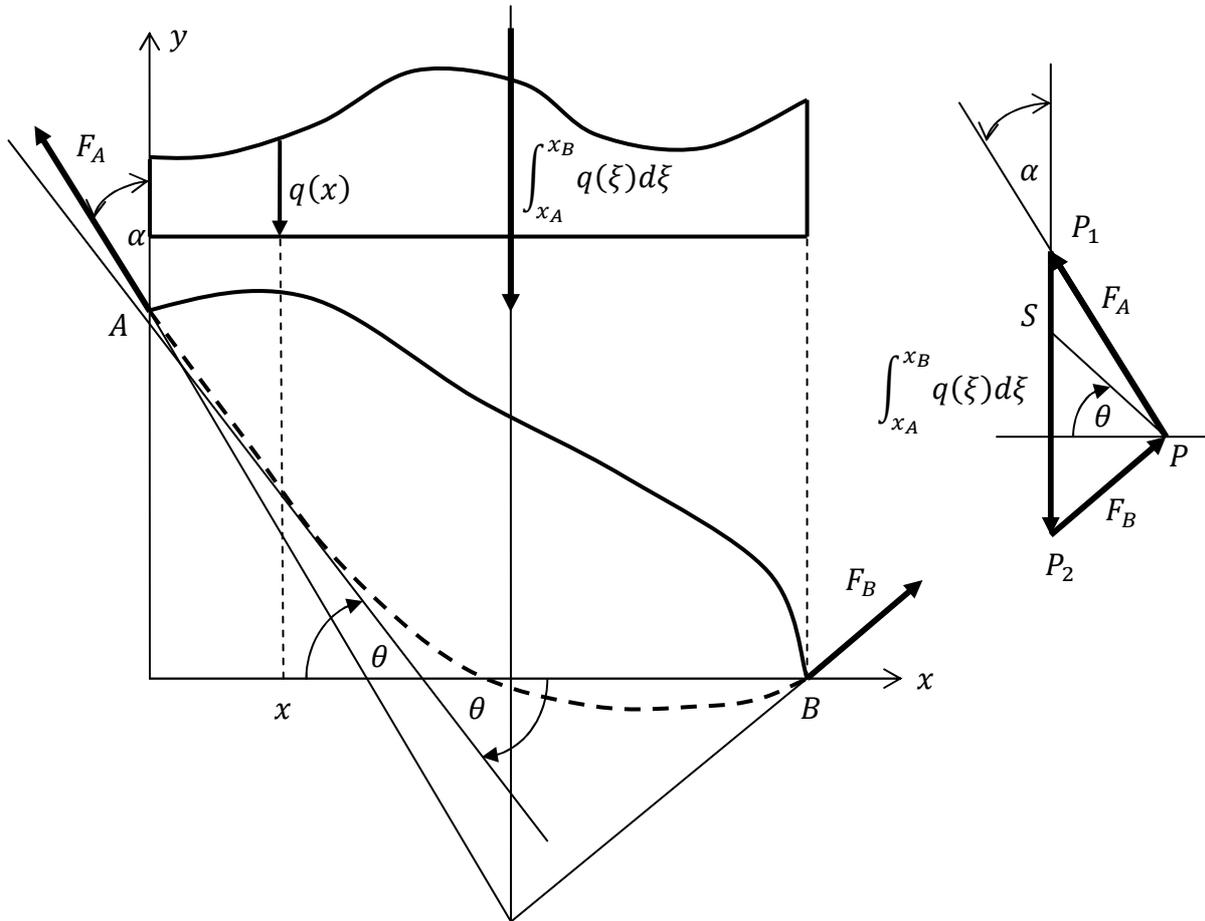


- la tangente alla curva delle pressioni nel punto che intercettiamo fornisce la retta di azione della forza che agisce sulla faccia sinistra della sezione S ;

- la distanza d del punto che intercettiamo dalla sezione S fornisce il braccio della coppia agente sulla faccia sinistra della sezione;

• l'intensità della forza agente sulla sezione e della coppia di braccio d è fornita dal raggio PQ_2 del poligono delle forze.

18.3. Curva delle pressioni per carichi distribuiti. Nel caso in cui il carico sia distribuito con continuità il procedimento per il tracciamento della curva delle pressioni non cambia, ma anziché ottenere una spezzata si ottiene una curva continua, la cui equazione è legata in modo semplice alla funzione che descrive la distribuzione del carico, come vado a dimostrare.



La distribuzione del carico agente sulla trave piana AB (ad asse curvilineo generico) sia descritta dalla funzione $q = q(x)$ allora la costruzione del triangolo delle forze è quella indicata in figura. In base al procedimento di costruzione della curva delle pressioni descritto per carichi concentrati si capisce come il raggio PS definisca la direzione della tangente alla curva delle pressioni nel punto di ascissa x (oltre ad avere lunghezza pari alla forza agente sulla sezione della trave di ascissa x). Allora detta $p = p(x)$ l'equazione della curva delle pressioni deve sussistere la relazione

$$18.1) \quad -\tan(\theta(x)) = \frac{dp(x)}{dx}$$

D'altra parte considerando il triangolo delle forze si ha pure

$$18.2) \quad \tan(\theta(x)) = \frac{F_A \cos \alpha - \int_0^x q(\xi) d\xi}{F_A \sin \alpha}$$

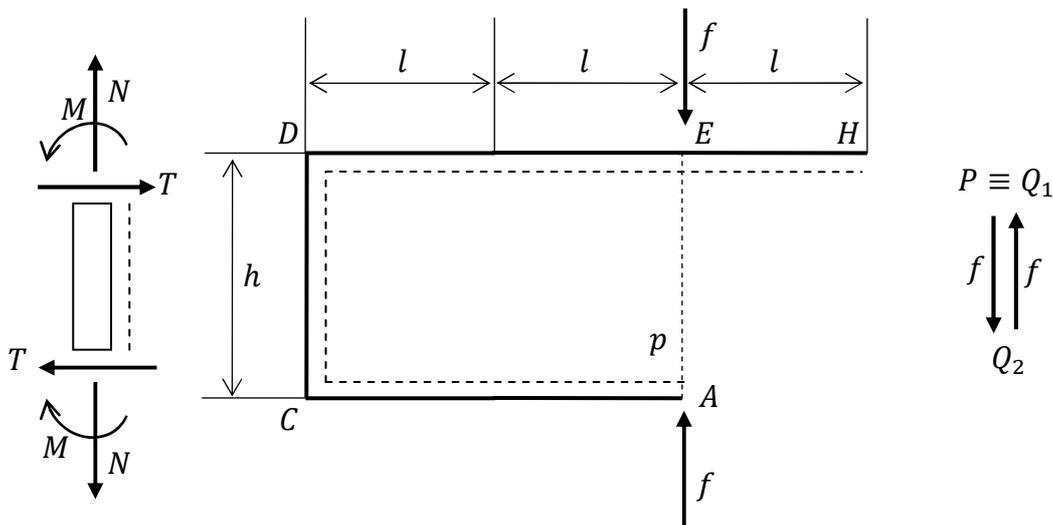
Sostituendo allora la **18.2** nella **18.1** e derivando in x si ha

$$\frac{dp(x)}{dx} = - \frac{F_A \cos \alpha - \int_0^x q(\xi) d\xi}{F_A \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$18.3) \quad \frac{d^2 p(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{F_A \sin \alpha}$$

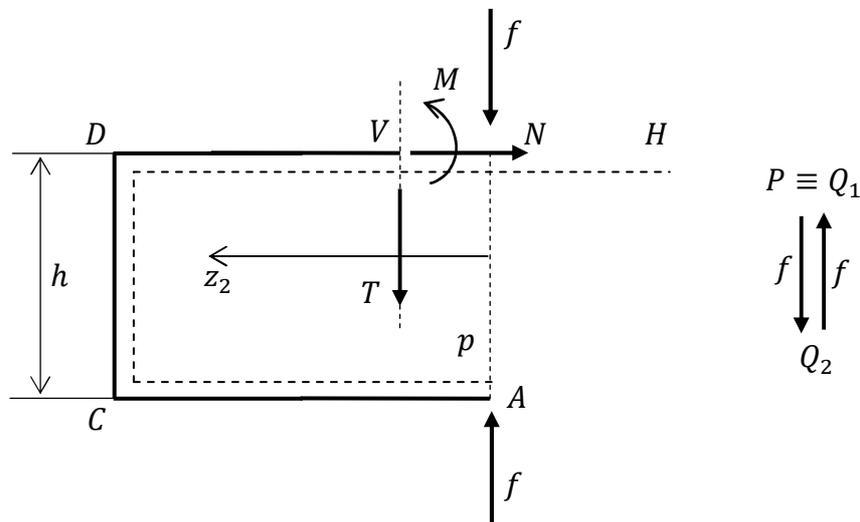
In particolare dunque se la distribuzione è costante si ottiene una parabola, se è lineare si ottiene un polinomio di terzo grado.

18.4. Esempi. Come primo esempio consideriamo un caso di carichi concentrati, e in particolare si riprenda il sistema discusso nel paragrafo 17.5: ad analisi delle reazioni vincolari compiuta la sollecitazione esterna agente sulla struttura piana è costituita dalle due forze verticali indicate in figura. La costruzione del poligono delle forze è dunque molto semplice, e partendo da H fornisce il poligono indicato a destra.



Tracciando la curva delle pressioni secondo il procedimento indicato nel paragrafo 18.1 si ottiene che essa è rappresentata dalla spezzata HEA . Vediamo ora come utilizzarla al fine del calcolo delle caratteristiche di sollecitazione.

Tratto HE . La curva delle pressioni coincide con l'asse geometrico della struttura, dunque il valore del momento flettente è nullo; inoltre il segmento PQ_1 ha lunghezza nulla è quindi anche le altre due caratteristiche di sollecitazione sono nulle.

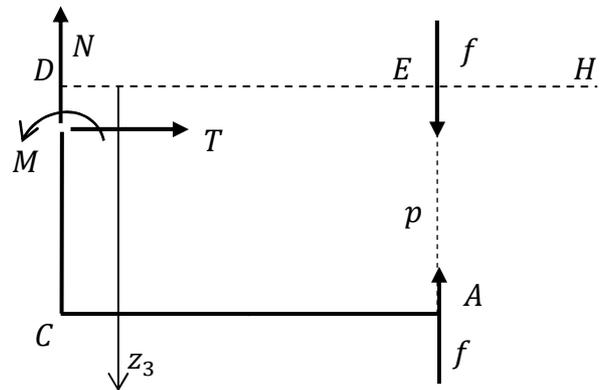


Tratto ED . Fissando un asse coordinato z_2 come in figura si ha che il momento flettente nel punto scorrevole V è la coppia di braccio z e forza f ; l'intensità del taglio poi è data dalla lunghezza del segmento PQ_2 . Considerando poi le convenzioni adottate per i segni delle caratteristiche di sollecitazione, si ha

$$18.4) \begin{cases} M = -fz_2 \\ T = f \end{cases}$$

Tratto DC . In questo caso la distanza del punto considerato dalla curva delle pressioni è invariabilmente $2l$, dunque il momento flettente è una coppia di braccio costante $2l$, ma anche di forza costante f , non essendovi nuovi contributi alla sollecitazione esterna; analogamente è costante la componente normale e nulla quella di taglio. Dunque, con le convenzioni di segno adottate si ha

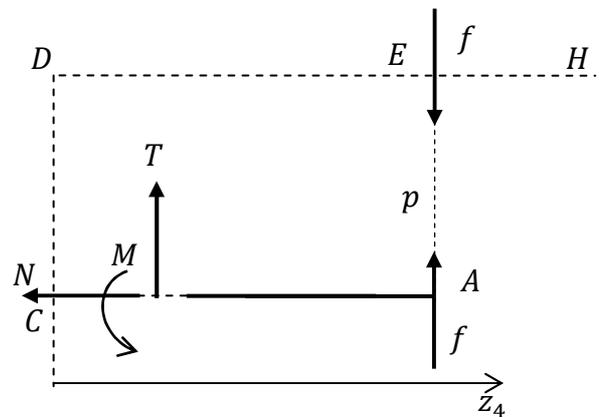
$$18.5) \begin{cases} M = -2fl \\ T = 0 \\ N = -f \end{cases}$$



Tratto CA . Introdotto l'asse coordinato z_4 indicato in figura la distanza fra la sezione mobile e la curva delle pressioni è data da $2l - z_4$ mentre il valore della forza agente sulla sezione stessa è ancora f , ed essa è tutta di taglio. In base alle convenzioni sui segni introdotte si ha allora

$$18.6) \begin{cases} M = -f(2l - z_4) \\ T = -f \\ N = 0 \end{cases}$$

Si osservi che in questa analisi ho adottato per le caratteristiche di sollecitazione delle convenzioni di segno difformi da quelle usate nell'analisi fatta nel paragrafo 17.5.



Capitolo 19. Strutture reticolari piane isostatiche

19.1. Strutture reticolari piane. Si tratta di strutture costituite esclusivamente da aste, collegate fra loro da cerniere. Possiamo studiare questi sistemi considerandoli come un insieme di tanti punti materiali quante sono le cerniere e di tanti pendoli quante sono le aste. Allora se indico

- n : numero di nodi
- p : numero di pendoli ovvero numero di aste
- v_e : gradi di vincolo imposti dai vincoli esterni

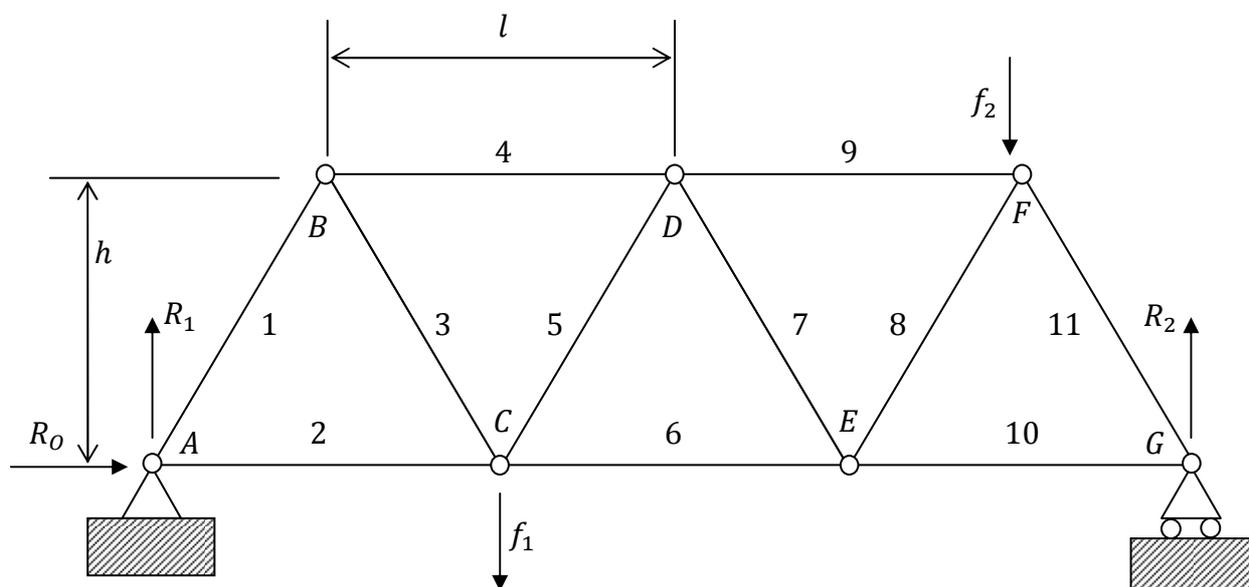
si trova che i gradi di libertà della struttura e i gradi di vincolo complessivamente imposti alla struttura reticolare piana sono dati rispettivamente da

$$19.1) \begin{cases} g = 2n \\ v = p + v_e \end{cases}$$

Pertanto se i vincoli esterni sono ben posti, allora la condizione $2n = p + v_e$ garantisce che il sistema **19.1** ammetta una ed una sola soluzione per qualunque sollecitazione attiva. Se si considera ad esempio la struttura reticolare in figura si ha

$$19.2) \begin{cases} n = 7 \\ p = 11 \\ v_e = ce + ca = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 2n = 14 \\ v = p + v_e = 14 \end{cases}$$

Dunque la struttura raggiunge l'equilibrio meccanico qualunque sia la sollecitazione attiva e le reazioni vincolari possono essere ricavate univocamente.



Alla stessa conclusione si sarebbe pervenuti considerando il sistema come un insieme di 11 aste vincolate da 5 cerniere interne e da due vincoli esterni multipli. Infatti in questo caso i gradi di libertà sarebbero $g = 3 \cdot 11 = 33$ mentre i gradi di vincolo, procedendo cerniera per cerniera (secondo l'ordine imposto dalle lettere) e seguendo le considerazioni espone nel paragrafo **14.4**, sono dati da

$$v = (ce + ce(2-1)) + ce(3-1) + ce(4-1) + ce(4-1) + ce(4-1) + ce(3-1) + (ca + ce(2-1)) = \\ = (2+2) + 4 + 6 + 6 + 6 + 4 + (1+2) = 8 + 18 + 7 = 33$$

Ciò che interessa in queste strutture, oltre alle reazioni dei vincoli esterni, sono le reazioni dei pendoli, ovvero le forze che attraversano le aste. Per ricavarle si può procedere in uno dei seguenti due modi.

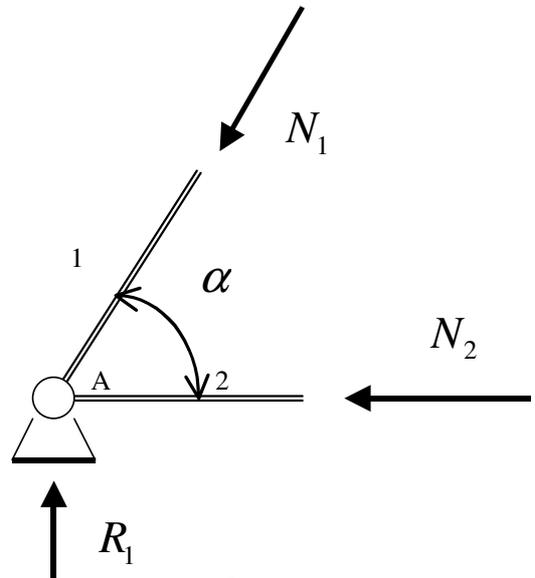
19.2. Metodo dei nodi.

Il metodo procede secondo il seguente algoritmo:

- si ricavano le reazioni vincolari esterne imponendo l'equilibrio dell'insieme come corpo rigido;
- si cerca un nodo in cui convergano solo due pendoli in modo da avere come incognite solo i moduli e i versi delle reazioni vincolari dei pendoli stessi (la reazione vincolare di un pendolo ha direzione parallela al pendolo stesso); si impone allora l'equilibrio meccanico alla traslazione per il nodo (due equazioni) e si ricavano le incognite;
- si cerca un nodo collegato a quello precedente e collegato con soli altri due nodi; imponendo l'equilibrio meccanico per esso si ha ancora un sistema di due equazioni in due incognite;
- si procede così fino alla determinazione di tutte le reazioni vincolari dei pendoli.

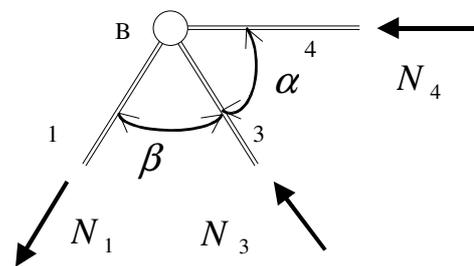
Considerando la struttura in figura il primo passo dell'algoritmo porge

$$19.3) \begin{cases} R_o = 0 \\ R_1 + R_2 = F_1 + F_2 \\ 3\ell R_2 = \ell F_1 + \frac{5}{2}\ell F_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_o = 0 \\ R_1 = \frac{2}{3}F_1 + \frac{1}{6}F_2 \\ R_2 = \frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \end{cases}$$



Per quanto riguarda il secondo passo possiamo ad esempio considerare il nodo A; definiti arbitrariamente i versi positivi delle reazioni vincolari dei pendoli (vedi figura), abbiamo il sistema

$$19.4) \begin{cases} N_1 \cos \alpha + N_2 = 0 \\ -N_1 \sin \alpha + R_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{R_2}{\sin \alpha} \\ N_2 = -\frac{R_2}{\tan \alpha} = -\frac{R_2 \ell}{2h} \end{cases}$$



dove $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{\ell/2}\right)$. A questo punto si passa al nodo B ottenendo il sistema

$$\begin{cases} N_1 \cos \frac{\beta}{2} - N_3 \cos \frac{\beta}{2} = 0 \\ N_1 \sin \frac{\beta}{2} + N_3 \sin \frac{\beta}{2} + N_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_3 = N_1 \\ N_4 = -2N_1 \sin \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Considerando poi che $\beta = \pi - 2\alpha$ abbiamo

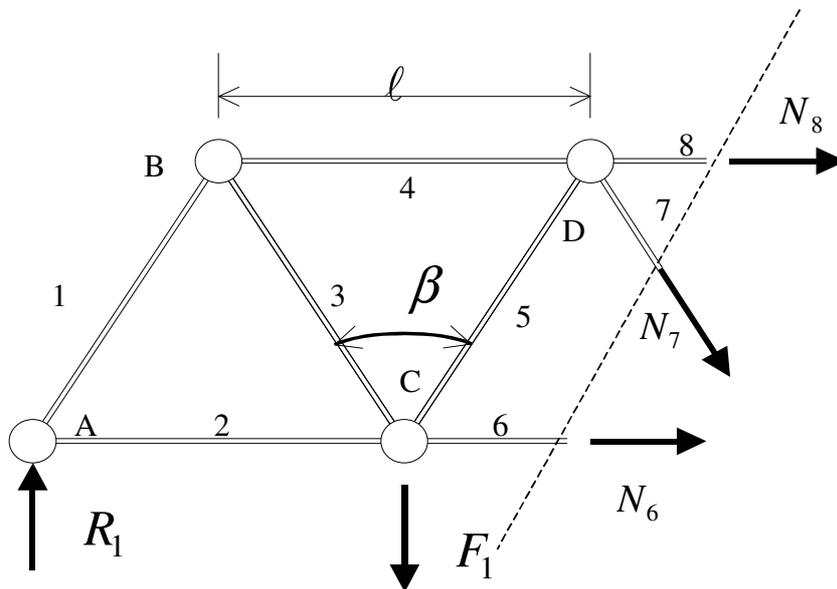
$$19.5) \begin{cases} N_3 = N_1 \\ N_4 = -2N_1 \cos \alpha \end{cases}$$

Mettendo dunque insieme le **19.3**, **19.4**, **19.5** abbiamo sin qui trovato

$$\begin{cases} R_o = 0 \\ R_1 = \frac{2}{3}F_1 + \frac{1}{6}F_2 \\ R_2 = \frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \end{cases} \quad \begin{cases} N_1 = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \right) \\ N_2 = -\frac{\ell}{2h} \left(\frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \right) \\ N_3 = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \right) \\ N_4 = -\frac{\ell}{h} \left(\frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \right) \end{cases} \quad \alpha = \arctan \left(\frac{h}{\ell/2} \right)$$

Si vede dunque che procedendo così si può arrivare a ricavare tutte le reazioni incognite ...

19.3. Metodo delle sezioni. Questo metodo prevede di ‘tagliare’ la travatura fino a dividerla in due parti, di eliminare una delle due parti della struttura e di imporre l’equilibrio meccanico alla parte restante (riguardata come corpo rigido), preferibilmente imponendo l’annullamento dei momenti rispetto a tre poli (si ottengono in genere calcoli più agevoli).



Rispetto all’altro metodo questo risulta preferibile nel caso in cui si sia interessati solo alle reazioni vincolari di alcuni pendoli; in questo caso infatti basterà tagliare in corrispondenza di suddetti pendoli.

Supponiamo di essere interessati per esempio alle reazioni dei pendoli 6,7,8 della struttura in figura. Allora possiamo tagliare passando per questi lati ottenendo due metà. Prendendo la metà sinistra e imponendo l’annullamento dei momenti rispetto al polo D ottengo N_6 :

$$N_6 h + F_1 \frac{\ell}{2} - R_1 \frac{3\ell}{2} = 0 \Rightarrow N_6 = -F_1 \frac{\ell}{2h} + R_1 \frac{3\ell}{2h}$$

Sempre per la metà sinistra l'annullamento del momento totale rispetto al polo E fornisce N_8 :

$$-N_8 h + F_1 \ell - R_1 2\ell = 0 \Rightarrow N_8 = F_1 \frac{\ell}{h} - R_1 \frac{2\ell}{h}$$

Per ricavare N_7 si può invece imporre l'annullamento del momento totale rispetto al punto improprio di convergenza dei lati 2 e 4. Si ha

$$-N_7 \cos \frac{\beta}{2} - F_1 + R_1 = 0 \Rightarrow N_7 = \frac{-F_1 + R_1}{\sin \alpha}$$

Naturalmente si può iterare il procedimento per ricavare le reazioni di tutti e 11 i pendoli.

Capitolo 19. Strutture reticolari piane isostatiche

19.1. Strutture reticolari piane. Si tratta di strutture costituite esclusivamente da aste, collegate fra loro da cerniere. Possiamo studiare questi sistemi considerandoli come un insieme di tanti punti materiali quante sono le cerniere e di tanti pendoli quante sono le aste. Allora se indico

- n : numero di nodi
- p : numero di pendoli ovvero numero di aste
- v_e : gradi di vincolo imposti dai vincoli esterni

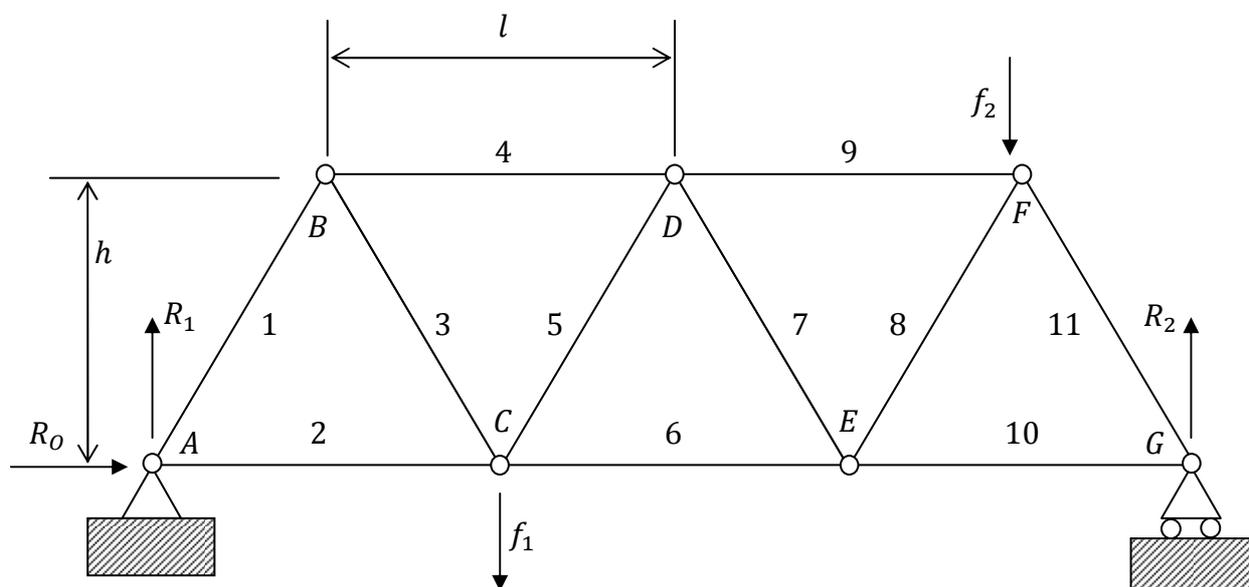
si trova che i gradi di libertà della struttura e i gradi di vincolo complessivamente imposti alla struttura reticolare piana sono dati rispettivamente da

$$19.1) \begin{cases} g = 2n \\ v = p + v_e \end{cases}$$

Pertanto se i vincoli esterni sono ben posti, allora la condizione $2n = p + v_e$ garantisce che il sistema **19.1** ammetta una ed una sola soluzione per qualunque sollecitazione attiva. Se si considera ad esempio la struttura reticolare in figura si ha

$$19.2) \begin{cases} n = 7 \\ p = 11 \\ v_e = ce + ca = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 2n = 14 \\ v = p + v_e = 14 \end{cases}$$

Dunque la struttura raggiunge l'equilibrio meccanico qualunque sia la sollecitazione attiva e le reazioni vincolari possono essere ricavate univocamente.



Alla stessa conclusione si sarebbe pervenuti considerando il sistema come un insieme di 11 aste vincolate da 5 cerniere interne e da due vincoli esterni multipli. Infatti in questo caso i gradi di libertà sarebbero $g = 3 \cdot 11 = 33$ mentre i gradi di vincolo, procedendo cerniera per cerniera (secondo l'ordine imposto dalle lettere) e seguendo le considerazioni espone nel paragrafo **14.4**, sono dati da

$$v = (ce + ce(2-1)) + ce(3-1) + ce(4-1) + ce(4-1) + ce(4-1) + ce(3-1) + (ca + ce(2-1)) = \\ = (2+2) + 4 + 6 + 6 + 6 + 4 + (1+2) = 8 + 18 + 7 = 33$$

Ciò che interessa in queste strutture, oltre alle reazioni dei vincoli esterni, sono le reazioni dei pendoli, ovvero le forze che attraversano le aste. Per ricavarle si può procedere in uno dei seguenti due modi.

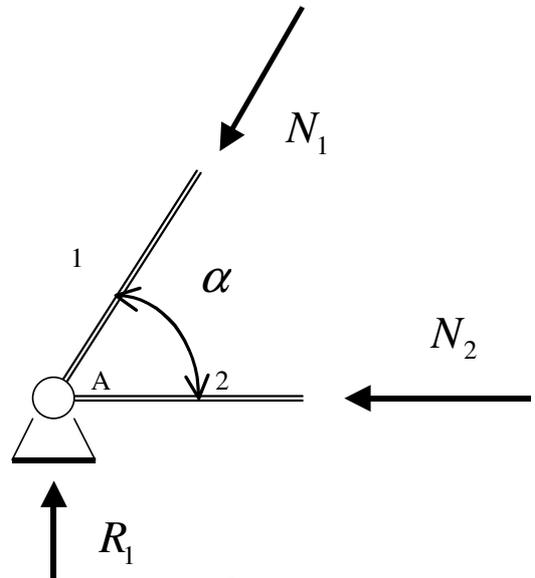
19.2. Metodo dei nodi.

Il metodo procede secondo il seguente algoritmo:

- si ricavano le reazioni vincolari esterne imponendo l'equilibrio dell'insieme come corpo rigido;
- si cerca un nodo in cui convergano solo due pendoli in modo da avere come incognite solo i moduli e i versi delle reazioni vincolari dei pendoli stessi (la reazione vincolare di un pendolo ha direzione parallela al pendolo stesso); si impone allora l'equilibrio meccanico alla traslazione per il nodo (due equazioni) e si ricavano le incognite;
- si cerca un nodo collegato a quello precedente e collegato con soli altri due nodi; imponendo l'equilibrio meccanico per esso si ha ancora un sistema di due equazioni in due incognite;
- si procede così fino alla determinazione di tutte le reazioni vincolari dei pendoli.

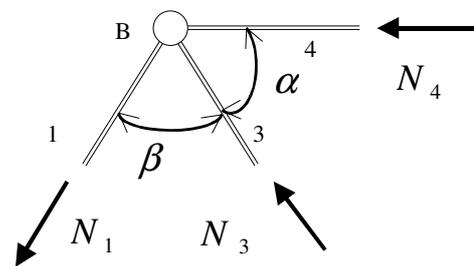
Considerando la struttura in figura il primo passo dell'algoritmo porge

$$19.3) \begin{cases} R_o = 0 \\ R_1 + R_2 = F_1 + F_2 \\ 3\ell R_2 = \ell F_1 + \frac{5}{2}\ell F_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_o = 0 \\ R_1 = \frac{2}{3}F_1 + \frac{1}{6}F_2 \\ R_2 = \frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \end{cases}$$



Per quanto riguarda il secondo passo possiamo ad esempio considerare il nodo A; definiti arbitrariamente i versi positivi delle reazioni vincolari dei pendoli (vedi figura), abbiamo il sistema

$$19.4) \begin{cases} N_1 \cos \alpha + N_2 = 0 \\ -N_1 \sin \alpha + R_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{R_2}{\sin \alpha} \\ N_2 = -\frac{R_2}{\tan \alpha} = -\frac{R_2 \ell}{2h} \end{cases}$$



dove $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{\ell/2}\right)$. A questo punto si passa al nodo B ottenendo il sistema

$$\begin{cases} N_1 \cos \frac{\beta}{2} - N_3 \cos \frac{\beta}{2} = 0 \\ N_1 \sin \frac{\beta}{2} + N_3 \sin \frac{\beta}{2} + N_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_3 = N_1 \\ N_4 = -2N_1 \sin \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Considerando poi che $\beta = \pi - 2\alpha$ abbiamo

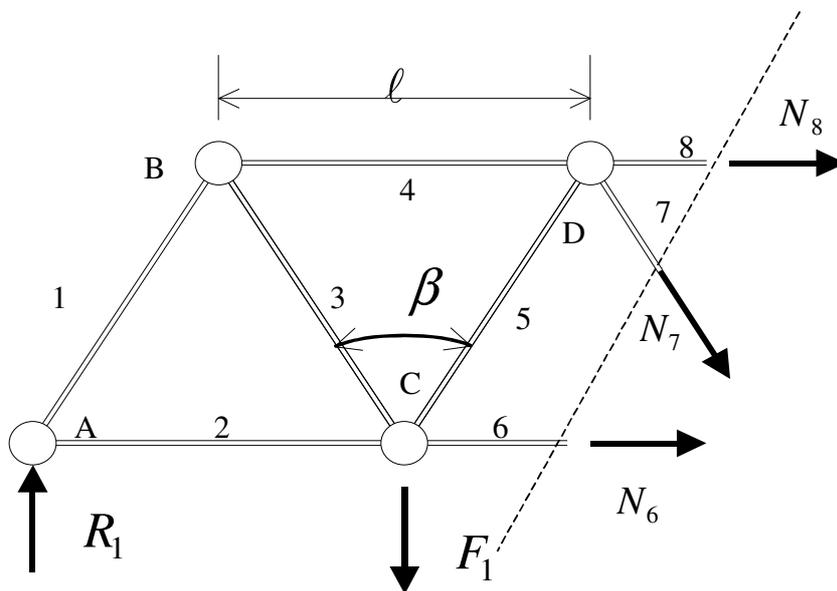
$$19.5) \begin{cases} N_3 = N_1 \\ N_4 = -2N_1 \cos \alpha \end{cases}$$

Mettendo dunque insieme le **19.3**, **19.4**, **19.5** abbiamo sin qui trovato

$$\begin{cases} R_o = 0 \\ R_1 = \frac{2}{3}F_1 + \frac{1}{6}F_2 \\ R_2 = \frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \end{cases} \quad \begin{cases} N_1 = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \right) \\ N_2 = -\frac{\ell}{2h} \left(\frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \right) \\ N_3 = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \right) \\ N_4 = -\frac{\ell}{h} \left(\frac{1}{3}F_1 + \frac{5}{6}F_2 \right) \end{cases} \quad \alpha = \arctan \left(\frac{h}{\ell/2} \right)$$

Si vede dunque che procedendo così si può arrivare a ricavare tutte le reazioni incognite ...

19.3. Metodo delle sezioni. Questo metodo prevede di ‘tagliare’ la travatura fino a dividerla in due parti, di eliminare una delle due parti della struttura e di imporre l’equilibrio meccanico alla parte restante (riguardata come corpo rigido), preferibilmente imponendo l’annullamento dei momenti rispetto a tre poli (si ottengono in genere calcoli più agevoli).



Rispetto all’altro metodo questo risulta preferibile nel caso in cui si sia interessati solo alle reazioni vincolari di alcuni pendoli; in questo caso infatti basterà tagliare in corrispondenza di suddetti pendoli.

Supponiamo di essere interessati per esempio alle reazioni dei pendoli 6,7,8 della struttura in figura. Allora possiamo tagliare passando per questi lati ottenendo due metà. Prendendo la metà sinistra e imponendo l’annullamento dei momenti rispetto al polo D ottengo N_6 :

$$N_6 h + F_1 \frac{\ell}{2} - R_1 \frac{3\ell}{2} = 0 \Rightarrow N_6 = -F_1 \frac{\ell}{2h} + R_1 \frac{3\ell}{2h}$$

Sempre per la metà sinistra l'annullamento del momento totale rispetto al polo E fornisce N_8 :

$$-N_8 h + F_1 \ell - R_1 2\ell = 0 \Rightarrow N_8 = F_1 \frac{\ell}{h} - R_1 \frac{2\ell}{h}$$

Per ricavare N_7 si può invece imporre l'annullamento del momento totale rispetto al punto improprio di convergenza dei lati 2 e 4. Si ha

$$-N_7 \cos \frac{\beta}{2} - F_1 + R_1 = 0 \Rightarrow N_7 = \frac{-F_1 + R_1}{\sin \alpha}$$

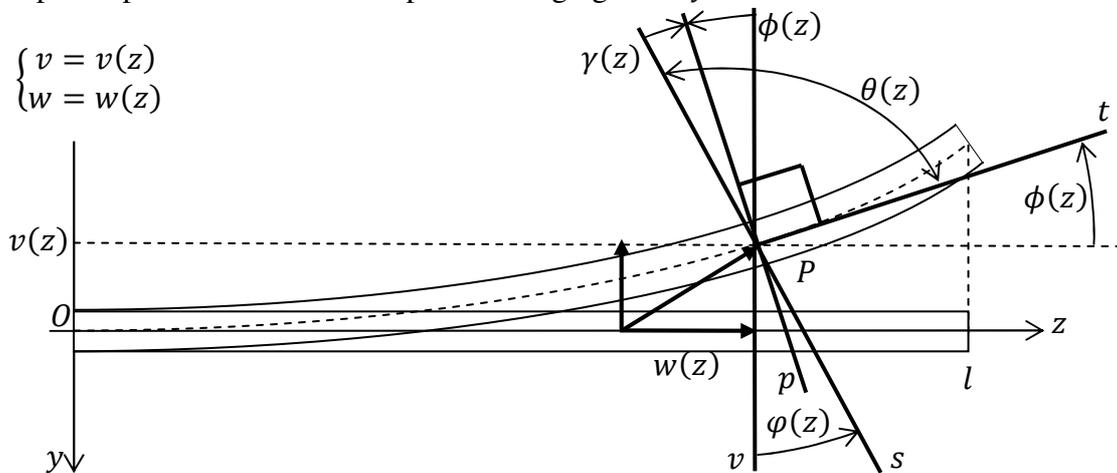
Naturalmente si può iterare il procedimento per ricavare le reazioni di tutti e 11 i pendoli.

Capitolo 20. Linea termoelastica

20.1. Introduzione. In questo capitolo studiamo il legame fra la deformazione di una trave elastica ad asse rettilineo e la causa della deformazione, ovvero le tensioni interne e i gradienti termici. Questa analisi porta alla definizione dell'equazione dell'asse geometrico deformato, ovvero di quella che viene detta linea termoelastica. Inizialmente ricavo questa equazione sviluppando *ex novo* un'analisi indipendente da quanto visto nei capitoli sulla teoria del solido elastico; nel capitolo successivo dimostro come allo stesso risultato si possa pervenire adattando alla trave ad asse rettilineo la teoria del cilindro di *Saint-Venant*.

20.2. Spostamenti. Consideriamo una trave ad asse rettilineo coincidente con il segmento $[0, l]$ dell'asse z , e ammettiamo che le deformazioni avvengano nel piano yz , se si assume che la sollecitazione sia piana, di piano yz . A seguito della deformazione i punti della trave sono soggetti a un campo di spostamenti le cui componenti lungo gli assi yz sono

$$20.1) \begin{cases} v = v(z) \\ w = w(z) \end{cases}$$



mentre la sezione si ruota di un'anomalia $\phi(z)$, assunta positiva se antioraria, essendo la retta s la traccia della sezione sul piano yz . Le tre funzioni introdotte descrivono completamente lo spostamento della trave, mentre per avere una descrizione puntuale della deformazione della stessa si ricorre alle derivate di esse.

20.3. Deformazioni. Definisco dilatazione la funzione

$$20.2) \quad \varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz}$$

Si introducono poi la retta t – tangente all'asse geometrico – la retta p perpendicolare a t , e la retta s la quale è la traccia della sezione sul piano yz . Si individuano così l'anomalia $\phi(z)$, definita dalla condizione

$$20.3) \quad \tan \phi(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$$

e l'angolo $\theta(z)$ tra s e t . Si definisce allora lo scorrimento angolare

$$20.4) \quad \gamma(z) = \frac{\pi}{2} - \theta(z) = \phi(z) - \phi(z)$$

Considerando la 20.3 si approssima l'angolo $\phi(z)$ con la sua tangente, ponendo

$$20.5) \quad \gamma(z) = \tan \phi(z) - \phi(z) = -\frac{dv(z)}{dz} - \phi(z)$$

dove si intende che le anomalie $\phi(z), \varphi(z), \gamma(z)$ hanno verso positivo antiorario. Si definisce incurvamento dell'asse la derivata dell'angolo di rotazione della sezione:

$$20.6) \quad \chi(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}$$

Ricapitolando abbiamo le equazioni di compatibilità cinematica

$$20.7) \quad \begin{cases} \varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz} \\ \gamma(z) = -\frac{dv(z)}{dz} - \phi(z) \\ \chi(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} \end{cases}$$

20.4. Elasticità lineare. Si parla di elasticità lineare per il materiale che costituisce la trave nel caso in cui siano definite le tre funzioni di rigidezza $A(z), C(z), B(z)$ tali che risulti

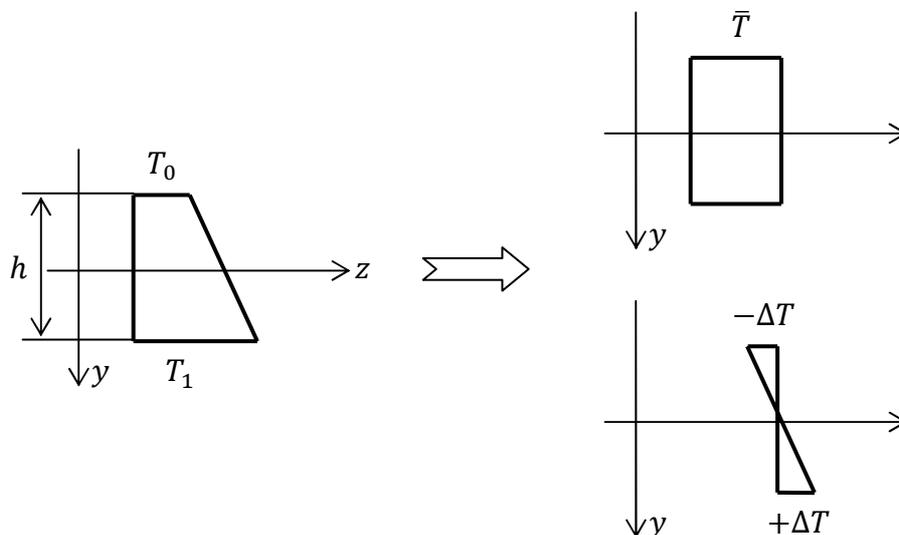
$$20.8) \quad \begin{cases} N(z) = A(z)\varepsilon_M(z) \\ T(z) = C(z)\gamma(z) \\ M(z) = B(z)\chi_M(z) \end{cases}$$

In particolare

- $A(z)$ è la rigidezza assiale, con dimensione di forza;
- $C(z)$ è la rigidezza al taglio, con dimensione di forza;
- $B(z)$ è la rigidezza alla flessione, con dimensione di forza per lunghezza al quadrato.

Il pedice in ε_M, χ_M sta a specificare che queste deformazioni sono quelle dovute alle caratteristiche di sollecitazione $N(z), M(z)$ rispettivamente; ciò per distinguerle dalle analoghe deformazioni di origine termica (trattate in seguito) le quali – se presenti – non verificano le 20.8.

20.5. Deformazioni termiche. Consideriamo il caso in cui vi sia un gradiente termico



lungo la direzione \mathbf{y} . Il suo effetto sarà quello di produrre una dilatazione termica, da sommare alla **20.2**, e un incurvamento termico dell'asse, da sommare alla **20.6**. Per la definizione analitica di queste due funzioni si consideri nella sezione z un campo termico come quello definito in figura, il quale vari linearmente dal valore T_0 al valore T_1 . Esso può essere considerato la somma di un campo termico costante di valore \bar{T} e di un campo termico che vari linearmente da $-\Delta T$ a $+\Delta T$, dove sia

$$20.9) \quad \begin{cases} \bar{T} = \frac{T_0 + T_1}{2} \\ \Delta T = \frac{T_1 - T_0}{2} \end{cases}$$

La componente costante del campo termico è responsabile di una dilatazione termica

$$20.10) \quad \varepsilon_T(z) = \alpha \bar{T}(z)$$

proporzionale a \bar{T} secondo la costante di dilatazione termica α , legata al tipo di materiale e – a rigore – dipendente anch'essa dal valore di z . La componente linearmente variabile del campo termico è responsabile di un incurvamento termico

$$20.11) \quad \chi_T(z) = \frac{2\alpha\Delta T(z)}{h}$$

il cui significato è quello di derivata dell'angolo di rotazione della sezione per cause termiche – che indichiamo θ_T – rispetto z ; infatti si ha

$$\theta_T \cong \tan \theta_T = \frac{2\alpha\Delta T(z)}{h} dz \Rightarrow \frac{d\theta_T}{dz} = \frac{2\alpha\Delta T(z)}{h}$$

Se ε, χ indicano la dilatazione e l'incurvamento complessivo (termici e meccanici) allora si ha

$$20.12) \quad \begin{cases} \varepsilon(z) = \varepsilon_M(z) + \varepsilon_T(z) \\ \chi(z) = \chi_M(z) + \chi_T(z) \end{cases}$$

Sostituendo poi le 20.12 nella 20.8 abbiamo le equazioni costitutive termoelastiche lineari:

$$20.13) \quad \begin{cases} N(z) = A(z)(\varepsilon(z) - \varepsilon_T(z)) \\ T(z) = C(z)\gamma(z) \\ M(z) = B(z)(\chi(z) - \chi_T(z)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) = \varepsilon(z) \\ \frac{T(z)}{C(z)} = \gamma(z) \\ \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) = \chi(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) \\ \frac{d\theta(z)}{dz} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) \end{cases}$$

20.6. Ipotesi di Eulero-Bernoulli. In genere si ammette che lo scorrimento angolare sia nullo, cioè che l'asse geometrico resti ortogonale punto per punto alla sezione. In tal caso la **20.4** porge

$$20.14) \quad 0 = -\frac{dv(z)}{dz} - \varphi(z)$$

Le equazioni di compatibilità cinematica 20.7 si scrivono

$$20.15) \begin{cases} \varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz} \\ \varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz} \\ \chi(z) = -\frac{d^2v(z)}{dz^2} \end{cases}$$

mentre le 20.13 si scrivono

$$20.16) \begin{cases} N(z) = A(z)(\varepsilon(z) - \varepsilon_T(z)) \\ C(z) \rightarrow \infty \\ M(z) = B(z)(\chi(z) - \chi_T(z)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) = \varepsilon(z) \\ C(z) \rightarrow \infty \\ \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) = \chi(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) \\ C(z) \rightarrow \infty \\ -\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) \end{cases}$$

Questa ipotesi semplificativa prende il nome di ipotesi di Eulero-Bernoulli.

20.7. Sistema della linea termoelastica. Prendiamo le equazioni di bilancio locale **17.20**. Sostituendo in esse le equazioni costitutive termoelastiche lineari **20.13** abbiamo

$$20.17) \begin{cases} \frac{dT(z)}{dz} + p = 0 \\ \frac{d\left(A(z)(\varepsilon(z) - \varepsilon_T(z))\right)}{dz} + q = 0 \\ \frac{d\left(B(z)(\chi(z) - \chi_T(z))\right)}{dz} + m - T(z) = 0 \end{cases}$$

E considerando le equazioni di compatibilità cinematica **20.7** si ha

$$20.18) \begin{cases} \frac{dT(z)}{dz} + p = 0 \\ \frac{d\left(A(z)\left(\frac{dw(z)}{dz} - \varepsilon_T(z)\right)\right)}{dz} + q = 0 \\ \frac{d\left(B(z)\left(\frac{d\varphi(z)}{dz} - \chi_T(z)\right)\right)}{dz} + m - T(z) = 0 \end{cases}$$

Assumendo poi valida l'ipotesi di Eulero-Bernoulli – ovvero sostituendo le **20.15** nelle **20.18** – si ha

$$20.19) \begin{cases} \frac{dT(z)}{dz} + p = 0 \\ \frac{d\left(A(z)\left(\frac{dw(z)}{dz} - \varepsilon_T(z)\right)\right)}{dz} + q = 0 \\ \frac{d\left(B(z)\left(-\frac{d^2v(z)}{dz^2} - \chi_T(z)\right)\right)}{dz} + m - T(z) = 0 \end{cases}$$

Derivando la terza delle **20.19** abbiamo

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{d^2 \left(B(z) \left(-\frac{d^2 v(z)}{dz^2} - \chi_T(z) \right) \right)}{dz^2} + \frac{dm(z)}{dz}$$

e sostituendola nella prima delle 20.19 abbiamo

$$20.20) \begin{cases} \frac{d^2 \left(B(z) \left(\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + \chi_T(z) \right) \right)}{dz^2} - \frac{dm(z)}{dz} - p(z) = 0 \\ \frac{d \left(A(z) \left(\frac{dw(z)}{dz} - \varepsilon_T(z) \right) \right)}{dz} + q(z) = 0 \end{cases}$$

ottenendo in definitiva il sistema della linea termoelastica per spostamenti assiali e trasversali.

20.8. Sistema della linea termoelastica per trave puramente flessibile.

In molte circostanze la dilatazione è trascurabile rispetto alla flessione dell'asse: si parla allora di trave puramente flessibile e le 20.20 si riducono all'equazione della linea termoelastica per trave puramente flessibile

$$20.21) \frac{d^2 \left(B(z) \left(\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + \chi_T(z) \right) \right)}{dz^2} - \frac{dm(z)}{dz} - p(z) = 0$$

20.9. Tabella riassuntiva. Nello schema seguente riporto i passaggi salienti dell'analisi condotta sin qui.

Equazioni di compatibilità cinematica	Equazioni indefinite di equilibrio	Elasticità lineare
$\begin{cases} \varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz} \\ \gamma(z) = -\frac{dv(z)}{dz} - \varphi(z) \\ \chi(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{dT(z)}{dz} + p = 0 \\ \frac{dN(z)}{dz} + q = 0 \\ \frac{dM(z)}{dz} + m - T(z) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} N(z) = A(z)\varepsilon_M(z) \\ T(z) = C(z)\gamma(z) \\ M(z) = B(z)\chi_M(z) \end{cases}$
Equazioni costitutive termoelastiche lineari		
$\begin{cases} N(z) = A(z)(\varepsilon(z) - \varepsilon_T(z)) \\ T(z) = C(z)\gamma(z) \\ M(z) = B(z)(\chi(z) - \chi_T(z)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) = \varepsilon(z) \\ \frac{T(z)}{C(z)} = \gamma(z) \\ \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) = \chi(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) \\ \frac{d\theta(z)}{dz} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) \end{cases}$		
$\varepsilon_T(z) = \alpha \bar{T}(z) \quad \chi_T(z) = \frac{2\alpha \Delta T(z)}{h}$		

Ipotesi di Eulero-Bernoulli

$$\gamma(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz} \\ \varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz} \\ \chi(z) = -\frac{d^2v(z)}{dz^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) \\ C(z) \rightarrow \infty \\ -\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) \end{cases}$$

Sistema della linea termoelastica

$$\begin{cases} \frac{d^2 \left(B(z) \left(\frac{d^2v(z)}{dz^2} + \chi_T(z) \right) \right)}{dz^2} - \frac{dm(z)}{dz} - p(z) = 0 \Leftrightarrow -\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) \\ \frac{d \left(A(z) \left(\frac{dw(z)}{dz} - \varepsilon_T(z) \right) \right)}{dz} + q(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) \end{cases}$$

Sistema della linea termoelastica per trave puramente flessibile

$$\frac{d^2 \left(B(z) \left(\frac{d^2v(z)}{dz^2} + \chi_T(z) \right) \right)}{dz^2} - \frac{dm(z)}{dz} - p(z) = 0 \Leftrightarrow -\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z)$$

In assenza poi di deformazione termica e di momenti distribuiti – se la rigidezza è costante – si ha l'equazione elastica semplificata

$$B \frac{d^4v(z)}{dz^4} = p(z) \Leftrightarrow B \frac{d^2v(z)}{dz^2} = -M(z)$$

Rotazione della sezione

Le equazioni di compatibilità cinematica forniscono per la rotazione della sezione l'espressione

$$\varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz} - \gamma(z)$$

Che nel caso delle ipotesi di Eulero-Bernoulli si riduce alla

$$\varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$$

Con le convenzioni adottate la rotazione è positiva se antioraria.

Funzioni di rigidezza e moduli elastici

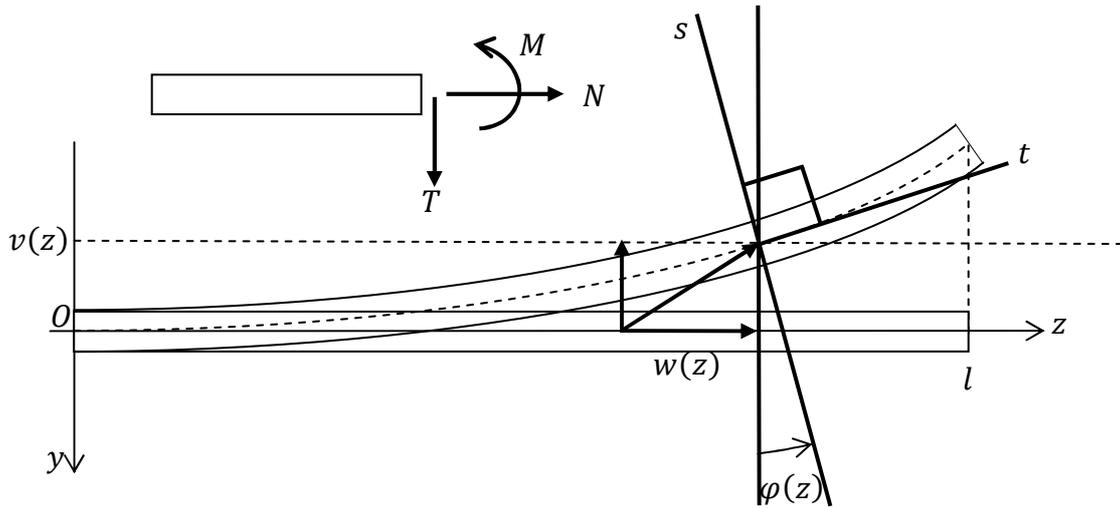
$$A(z) = SE(z) \quad E(z): \text{modulo di Young}$$

$$B(z) = E(z)I_x \quad I_x: \text{momento d'inerzia della sezione rispetto } x$$

$$C(z) = SG(z) \quad G(z): \text{modulo d'elasticità tangenziale}$$

$$S: \text{area della sezione}$$

Convenzione sui segni (assunta l'ipotesi di Eulero-Bernoulli)



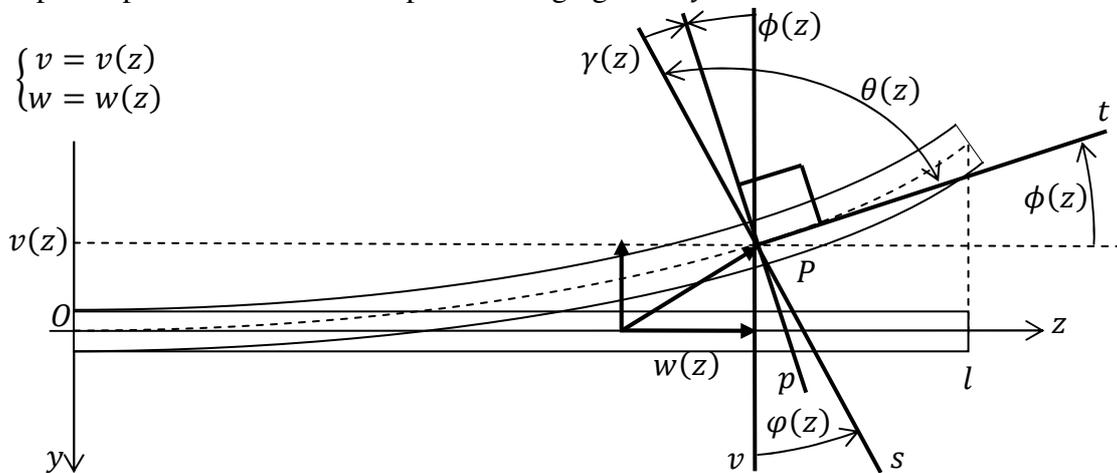
La rotazione $\varphi(z)$ della sezione è considerata positiva se antioraria.

Capitolo 20. Linea termoelastica

20.1. Introduzione. In questo capitolo studiamo il legame fra la deformazione di una trave elastica ad asse rettilineo e la causa della deformazione, ovvero le tensioni interne e i gradienti termici. Questa analisi porta alla definizione dell'equazione dell'asse geometrico deformato, ovvero di quella che viene detta linea termoelastica. Inizialmente ricavo questa equazione sviluppando *ex novo* un'analisi indipendente da quanto visto nei capitoli sulla teoria del solido elastico; nel capitolo successivo dimostro come allo stesso risultato si possa pervenire adattando alla trave ad asse rettilineo la teoria del cilindro di *Saint-Venant*.

20.2. Spostamenti. Consideriamo una trave ad asse rettilineo coincidente con il segmento $[0, l]$ dell'asse z , e ammettiamo che le deformazioni avvengano nel piano yz , se si assume che la sollecitazione sia piana, di piano yz . A seguito della deformazione i punti della trave sono soggetti a un campo di spostamenti le cui componenti lungo gli assi yz sono

$$20.1) \begin{cases} v = v(z) \\ w = w(z) \end{cases}$$



mentre la sezione si ruota di un'anomalia $\phi(z)$, assunta positiva se antioraria, essendo la retta s la traccia della sezione sul piano yz . Le tre funzioni introdotte descrivono completamente lo spostamento della trave, mentre per avere una descrizione puntuale della deformazione della stessa si ricorre alle derivate di esse.

20.3. Deformazioni. Definisco dilatazione la funzione

$$20.2) \quad \varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz}$$

Si introducono poi la retta t – tangente all'asse geometrico – la retta p perpendicolare a t , e la retta s la quale è la traccia della sezione sul piano yz . Si individuano così l'anomalia $\phi(z)$, definita dalla condizione

$$20.3) \quad \tan \phi(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$$

e l'angolo $\theta(z)$ tra s e t . Si definisce allora lo scorrimento angolare

$$20.4) \quad \gamma(z) = \frac{\pi}{2} - \theta(z) = \phi(z) - \phi'(z)$$

Considerando la 20.3 si approssima l'angolo $\phi(z)$ con la sua tangente, ponendo

$$20.5) \quad \gamma(z) = \tan \phi(z) - \phi(z) = -\frac{dv(z)}{dz} - \phi(z)$$

dove si intende che le anomalie $\phi(z), \varphi(z), \gamma(z)$ hanno verso positivo antiorario. Si definisce incurvamento dell'asse la derivata dell'angolo di rotazione della sezione:

$$20.6) \quad \chi(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}$$

Ricapitolando abbiamo le equazioni di compatibilità cinematica

$$20.7) \quad \begin{cases} \varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz} \\ \gamma(z) = -\frac{dv(z)}{dz} - \phi(z) \\ \chi(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} \end{cases}$$

20.4. Elasticità lineare. Si parla di elasticità lineare per il materiale che costituisce la trave nel caso in cui siano definite le tre funzioni di rigidezza $A(z), C(z), B(z)$ tali che risulti

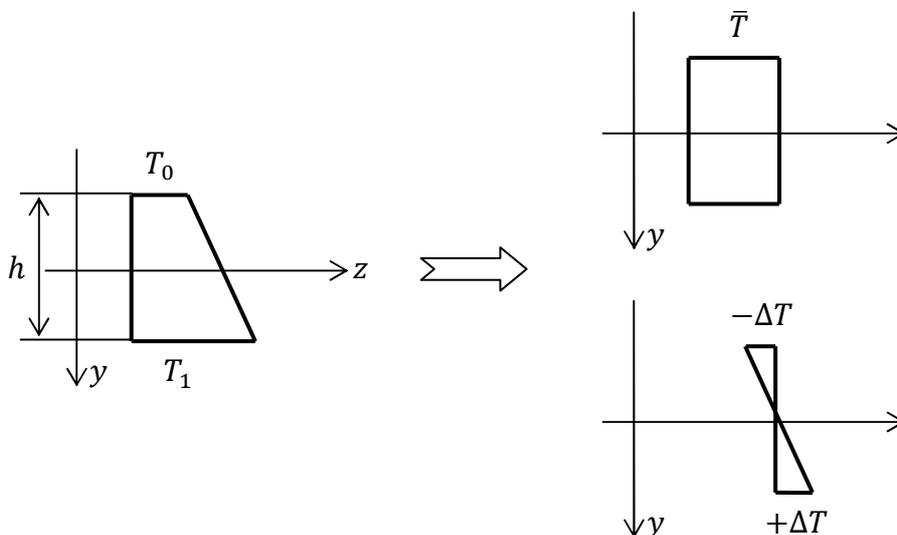
$$20.8) \quad \begin{cases} N(z) = A(z)\varepsilon_M(z) \\ T(z) = C(z)\gamma(z) \\ M(z) = B(z)\chi_M(z) \end{cases}$$

In particolare

- $A(z)$ è la rigidezza assiale, con dimensione di forza;
- $C(z)$ è la rigidezza al taglio, con dimensione di forza;
- $B(z)$ è la rigidezza alla flessione, con dimensione di forza per lunghezza al quadrato.

Il pedice in ε_M, χ_M sta a specificare che queste deformazioni sono quelle dovute alle caratteristiche di sollecitazione $N(z), M(z)$ rispettivamente; ciò per distinguerle dalle analoghe deformazioni di origine termica (trattate in seguito) le quali – se presenti – non verificano le 20.8.

20.5. Deformazioni termiche. Consideriamo il caso in cui vi sia un gradiente termico



lungo la direzione \mathbf{y} . Il suo effetto sarà quello di produrre una dilatazione termica, da sommare alla **20.2**, e un incurvamento termico dell'asse, da sommare alla **20.6**. Per la definizione analitica di queste due funzioni si consideri nella sezione z un campo termico come quello definito in figura, il quale vari linearmente dal valore T_0 al valore T_1 . Esso può essere considerato la somma di un campo termico costante di valore \bar{T} e di un campo termico che vari linearmente da $-\Delta T$ a $+\Delta T$, dove sia

$$20.9) \quad \begin{cases} \bar{T} = \frac{T_0 + T_1}{2} \\ \Delta T = \frac{T_1 - T_0}{2} \end{cases}$$

La componente costante del campo termico è responsabile di una dilatazione termica

$$20.10) \quad \varepsilon_T(z) = \alpha \bar{T}(z)$$

proporzionale a \bar{T} secondo la costante di dilatazione termica α , legata al tipo di materiale e – a rigore – dipendente anch'essa dal valore di z . La componente linearmente variabile del campo termico è responsabile di un incurvamento termico

$$20.11) \quad \chi_T(z) = \frac{2\alpha\Delta T(z)}{h}$$

il cui significato è quello di derivata dell'angolo di rotazione della sezione per cause termiche – che indichiamo θ_T – rispetto z ; infatti si ha

$$\theta_T \cong \tan \theta_T = \frac{2\alpha\Delta T(z)}{h} dz \Rightarrow \frac{d\theta_T}{dz} = \frac{2\alpha\Delta T(z)}{h}$$

Se ε, χ indicano la dilatazione e l'incurvamento complessivo (termici e meccanici) allora si ha

$$20.12) \quad \begin{cases} \varepsilon(z) = \varepsilon_M(z) + \varepsilon_T(z) \\ \chi(z) = \chi_M(z) + \chi_T(z) \end{cases}$$

Sostituendo poi le 20.12 nella 20.8 abbiamo le equazioni costitutive termoelastiche lineari:

$$20.13) \quad \begin{cases} N(z) = A(z)(\varepsilon(z) - \varepsilon_T(z)) \\ T(z) = C(z)\gamma(z) \\ M(z) = B(z)(\chi(z) - \chi_T(z)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) = \varepsilon(z) \\ \frac{T(z)}{C(z)} = \gamma(z) \\ \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) = \chi(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) \\ \frac{d\theta(z)}{dz} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) \end{cases}$$

20.6. Ipotesi di Eulero-Bernoulli. In genere si ammette che lo scorrimento angolare sia nullo, cioè che l'asse geometrico resti ortogonale punto per punto alla sezione. In tal caso la **20.4** porge

$$20.14) \quad 0 = -\frac{dv(z)}{dz} - \varphi(z)$$

Le equazioni di compatibilità cinematica 20.7 si scrivono

$$20.15) \begin{cases} \varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz} \\ \varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz} \\ \chi(z) = -\frac{d^2v(z)}{dz^2} \end{cases}$$

mentre le 20.13 si scrivono

$$20.16) \begin{cases} N(z) = A(z)(\varepsilon(z) - \varepsilon_T(z)) \\ C(z) \rightarrow \infty \\ M(z) = B(z)(\chi(z) - \chi_T(z)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) = \varepsilon(z) \\ C(z) \rightarrow \infty \\ \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) = \chi(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) \\ C(z) \rightarrow \infty \\ -\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) \end{cases}$$

Questa ipotesi semplificativa prende il nome di ipotesi di Eulero-Bernoulli.

20.7. Sistema della linea termoelastica. Prendiamo le equazioni di bilancio locale **17.20**. Sostituendo in esse le equazioni costitutive termoelastiche lineari **20.13** abbiamo

$$20.17) \begin{cases} \frac{dT(z)}{dz} + p = 0 \\ \frac{d\left(A(z)(\varepsilon(z) - \varepsilon_T(z))\right)}{dz} + q = 0 \\ \frac{d\left(B(z)(\chi(z) - \chi_T(z))\right)}{dz} + m - T(z) = 0 \end{cases}$$

E considerando le equazioni di compatibilità cinematica **20.7** si ha

$$20.18) \begin{cases} \frac{dT(z)}{dz} + p = 0 \\ \frac{d\left(A(z)\left(\frac{dw(z)}{dz} - \varepsilon_T(z)\right)\right)}{dz} + q = 0 \\ \frac{d\left(B(z)\left(\frac{d\varphi(z)}{dz} - \chi_T(z)\right)\right)}{dz} + m - T(z) = 0 \end{cases}$$

Assumendo poi valida l'ipotesi di Eulero-Bernoulli – ovvero sostituendo le **20.15** nelle **20.18** – si ha

$$20.19) \begin{cases} \frac{dT(z)}{dz} + p = 0 \\ \frac{d\left(A(z)\left(\frac{dw(z)}{dz} - \varepsilon_T(z)\right)\right)}{dz} + q = 0 \\ \frac{d\left(B(z)\left(-\frac{d^2v(z)}{dz^2} - \chi_T(z)\right)\right)}{dz} + m - T(z) = 0 \end{cases}$$

Derivando la terza delle **20.19** abbiamo

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{d^2 \left(B(z) \left(-\frac{d^2 v(z)}{dz^2} - \chi_T(z) \right) \right)}{dz^2} + \frac{dm(z)}{dz}$$

e sostituendola nella prima delle 20.19 abbiamo

$$20.20) \begin{cases} \frac{d^2 \left(B(z) \left(\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + \chi_T(z) \right) \right)}{dz^2} - \frac{dm(z)}{dz} - p(z) = 0 \\ \frac{d \left(A(z) \left(\frac{dw(z)}{dz} - \varepsilon_T(z) \right) \right)}{dz} + q(z) = 0 \end{cases}$$

ottenendo in definitiva il sistema della linea termoelastica per spostamenti assiali e trasversali.

20.8. Sistema della linea termoelastica per trave puramente flessibile.

In molte circostanze la dilatazione è trascurabile rispetto alla flessione dell'asse: si parla allora di trave puramente flessibile e le 20.20 si riducono all'equazione della linea termoelastica per trave puramente flessibile

$$20.21) \frac{d^2 \left(B(z) \left(\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + \chi_T(z) \right) \right)}{dz^2} - \frac{dm(z)}{dz} - p(z) = 0$$

20.9. Tabella riassuntiva. Nello schema seguente riporto i passaggi salienti dell'analisi condotta sin qui.

Equazioni di compatibilità cinematica	Equazioni indefinite di equilibrio	Elasticità lineare
$\begin{cases} \varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz} \\ \gamma(z) = -\frac{dv(z)}{dz} - \varphi(z) \\ \chi(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{dT(z)}{dz} + p = 0 \\ \frac{dN(z)}{dz} + q = 0 \\ \frac{dM(z)}{dz} + m - T(z) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} N(z) = A(z)\varepsilon_M(z) \\ T(z) = C(z)\gamma(z) \\ M(z) = B(z)\chi_M(z) \end{cases}$
Equazioni costitutive termoelastiche lineari		
$\begin{cases} N(z) = A(z)(\varepsilon(z) - \varepsilon_T(z)) \\ T(z) = C(z)\gamma(z) \\ M(z) = B(z)(\chi(z) - \chi_T(z)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) = \varepsilon(z) \\ \frac{T(z)}{C(z)} = \gamma(z) \\ \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) = \chi(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) \\ \frac{d\theta(z)}{dz} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) \end{cases}$		
$\varepsilon_T(z) = \alpha \bar{T}(z) \quad \chi_T(z) = \frac{2\alpha \Delta T(z)}{h}$		

Ipotesi di Eulero-Bernoulli

$$\gamma(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz} \\ \varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz} \\ \chi(z) = -\frac{d^2v(z)}{dz^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) \\ C(z) \rightarrow \infty \\ -\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) \end{cases}$$

Sistema della linea termoelastica

$$\begin{cases} \frac{d^2 \left(B(z) \left(\frac{d^2v(z)}{dz^2} + \chi_T(z) \right) \right)}{dz^2} - \frac{dm(z)}{dz} - p(z) = 0 \Leftrightarrow -\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z) \\ \frac{d \left(A(z) \left(\frac{dw(z)}{dz} - \varepsilon_T(z) \right) \right)}{dz} + q(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{A(z)} + \varepsilon_T(z) \end{cases}$$

Sistema della linea termoelastica per trave puramente flessibile

$$\frac{d^2 \left(B(z) \left(\frac{d^2v(z)}{dz^2} + \chi_T(z) \right) \right)}{dz^2} - \frac{dm(z)}{dz} - p(z) = 0 \Leftrightarrow -\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{B(z)} + \chi_T(z)$$

In assenza poi di deformazione termica e di momenti distribuiti – se la rigidezza è costante – si ha l'equazione elastica semplificata

$$B \frac{d^4v(z)}{dz^4} = p(z) \Leftrightarrow B \frac{d^2v(z)}{dz^2} = -M(z)$$

Rotazione della sezione

Le equazioni di compatibilità cinematica forniscono per la rotazione della sezione l'espressione

$$\varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz} - \gamma(z)$$

Che nel caso delle ipotesi di Eulero-Bernoulli si riduce alla

$$\varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$$

Con le convenzioni adottate la rotazione è positiva se antioraria.

Funzioni di rigidezza e moduli elastici

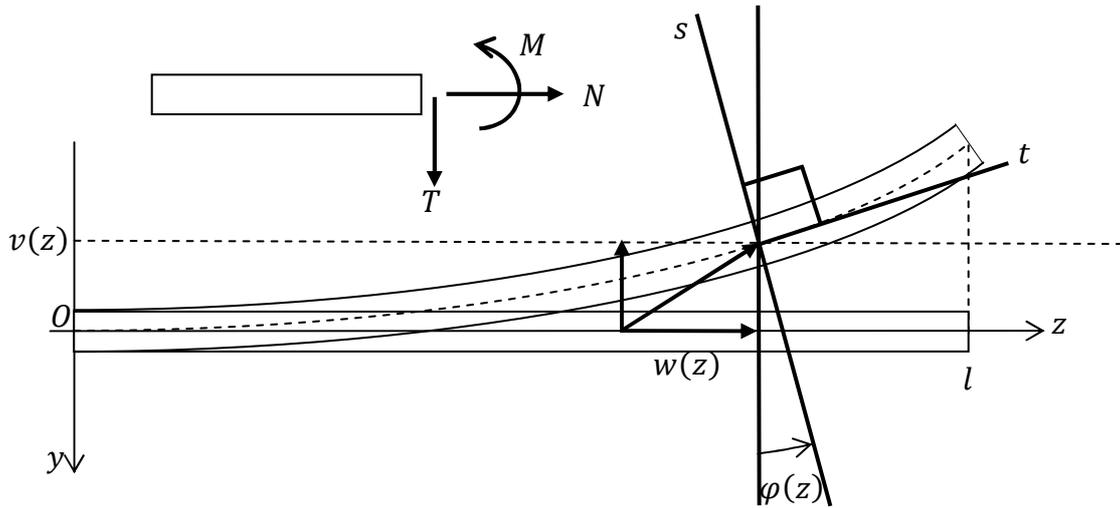
$$A(z) = SE(z) \quad E(z): \text{modulo di Young}$$

$$B(z) = E(z)I_x \quad I_x: \text{momento d'inerzia della sezione rispetto } x$$

$$C(z) = SG(z) \quad G(z): \text{modulo d'elasticità tangenziale}$$

$$S: \text{area della sezione}$$

Convenzione sui segni (assunta l'ipotesi di Eulero-Bernoulli)



La rotazione $\varphi(z)$ della sezione è considerata positiva se antioraria.

Capitolo 21. Cilindro di Saint Venant e linea elastica

21.1. Introduzione. In questo capitolo cerco di ottenere le equazioni della linea elastica¹ – già ricavate attraverso l'analisi del capitolo precedente – ripartendo questa volta dai risultati ottenuti per il cilindro di Saint Venant. Questo genere di analisi prende il nome di **teoria tecnica della trave**.

21.2. Ipotesi fondamentale della teoria tecnica della trave. I risultati ottenuti nell'ambito delle sollecitazioni semplici (capitoli 8,9,10,11) sono stati ricavati per quello che abbiamo chiamato cilindro di Saint Venant, ovvero per un solido

- ad asse rettilineo
- a sezione costante
- con lunghezza preponderante sulle dimensioni della sezione
- sollecitato solo sulle sezioni estreme

Eppure l'ipotesi fondamentale della teoria tecnica della trave è che data una trave

- ad asse non necessariamente rettilineo
- a sezione non necessariamente costante
- sollecitata, in generale, sia sulle sezioni estreme che sul mantello

allora è sempre possibile scegliere punto per punto un tronco di trave abbastanza piccolo da poter essere considerato

- ad asse rettilineo
- a sezione costante
- sollecitato solo sulle sezioni estreme

al quale applicare i risultati ottenuti per il cilindro di Saint Venant, pur non avendo evidentemente lunghezza preponderante rispetto alle dimensioni della sezione (anzi, tutt'altro).

Questo tipo di impostazione non sembrerebbe giustificato, tuttavia pare che nella pratica dia ottimi risultati e su di esso si baserà tutta la trattazione seguente.

21.3. Il problema delle travi inflesse. Intanto definisco **asse elastico** di una trave il luogo dei centri di taglio delle sezioni. Consideriamo allora una trave

- con asse rettilineo

caricata con tagli

- paralleli fra loro
- ortogonali all'asse elastico
- applicati in punti dell'asse elastico

¹ In questo capitolo non consideriamo il contributo della deformazione termica, per cui parliamo di linea elastica, piuttosto che di linea termoelastica.

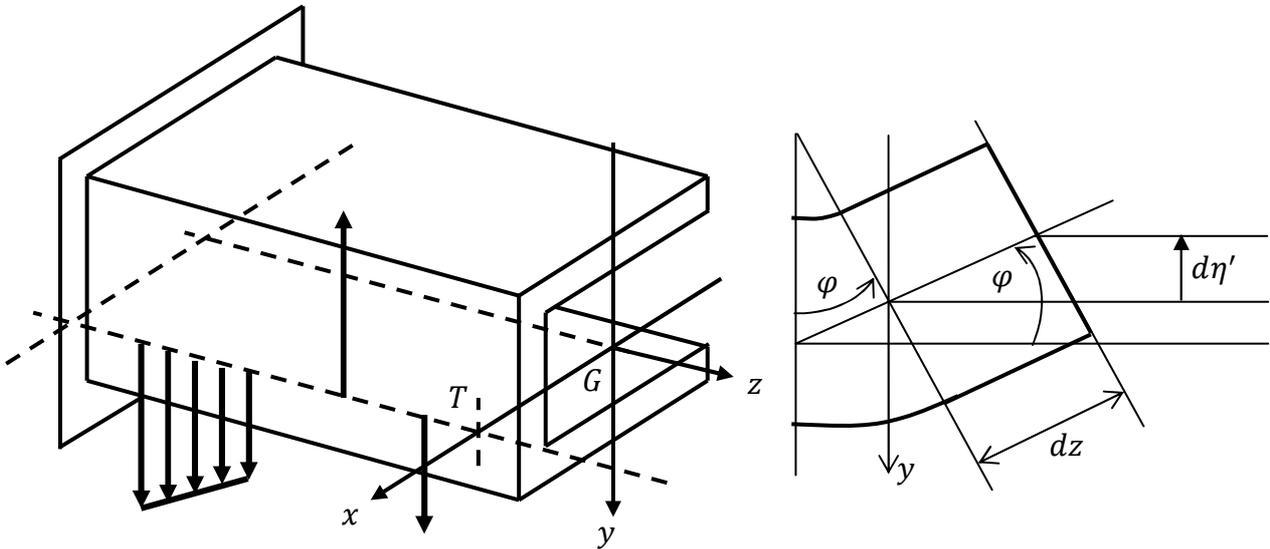
Questo problema elastico prende il nome di **problema delle travi inflesse** e in figura abbiamo un esempio di questo genere di situazione, nel caso di una sezione a C. L'asse elastico è quello tratteggiato passante per T (centro di taglio della sezione estrema). I tagli, distribuiti e concentrati sono applicati in punti dell'asse elastico. Gli assi x, y, z sono, al solito, orientati secondo le direzioni centrali di inerzia della sezione. Utilizzando la terza delle **17.20**, che in questo caso, non essendovi momenti esterni, si scrive

$$21.1) \quad \frac{dM(z)}{dz} - T(z) = 0$$

possiamo ricavare la funzione $M_x = M_x(z)$. Poi – in base alla **8.48** – possiamo scrivere

$$21.2) \quad d\varphi_x(z, dz) = \frac{M_x(z)}{I_x E} dz$$

che fornisce la rotazione elementare intorno all'asse x della sezione in $z + dz$ rispetto alla sezione in z , dovuta all'azione del momento flettente prodotto a sua volta dai tagli agenti sulla trave.



Considerando invece la seconda delle **11.38** abbiamo lo slittamento elementare

$$21.3) \quad d\eta(z, dz) = \frac{\chi_y T_y(z)}{GS}$$

dovuto al taglio, dove la funzione $T_y(z)$ si ottiene integrando la prima delle **17.20** e utilizzando la seconda delle **17.21** nel caso vi siano tagli concentrati. Ma oltre a questo slittamento va considerato anche quello dovuto alla rotazione stessa della sezione: considerando la figura questo slittamento risulta esprimibile come

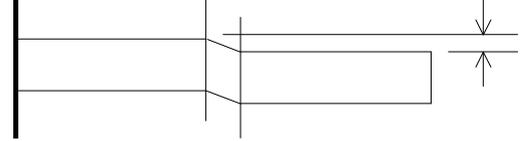
$$21.4) \quad d\eta'(z, dz) = -\varphi_x(z) dz$$

Il segno meno è giustificato dal fatto che per una rotazione positiva la sezione si sposta verso le y negative. Dunque, messe insieme le **21.2, 21.3, 21.4** si ha che lo spostamento della trave a seguito della deformazione prodotta dai tagli è descritto dalle equazioni differenziali

$$21.5) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_x(z)}{dz} = \frac{M_x(z)}{I_x E} \\ \frac{dv(z)}{dz} = \frac{\chi_y T_y(z)}{GS} - \varphi_x(z) \end{cases}$$

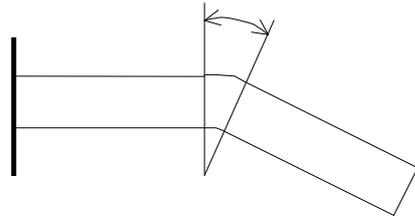
dove $v(z)$ è la componente dello spostamento lungo y che – lo si ricorda – si assume puntare verso il basso. Con considerazioni elementari di carattere geometrico (vedi figura) si può comprendere come nella pratica il contributo $d\eta$ dello slittamento produca, considerando tutta la trave, effetti trascurabili rispetto al contributo $d\eta'$ per cui, salvo casi particolari, le equazioni da considerare non sono le **21.5** ma la loro versione semplificata:

$$21.6) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_x(z)}{dz} = \frac{M_x(z)}{I_x E} \\ \frac{dv(z)}{dz} = -\varphi_x(z) \end{cases}$$



Derivando la seconda delle **21.6e** sostituendovi la prima si ottengono in conclusione le due equazioni differenziali

$$21.7) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_x(z)}{dz} = \frac{M_x(z)}{I_x E} \Leftrightarrow \varphi_x(z) = -\frac{dv(z)}{dz} \\ \frac{d^2 v(z)}{dz^2} EI_x = -M_x(z) \end{cases}$$



la prima delle quali fornisce l'angolo di rotazione della generica sezione mentre la seconda fornisce la deformata dell'asse geometrico ovvero, come si dice, la **linea elastica** della trave.

Si osservi ora che la linea elastica si può ricavare però anche non passando dalla determinazione del momento flettente, infatti dalle relazioni differenziali fra le caratteristiche di sollecitazione si ha

$$\begin{cases} \frac{dT(z)}{dz} + p(z) = 0 \\ \frac{dM(z)}{dz} - T(z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dT(z)}{dz} = -p(z) \\ \frac{d^2 M(z)}{dz^2} = \frac{dT(z)}{dz} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 M(z)}{dz^2} = -p(z)$$

Per cui, sostituendo nella seconda delle **21.7** si ha

$$21.8) \quad \frac{d^4 v(z)}{dz^4} EI_x = p(z)$$

Si vuole ora provare come la seconda delle **21.7** sia equivalente all'equazione della linea termoelastica ricavata – nel precedente capitolo – per travi puramente flessibili, ovvero alla **20.21**. Se infatti nella **20.21** si esclude il contributo termico alla deformazione e si pone nulla la coppia distribuita $m(z)$ (o la sua derivata), allora si ha

$$\frac{d^2 \left(B(z) \left(\frac{d^2 v(z)}{dz^2} \right) \right)}{dz^2} - p(z) = 0$$

Considerando poi che la rigidezza alla flessione B è data da EI_x , allora si ottiene ancora

$$\frac{d^2 \left(EI_x \left(\frac{d^2 v(z)}{dz^2} \right) \right)}{dz^2} - p(z) = 0$$

Assunto poi che il modulo di Young sia costante in definitiva la **20.21** si scrive

$$\frac{d^4 v(z)}{dz^4} EI_x = p(z)$$

cioè proprio la **21.8**. Quindi l'analisi esposta in questo capitolo e quella del capitolo precedente – almeno per quanto riguarda le travi puramente flessibili – sono equivalenti. In questo capitolo non si è considerato il fenomeno della dilatazione termica.

21.4. Torsione non uniforme. Riconsideriamo il problema delle travi inflesse: se cade l'ipotesi che i tagli siano applicati nei punti dell'asse elastico, allora sarà necessario spostare i tagli sull'asse elastico e introdurre un opportuno momento torcente che, in generale, varierà con z . Indicando $M_t = M_t(z)$ tale funzione, in base alla **9.24** applicata al tronco di trave di lunghezza dz , dovrà valere la relazione

$$d\theta(z, dz) = \frac{M_t(z)}{GJ_t} dz$$

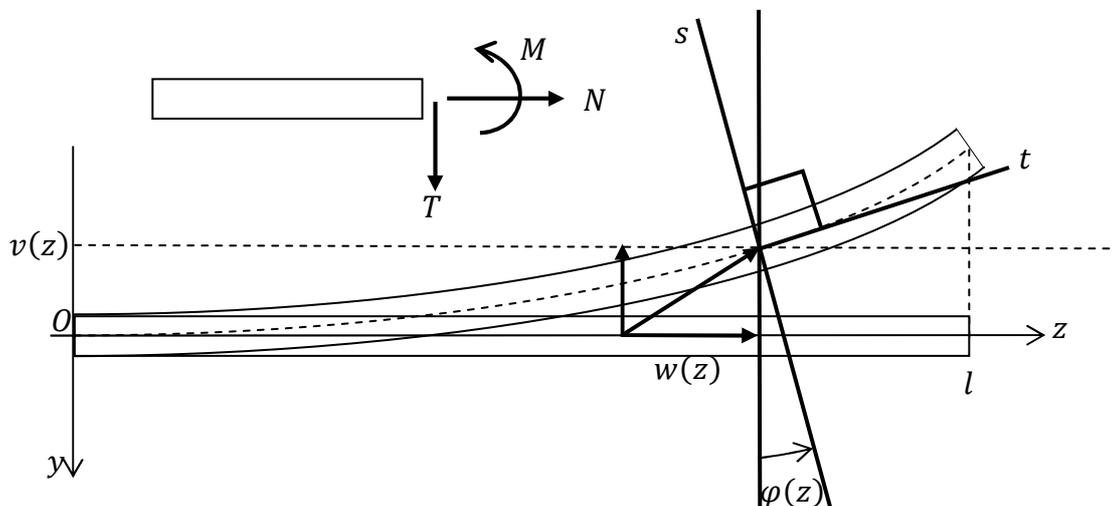
ovvero l'equazione differenziale

$$21.9) \quad \frac{d\theta(z)}{dz} = \frac{M_t(z)}{GJ_t}$$

essendo $\theta = \theta(z)$ la funzione che fornisce l'angolo di rotazione della sezione in z , intorno all'asse z . Questa deformazione di torsione si aggiungerà a quelle già descritte nel paragrafo precedente (inflexione dell'asse geometrico e rotazione della sezione intorno all'asse x).

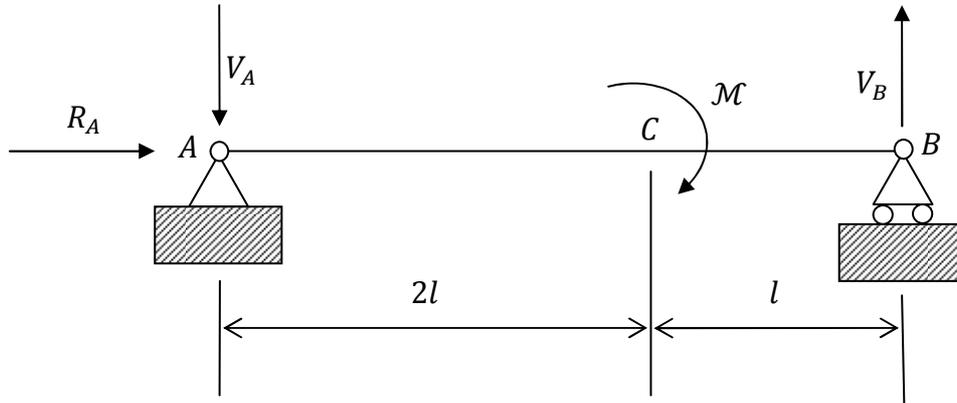
Per una trattazione più approfondita del problema della torsione non uniforme si rimanda a Capurso, *Scienza delle Costruzioni*, par. 8.2.2.

21.6. Sulla simbologia della linea elastica. Spesso si trova per lo spostamento verticale della linea elastica la scrittura $y(z)$, piuttosto che quella usata in questo capitolo e nel precedente $v(z)$. La cosa è indifferente, l'importante è essere chiari sul significato dei simboli usati. È importantissimo invece tenere presente che l'analisi condotta nel presente e precedente capitolo, basandosi anche sulle equazioni indefinite di equilibrio **17.21**, si basa sulle convenzioni dei segni introdotte nel capitolo 17 per le caratteristiche di sollecitazione, coniugate con quelle introdotte in questo e nel precedente capitolo per gli spostamenti; ovvero sulle convenzioni seguenti.



Si ricorda che, con queste convenzioni, la rotazione della sezione è considerata positiva se antioraria.

21.7. Calcolo di una linea elastica. Vediamo come ricavare la linea elastica per la trave puramente flessibile indicata in figura, caricata con una coppia concentrata.

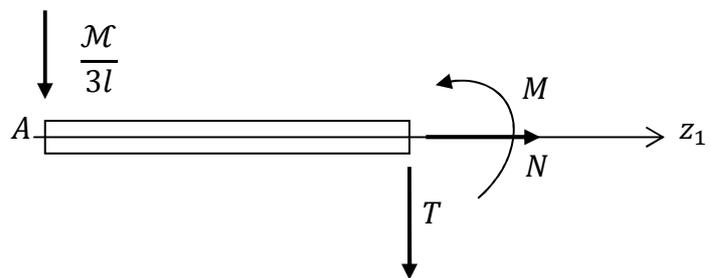


Volendo usare le 21.7 è necessario ricavare, nell'ordine

- le reazioni vincolari
- il momento flettente lungo la trave

Per le reazioni vincolari, il sistema della statica impone

$$\begin{cases} R_A = 0 \\ V_A - V_B = 0 \\ 3lV_B = \mathcal{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = 0 \\ V_A = \frac{\mathcal{M}}{3l} \\ V_B = \frac{\mathcal{M}}{3l} \end{cases}$$



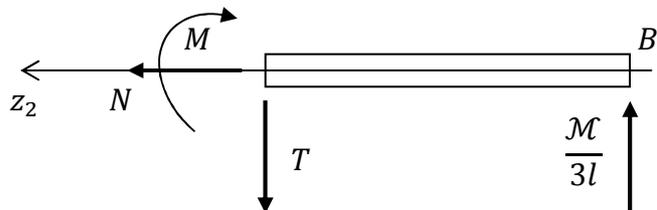
ricaviamo ora il momento flettente per il tratto AC. Inserito l'asse coordinato z_1 la terza delle 17.20 porge

$$\frac{dM}{dz_1} = T = -\frac{\mathcal{M}}{3l}$$

Considerando la condizione al contorno $M(z_1 = 0) = 0$ abbiamo dunque

$$21.10) M(z_1) = -\frac{\mathcal{M}}{3l} z_1$$

Consideriamo ora il tratto BC in cui sia inserito l'asse coordinato z_2 e ricaviamo il momento flettente anche qui. La terza delle 17.20 porge



$$\frac{dM}{dz_2} = T = \frac{\mathcal{M}}{3l}$$

E considerando la condizione al contorno $M(z_2 = 0) = 0$ abbiamo in definitiva

$$21.11) M(z_2) = \frac{\mathcal{M}}{3l} z_2$$

Sostituendo la **21.10** nella seconda delle **17.20** si ha

$$\frac{d^2 y(z_1)}{dz_1^2} = \frac{\mathcal{M}}{3lEI_x} z_1 \Rightarrow \frac{dy(z_1)}{dz_1} = \frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} z_1^2 + C_1 \Rightarrow y(z_1) = \frac{\mathcal{M}}{18lEI_x} z_1^3 + C_1 z_1 + C_2$$

Sostituendo la **21.11** nella seconda delle **17.20** si ha

$$\frac{d^2 y(z_2)}{dz_2^2} = -\frac{\mathcal{M}}{3lEI_x} z_2 \Rightarrow \frac{dy(z_2)}{dz_2} = -\frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} z_2^2 + C_3 \Rightarrow y(z_2) = -\frac{\mathcal{M}}{18lEI_x} z_2^3 + C_3 z_2 + C_4$$

Per ricavare le quattro costanti di integrazione dobbiamo imporre che le sezioni ruotino in C dello stesso angolo, ovvero – se si considera che per i due tratti si hanno convenzioni speculari sui segni – le due rotazioni devono essere uguali e contrarie. Dunque

$$\begin{cases} \varphi_x(z_1 = 2l) = -\frac{dy(z_1 = 2l)}{dz_1} = -\frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} 4l^2 - C_1 \\ \varphi_x(z_2) = -\frac{dy(z_2 = l)}{dz_2} = \frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} l^2 - C_3 \end{cases} \Rightarrow \varphi_x(z_1) = -\varphi_x(z_2) \Rightarrow$$

$$21.12) \frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} 4l^2 + C_1 = \frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} l^2 - C_3$$

Si consideri poi che gli spostamenti devono essere nulli in corrispondenza delle due cerniere, ciò che porge immediatamente $C_2 = C_4 = 0$. L'ultima condizione da imporre è che lo spostamento in C dei due tratti sia il medesimo. Dunque

$$\begin{cases} y(z_1 = 2l) = \frac{\mathcal{M}}{18lEI_x} 8l^3 + C_1 2l \\ y(z_2 = l) = -\frac{\mathcal{M}}{18lEI_x} l^3 + C_3 l \end{cases} \Rightarrow$$

$$21.13) \frac{\mathcal{M}}{18lEI_x} 8l^2 + 2C_1 = -\frac{\mathcal{M}}{18lEI_x} l^2 + C_3$$

Mettendo a sistema le **21.12**, **21.13** si ha

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} 4l^2 + C_1 = \frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} l^2 - C_3 \\ \frac{\mathcal{M}}{18lEI_x} 8l^2 + 2C_1 = -\frac{\mathcal{M}}{18lEI_x} l^2 + C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathcal{M}}{2lEI_x} l^2 \\ -\frac{\mathcal{M}}{2lEI_x} l^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} l^2 \\ -\frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} l^2 - \frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} l^2 \\ -\frac{2\mathcal{M}}{6lEI_x} l^2 + \frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathcal{M}}{3lEI_x} l^2 \\ -\frac{\mathcal{M}}{6lEI_x} l^2 \end{pmatrix}$$

In definitiva abbiamo ottenuto per i due tratti della linea elastica le equazioni

$$21.14) \begin{cases} y(z_1) = \frac{\mathcal{M}}{18EI_x} z_1^3 - \frac{\mathcal{M}}{3EI_x} l^2 z_1 \\ y(z_2) = -\frac{\mathcal{M}}{18EI_x} z_2^3 - \frac{\mathcal{M}}{6EI_x} l^2 z_2 \end{cases}$$

Vediamo ora come procedere invece attraverso la **21.8**, che essendo nullo il carico distribuito, è una equazione omogenea. Per il tratto AB si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^4 y(z_1)}{dz^4} EI_x = 0 &\Rightarrow \frac{d^3 y(z_1)}{dz^3} EI_x = K_1 \Rightarrow \frac{d^2 y(z_1)}{dz^2} EI_x = K_1 z_1 + K_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dy(z_1)}{dz} EI_x = \frac{1}{2} K_1 z_1^2 + K_2 z_1 + K_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(z_1) EI_x = \frac{1}{6} K_1 z_1^3 + \frac{1}{2} K_2 z_1^2 + K_3 z_1 + K_4 \end{aligned}$$

La cerniera in A impone che sia ivi nullo lo spostamento, dunque $K_4 = 0$; la seconda delle **21.7** ci permette di dedurre che anche $K_2 = 0$. Dunque sin qui abbiamo ottenuto

$$21.15) y(z_1) EI_x = \frac{1}{6} K_1 z_1^3 + K_3 z_1 \Rightarrow \frac{dy(z_1)}{dz_1} EI_x = \frac{1}{2} K_1 z_1^2 + K_3 \Rightarrow \frac{d^2 y(z_1)}{dz_1^2} EI_x = K_1 z_1$$

Ragionando allo stesso modo per il tratto BC – usando convenzioni speculari per i segni – abbiamo evidentemente

$$21.16) y(z_2) EI_x = \frac{1}{6} K_5 z_2^3 + K_6 z_2 \Rightarrow \frac{dy(z_2)}{dz_2} EI_x = \frac{1}{2} K_5 z_2^2 + K_6 \Rightarrow \frac{d^2 y(z_2)}{dz_2^2} EI_x = K_5 z_2$$

Considerando poi la 2° delle **21.7** e la **21.10** si ha

$$21.17) K_1 = \frac{\mathcal{M}}{3l}$$

mentre la 2° delle **21.7** e la **21.11** porgono

$$21.18) K_5 = -\frac{\mathcal{M}}{3l}$$

Dunque si qui abbiamo ottenuto

$$21.19) \begin{cases} y(z_1) EI_x = \frac{1}{6} \frac{\mathcal{M}}{3l} z_1^3 + K_3 z_1 \Rightarrow \frac{dy(z_1)}{dz_1} EI_x = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{3l} z_1^2 + K_3 \\ y(z_2) EI_x = -\frac{1}{6} \frac{\mathcal{M}}{3l} z_2^3 + K_6 z_2 \Rightarrow \frac{dy(z_2)}{dz_2} EI_x = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{3l} z_2^2 + K_6 \end{cases}$$

La condizione di continuità dell'angolo di rotazione della sezione e di continuità dello spostamento in C porgono

$$21.20) \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{3l} 4l^2 + K_3 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{3l} l^2 - K_6 \\ \frac{1}{6} \frac{\mathcal{M}}{3l} 8l^3 + 2K_3 l = -\frac{1}{6} \frac{\mathcal{M}}{3l} l^3 + K_6 l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_3 + K_6 = -\frac{l}{2} \mathcal{M} \\ 2K_3 - K_6 = -\frac{l}{2} \mathcal{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_6 = -\frac{l}{6} \mathcal{M} \\ K_3 = -\frac{l}{3} \mathcal{M} \end{cases}$$

Dunque in conclusione abbiamo trovato

$$21.21) \begin{cases} y(z_1)EI_x = \frac{\mathcal{M}}{18l}z_1^3 - \frac{l}{3}\mathcal{M}z_1 \\ y(z_2)EI_x = -\frac{\mathcal{M}}{18l}z_2^3 - \frac{l}{6}\mathcal{M}z_2 \end{cases}$$

in accordo con le **21.14**.

Capitolo 22. Strutture iperstatiche. Metodo delle forze

22.1. Introduzione. Sappiamo che una struttura iperstatica (a vincoli tutti efficaci) dà luogo a un sistema della statica **14.3** risolvibile (il rango della matrice dei coefficienti è massimo, cioè pari a g , e dunque è uguale a quello della matrice completa) ma non in modo univoco (il numero r delle reazioni incognite è maggiore del numero g delle equazioni e le soluzioni sono dunque ∞^{r-g})¹. Tuttavia l'analisi condotta nei due precedenti capitoli sul calcolo della linea elastica può essere sfruttata per ottenere altre condizioni da imporre – oltre a quelle dell'equilibrio meccanico – per ricavare tutte le r reazioni incognite. In particolare esistono fondamentalmente due procedimenti per raggiungere questo scopo:

- il metodo delle forze
- il metodo degli spostamenti (o delle deformazioni)

In questo capitolo analizzo il primo metodo, nel successivo presento il secondo.

22.2. Algoritmo del metodo delle forze. Data una struttura $r - g$ volte iperstatica il metodo delle forze per il calcolo delle r reazioni vincolari prevede di

- sopprimere $r - g$ gradi di vincolo sostituendo o eliminando un numero opportuno di vincoli, ottenendo una struttura isostatica, detta **sistema² isostatico equivalente** oppure **sistema principale**;
- introdurre $r - g$ incognite dinamiche³ X_1, X_2, \dots, X_{r-g} al posto delle reazioni vincolari dei gradi di vincolo soppressi;
- risolvere il sistema della statica **14.3** per il **sistema isostatico equivalente**, ottenendo una soluzione che risulta funzione delle incognite dinamiche X_1, X_2, \dots, X_{r-g} ;
- ricavare la linea elastica dei vari tratti della struttura e imporre che gli spostamenti siano compatibili con i vincoli soppressi, ovvero imporre le **condizioni di congruenza**.

Le condizioni di congruenza sono in definitiva le equazioni aggiuntive necessarie per ricavare tutte le r reazioni vincolari.

22.3. Un'applicazione del metodo delle forze. La trave in figura è vincolata in A da un incastro e in B da una cerniera. Un carico verticale in C costituisce la sollecitazione esterna. Il sistema della statica **14.3** si scrive

$$22.1) \quad \begin{cases} R_A - R_B = 0 \\ V_A + V_B = f \\ V_B l + C_A = fa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_A \\ R_B \\ V_A \\ V_B \\ C_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ fa \end{pmatrix}$$

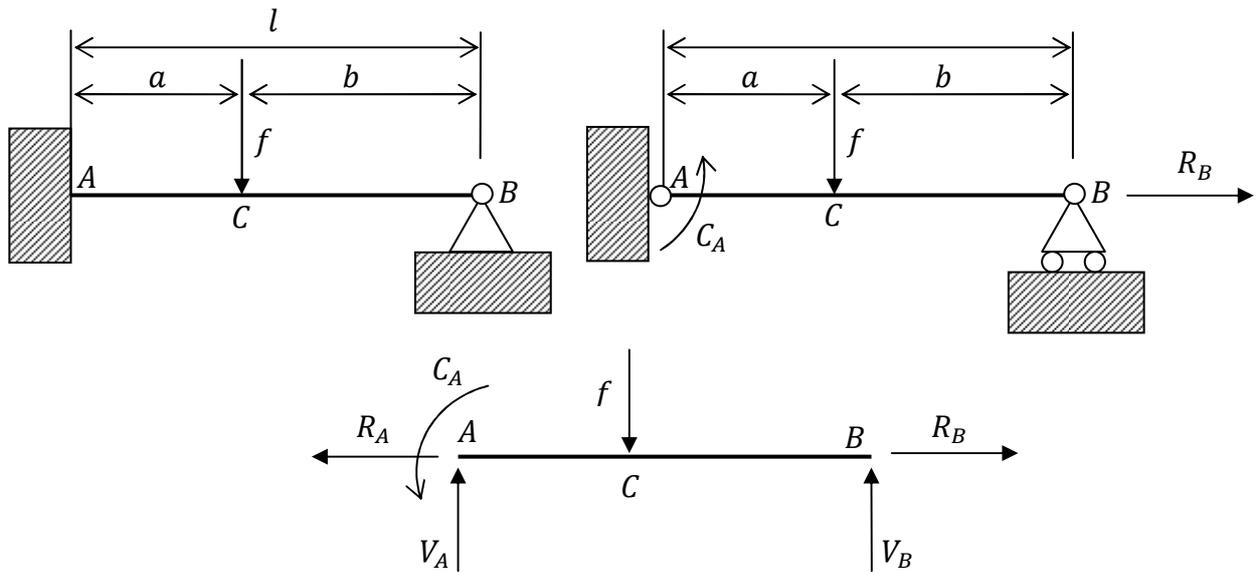
Il rango della matrice della statica è 3, come quello della matrice completa; il numero di incognite è 5. Dunque abbiamo una struttura iperstatica a vincoli tutti efficaci, ovvero un sistema staticamente

¹ Una struttura del genere è detta $r - g$ volte iperstatica.

² Anche se per la terminologia introdotta nel capitolo 14 si tratta di una struttura, non di un sistema.

³ Si può trattare tanto di forze che di momenti, dipende dal tipo di grado di vincolo soppresso a cui si riferiscono.

indeterminato (sistema del tipo 3.2, secondo la classificazione del capitolo 14); in particolare il grado di iperstaticità è 2.



Per ottenere il sistema isostatico equivalente sopprimo un grado di vincolo in corrispondenza dell'incastro – ovvero introduco al suo posto una cerniera e come incognita la coppia C_A ; e sostituisco la cerniera in B con un carrello e l'incognita dinamica R_B . Ricavo quindi le reazioni vincolari in funzione delle incognite dinamiche: assumendo note C_A, R_B il sistema **22.1** si scrive

$$22.2) \quad \begin{cases} R_A = R_B \\ V_A + V_B = f \\ V_B l = fa - C_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A = R_B \\ V_A = f - \frac{fa - C_A}{l} = \frac{fb + C_A}{l} \\ V_B = \frac{fa - C_A}{l} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la deformazione orizzontale – introdotto un asse coordinato orizzontale z da A a B – la seconda delle **20.20** porge

$$\frac{d \left(A \left(\frac{dw(z)}{dz} \right) \right)}{dz} = 0 \Leftrightarrow A \frac{d^2 w(z)}{dz^2} = 0 \Leftrightarrow A \frac{dw(z)}{dz} = C_1 \Leftrightarrow Aw(z) = C_1 z + C_2$$

Per la prima delle **20.16** abbiamo poi

$$A \frac{dw(z)}{dz} = R_B \Leftrightarrow C_1 = R_B$$

inoltre banalmente risulta $w(z = 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$, dunque abbiamo in definitiva

$$22.3) \quad Aw(z) = R_B z$$

La condizione di congruenza in questo caso consiste nel rispetto del vincolo di cerniera in B , ovvero nella equazione

$$22.4) \quad Aw(z = l) = 0 \Leftrightarrow R_B l = 0 \Leftrightarrow R_B = 0$$

L'incognita dinamica R_B resta così determinata, e sostituendo il suo valore nel **22.2** otteniamo anche la reazione vincolare

22.5) $R_A = 0$

Adesso procedo al calcolo della linea elastica del tratto AC . Introdotta l'asse coordinato z_1 , per il momento flettente si ha

22.6) $M = -C_A + V_A z_1$

Per la linea elastica si ha

$$B \frac{d^2 y_1(z_1)}{dz_1^2} = C_A - V_A z_1 \Rightarrow B \frac{dy_1(z_1)}{dz_1} = C_A z_1 - \frac{V_A z_1^2}{2} + K_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B y_1(z_1) = C_A \frac{z_1^2}{2} - \frac{V_A z_1^3}{6} + K_1 z_1 + K_2$$

Imponendo che lo spostamento sia nullo in A abbiamo $K_2 = 0$. Dunque per il tratto AC si ha la linea elastica

22.7) $B y_1(z_1) = C_A \frac{z_1^2}{2} - \frac{V_A z_1^3}{6} + K_1 z_1 \Rightarrow B \frac{dy_1(z_1)}{dz_1} = C_A z_1 - \frac{V_A z_1^2}{2} + K_1$

Per il tratto BC – introdotto un asse coordinato z_2 come in figura – si può utilizzare la **22.7** (essendo la situazione speculare) in cui si ponga $C_A = 0$ e V_B al posto di V_A , cambiando inoltre pedice agli assi coordinati. Si ha

22.8) $B y_2(z_2) = -\frac{V_B z_2^3}{6} + K_3 z_2 \Rightarrow B \frac{dy_2(z_2)}{dz_2} = -\frac{V_B z_2^2}{2} + K_3$

La condizione di continuità della rotazione della sezione e di continuità dello spostamento verticale si traduce nel sistema

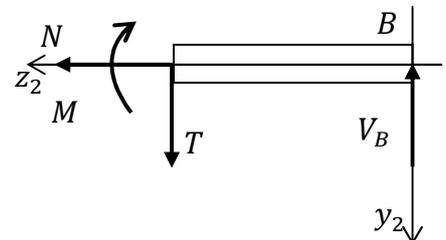
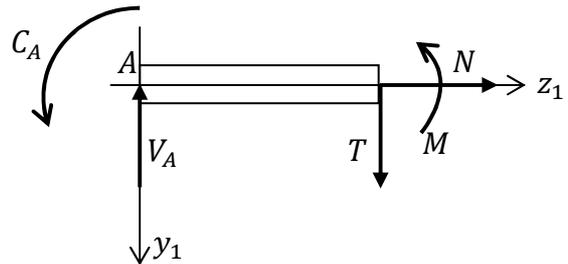
22.9)
$$\begin{cases} C_A \frac{a^2}{2} - \frac{V_A a^3}{6} + K_1 a = -\frac{V_B b^3}{6} + K_3 b \\ C_A a - \frac{3V_A a^2}{2} + K_1 = \frac{3V_B b^2}{2} - K_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 a - K_3 b = -\frac{V_B b^3}{6} + \frac{V_A a^3}{6} - C_A \frac{a^2}{2} \\ K_1 + K_3 = \frac{3V_B b^2}{2} + \frac{3V_A a^2}{2} - C_A a \end{cases}$$

mentre la condizione di congruenza restante consiste nell'imporre la rotazione nulla in A , ovvero nella condizione

22.10) $K_1 = 0$

che sostituita in **22.9** porge

$$\begin{cases} -K_3 b = -\frac{V_B b^3}{6} + \frac{V_A a^3}{6} - C_A \frac{a^2}{2} \\ +K_3 = \frac{3V_B b^2}{2} + \frac{3V_A a^2}{2} - C_A a \end{cases}$$



Moltiplicando la 2° equazione per b e sommando membro a membro si ha

$$22.11) -\frac{V_B b^3}{6} + \frac{V_A a^3}{6} - C_A \frac{a^2}{2} = \frac{3V_B b^3}{2} + \frac{3V_A a^2 b}{2} - C_A a b$$

Sostituendo i valori di V_A, V_B ricavati in **22.2** e risolvendo in C_A abbiamo in definitiva

$$22.12) C_A = a b f \frac{a^2 + 3ab + 2b^2}{2l^3}$$

che sostituita insieme alla **22.4** nelle **22.2** porge

$$22.12) \begin{cases} R_A = R_B = 0 \\ V_A = f - f a^2 \frac{(2a+3b)}{2l^3} \\ V_B = f a^2 \frac{(2a+3b)}{2l^3} \end{cases}$$

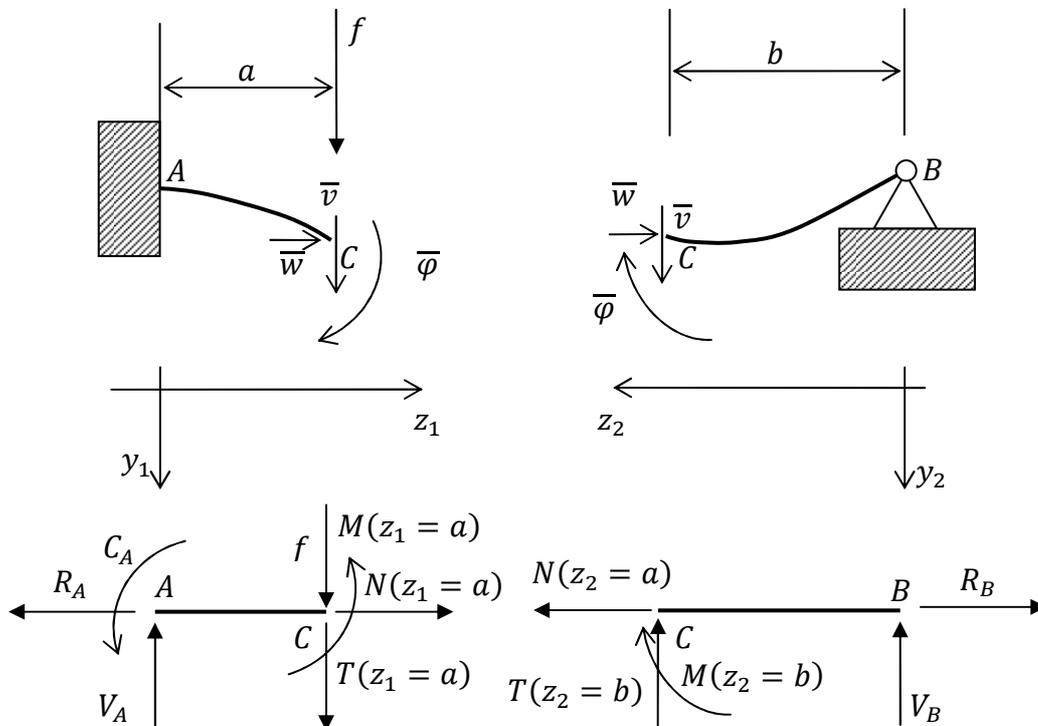
Capitolo 23. Strutture iperstatiche. Metodo degli spostamenti

23.1. Algoritmo. Supponiamo, per semplicità, di avere una struttura 2 volte iperstatica. Allora la sua risoluzione attraverso il metodo delle deformazioni segue questo algoritmo

- si sceglie una sezione S alla quale si attribuiscono lo spostamento δ e la rotazione φ ;
- si calcolano le caratteristiche di sollecitazione sulle due facce di S – in funzione di δ e φ – considerando separatamente la struttura a sinistra e quella a destra;
- si impone l'equilibrio meccanico in corrispondenza della sezione S sia alla rotazione che alla traslazione, ottenendo due equazioni nelle due incognite δ e φ , che vengono così determinate;
- la determinazione di δ e φ consente a sua volta di ricavare le caratteristiche di sollecitazione in S , ciò che permette in definitiva di risolvere la struttura a sinistra e quella a destra, risolvendo così la struttura complessiva.

Questa descrizione è poco chiara, ma viene esemplificata nel successivo paragrafo.

23.2. Un'applicazione del metodo delle deformazioni. Riprendiamo la trave risolta nel capitolo precedente attraverso il metodo delle forze e risolviamola ora con il metodo delle deformazioni. Sappiamo già – dall'analisi del sistema **22.1** – che la struttura è 2 volte iperstatica, dunque occorrono due equazioni aggiuntive per ricavare tutte le reazioni vincolari. L'applicazione del metodo delle deformazioni prevede in questo caso di introdurre 2 deformazioni (spostamenti e/o rotazioni), che decido di scegliere come rotazione e spostamento orizzontale della sezione in C .



Consideriamo il tratto AC . Consultando l'appendice sulle travi notevoli possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= -\frac{f + T(z_1 = a)}{2EI} a^2 + \frac{M(z_1 = a)}{EI} a \\ \bar{v} &= \frac{f + T(z_1 = a)}{3EI} a^3 - \frac{M(z_1 = a)}{2EI} a^2\end{aligned}$$

In base poi alla equazione delle linea termoelastica per spostamenti normali si ha

$$\begin{aligned}A \frac{dw(z)}{dz} = N(z) &\Rightarrow Aw(z_1) = N(z_1)z_1 + K \Rightarrow \begin{cases} Aw(z_1 = 0) = K = 0 \\ Aw(z_1 = a) = N(z_1)a = \bar{w} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} Aw(z_1 = 0) = K = 0 \\ Aw(z_1 = a) = N(z_1)a = A\bar{w} \end{cases} \Rightarrow N(z_1) = A \frac{\bar{w}}{a}\end{aligned}$$

Quindi l'analisi del tratto a sx porge

$$23.1) \begin{cases} \bar{\varphi} = -\frac{f+T(z_1=a)}{2EI} a^2 + \frac{M(z_1=a)}{EI} a \\ N(z_1 = a) = A \frac{\bar{w}}{a} \end{cases}$$

Per il tratto a dx si ha immediatamente

$$23.2) \begin{cases} \bar{\varphi} = \frac{\bar{v}}{b} - \frac{M(z_2=b)b}{3EI} \\ N(z_2 = b) = -A \frac{\bar{w}}{b} \end{cases}$$

L'equilibrio meccanico del tratto a dx impone

$$23.3) \begin{cases} V_B = \frac{M(z_2=b)}{b} \Rightarrow T(z_2 = b) = -\frac{M(z_2=b)}{b} \\ T(z_2 = b) = -V_B \end{cases}$$

L'equilibrio meccanico della sezione in C impone poi

$$23.4) \begin{cases} M(z_1 = a) = M(z_2 = b) \triangleq \bar{M} \\ T(z_1 = a) = T(z_2 = b) = -\frac{M(z_2=b)}{b} = -\frac{\bar{M}}{b} \\ N(z_1 = a) = N(z_2 = b) \Leftrightarrow A \frac{\bar{w}}{a} = -A \frac{\bar{w}}{b} \Leftrightarrow \bar{w} = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le prime due delle **23.4** nella prima delle **23.1** e nella prima delle **23.2** si ha

$$23.5) \begin{cases} \bar{\varphi} = -\frac{f-\frac{\bar{M}}{b}}{2EI} a^2 + \frac{\bar{M}}{EI} a \Rightarrow \bar{M} = \frac{fa^2b(2a+3b)}{2l^3} \\ \bar{\varphi} = \frac{\bar{v}}{b} - \frac{\bar{M}}{3EI} b \end{cases}$$

Sostituendo la 3° delle **23.4** nella 2° delle **23.1** abbiamo $N(z_1 = a) = 0$ e dunque, considerando il tratto a sx della trave si ha

$$23.6) R_A = 0$$

Sostituendo la **23.5** nelle prime 2 delle **23.4** si ha

$$23.7) \begin{cases} M(z_1 = a) = M(z_2 = b) = \frac{fa^2b(2a+3b)}{2l^3} \\ T(z_1 = a) = T(z_2 = b) = -\frac{fa^2(2a+3b)}{2l^3} \end{cases}$$

Operando il bilancio meccanico del tratto a dx abbiamo

$$23.8) V_B = \frac{fa^2(2a+3b)}{2l^3}$$

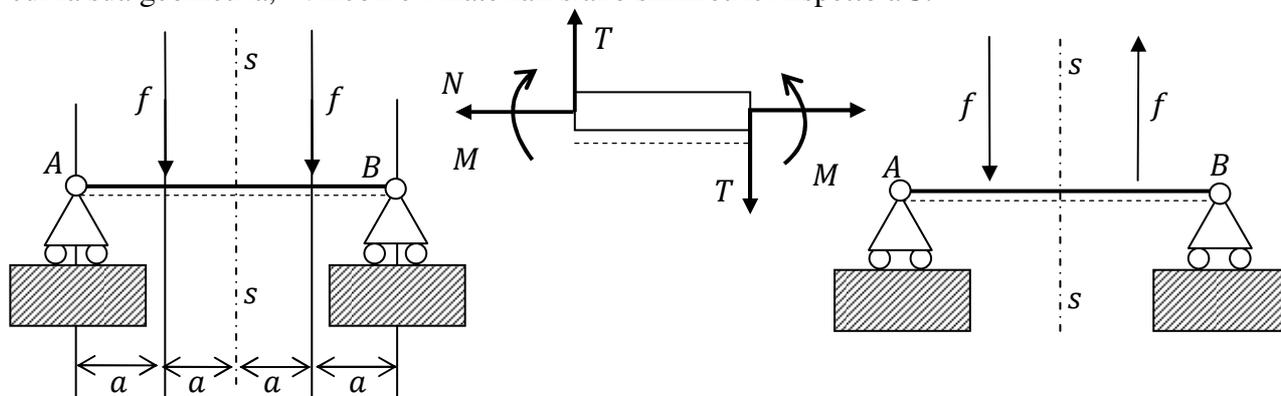
Sostituendo la **23.6** e la **23.8** nelle **22.2** si ha

$$23.9) \begin{cases} R_A = R_B = 0 \\ V_A = f - \frac{fa^2(2a+3b)}{2l^3} \\ V_B = \frac{fa^2(2a+3b)}{2l^3} \\ C_A = abf \frac{a^2+3ab+2b^2}{2l^3} \end{cases}$$

che coincidono con le **22.12**.

Capitolo 24. Simmetria assiale

24.1. Simmetria assiale. Una struttura si dice simmetrica rispetto a un asse s nel caso in cui la sua geometria, i vincoli e i materiali siano simmetrici rispetto a s .



Una struttura simmetrica si dice poi **simmetricamente caricata** rispetto a s se la sollecitazione agente su di essa è simmetrica rispetto a s ; si dice **caricata in modo antisimmetrico** rispetto a s se la sollecitazione di una metà invertita di segno diviene simmetrica rispetto a quella dell'altra metà. In figura abbiamo una struttura simmetrica rispetto all'asse s la quale è caricata simmetricamente nel caso di sinistra; è caricata in modo antisimmetrico nel caso di destra.

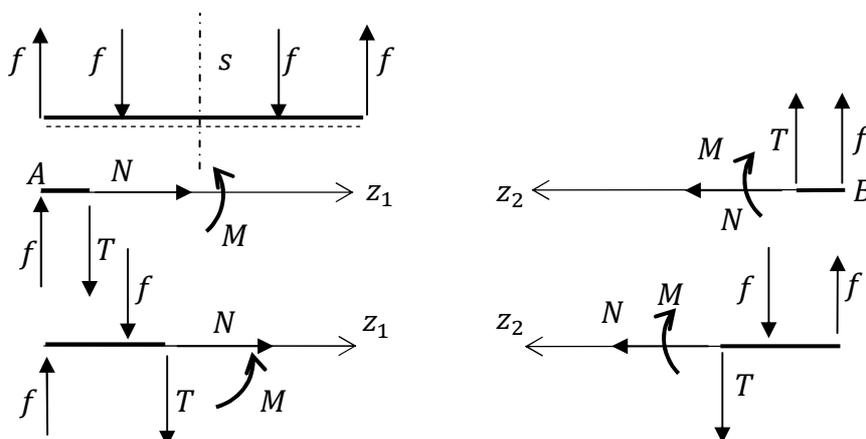
24.2. Caratteristiche di sollecitazione e deformazioni. Nel caso di strutture simmetriche caricate simmetricamente si ha che

24.1) sono simmetrici $\left\{ \begin{array}{l} \text{il diagramma del momento flettente} \\ \text{il diagramma della componente normale} \\ \text{le reazioni vincolari} \\ \text{le deformazioni} \end{array} \right.$

mentre

24.2) è antisimmetrico il diagramma del momento del taglio

Quest'ultima circostanza discende dalle convenzioni adottate per le caratteristiche di sollecitazione, ovvero in particolare dall'anti-simmetria della convenzione di segno per il taglio (vedi concio elementare a pag 247).



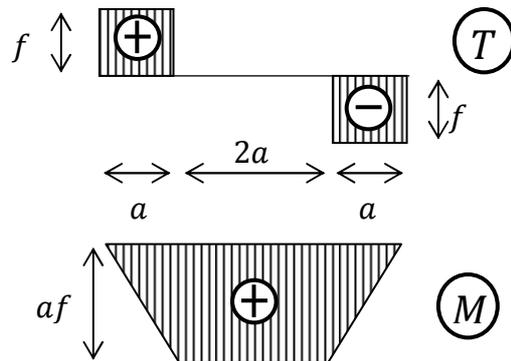
Per esemplificare quanto sopra riprendiamo l'esempio del primo paragrafo. Le reazioni vincolari si calcolano immediatamente attraverso il sistema della statica, e se ne verifica la simmetria. Introdotto un asse coordinato z_1 da A verso B – per l'emi-trave di sinistra – applicando le **17.20** si ha

$$24.1) \quad \begin{cases} 0 \leq z_1 \leq a \Rightarrow \begin{cases} N(z_1) = 0 \\ T(z_1) = f \\ M(z_1) = fz_1 \end{cases} \\ a \leq z_1 \leq 2a \Rightarrow \begin{cases} N(z_1) = 0 \\ T(z_1) = 0 \\ M(z_1) = fa \end{cases} \end{cases}$$

Operando in modo speculare sulla emi-trave destra, inserendo un asse coordinato z_2 , si ha

$$24.2) \quad \begin{cases} 0 \leq z_2 \leq a \Rightarrow \begin{cases} N(z_1) = 0 \\ T(z_1) = -f \\ M(z_1) = fz_2 \end{cases} \\ a \leq z_2 \leq 2a \Rightarrow \begin{cases} N(z_1) = 0 \\ T(z_1) = 0 \\ M(z_1) = fa \end{cases} \end{cases}$$

Dunque i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono i seguenti:



Si verifica allora la simmetria del diagramma del momento flettente e l'anti-simmetria di quello del taglio. La simmetria delle deformazioni si può dedurre da quella dei diagrammi del momento e della componente normale, utilizzando poi le **20.16**.

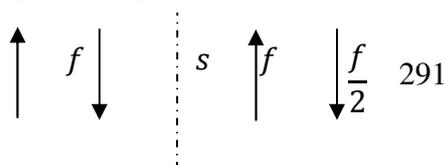
Nel caso di strutture simmetriche caricate anti-simmetricamente si ha che

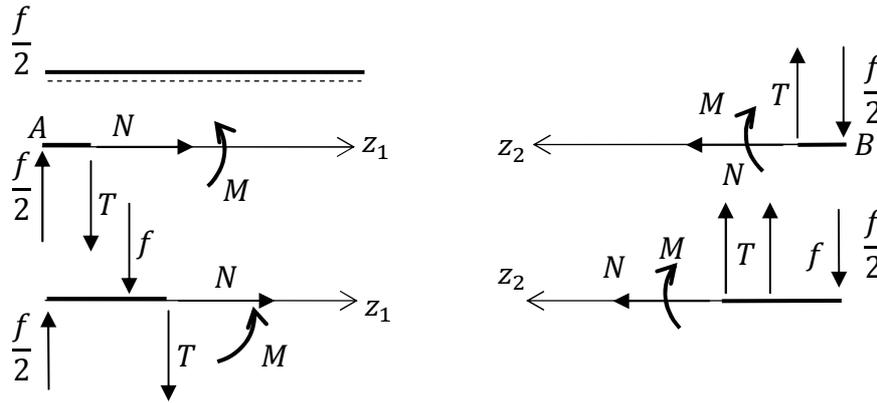
$$24.3) \quad \text{sono antisimmetrici} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il diagramma del momento flettente} \\ \text{il diagramma della componente normale} \\ \text{le reazioni vincolari} \\ \text{le deformazioni} \end{array} \right.$$

mentre

24.4) è simmetrico il diagramma del momento del taglio

Per esemplificare quanto sopra consideriamo l'esempio della struttura simmetrica caricata in modo

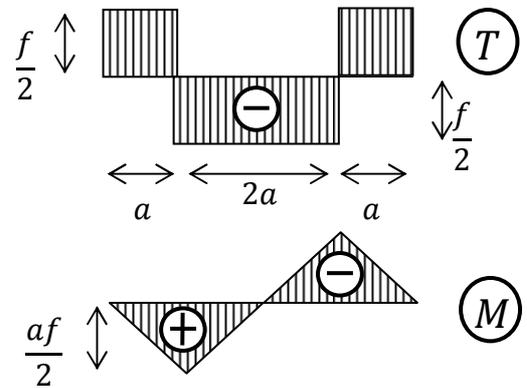




antisimmetrico introdotta nel precedente paragrafo. Per le caratteristiche di sollecitazione si ha

$$24.5) \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z_1 \leq a \Rightarrow \begin{cases} N(z_1) = 0 \\ T(z_1) = \frac{f}{2} \\ M(z_1) = \frac{fz_1}{2} \end{cases} \\ a \leq z_1 \leq 2a \Rightarrow \begin{cases} N(z_1) = 0 \\ T(z_1) = -\frac{f}{2} \\ M(z_1) = (a - \frac{z_1}{2})f \end{cases} \end{array} \right.$$

$$24.6) \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z_2 \leq a \Rightarrow \begin{cases} N(z_2) = 0 \\ T(z_2) = \frac{f}{2} \\ M(z_2) = -\frac{fz_2}{2} \end{cases} \\ a \leq z_2 \leq 2a \Rightarrow \begin{cases} N(z_2) = 0 \\ T(z_2) = -\frac{f}{2} \\ M(z_2) = f(\frac{z_2}{2} - a) \end{cases} \end{array} \right.$$



24.3. Sull'asse di simmetria. In questa sede ci chiediamo cosa succede in corrispondenza dell'asse di simmetria di strutture che siano caricate in modo simmetrico e in modo antisimmetrico. A tale scopo si consideri un concio elementare di struttura collocato in un punto dell'asse di simmetria.

Consideriamo prima il caso di carico simmetrico, il quale – su un punto dell'asse di simmetria – deve necessariamente essere costituito esclusivamente da una forza verticale (eventualmente nulla).

carico simmetrico				
	$M \neq 0$	$T = \frac{F}{2}$	$N \neq 0$	caratteristiche di sollecitazione
	$\varphi = 0$	$v \neq 0$	$w = 0$	parametri di deformazione

La sollecitazione agente sul concio elementare è costituita, oltre che dalla forza esterna F , anche dalle azioni interne, che nel disegno abbiamo disposto in modo che verifichino la simmetria. Si

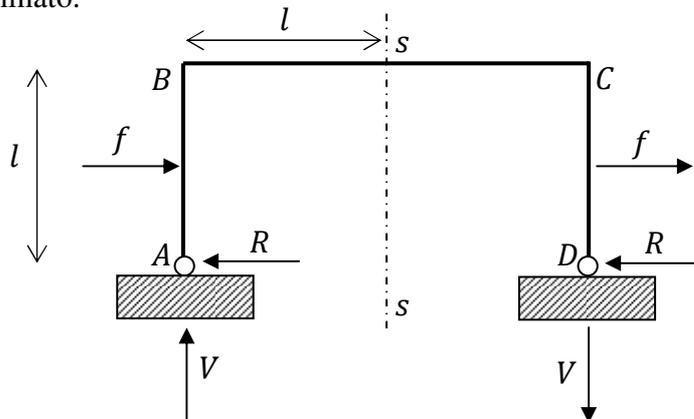
osserva allora – imponendo l'equilibrio meccanico – che debbono valere le relazioni riportate in figura. Per i parametri di deformazione si consideri poi che la condizione di simmetria impone l'annullamento della rotazione φ della sezione, mentre la condizione di simmetria congiunta con quella di non lacerazione della materia impone che sia $w = 0$. Per v non vi sono limitazioni.

carico antisimmetrico			
	$M = \frac{\mathcal{M}}{2}$	$T \neq 0$	$N = \frac{F}{2}$
	$\varphi \neq 0$	$v = 0$	$w \neq 0$
			parametri di deformazione

Nel caso di un carico antisimmetrico la sollecitazione esterna non può contemplare una forza verticale. Inoltre l'equilibrio meccanico del concio elementare porge per le azioni interne – disposte in modo antisimmetrico – le relazioni indicate in tabella.

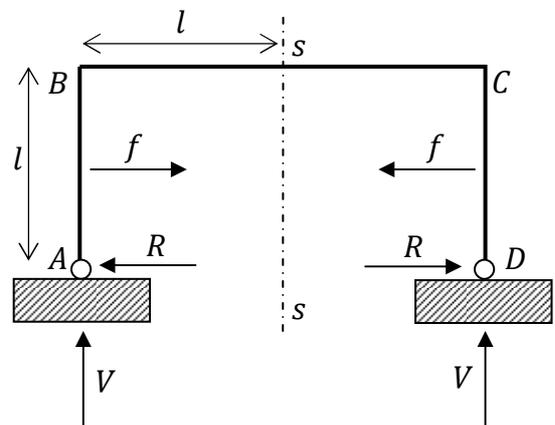
Lo spostamento verticale soddisfa la condizione di anti-simmetria solo nel caso in cui sia nullo, mentre per la rotazione φ della sezione e lo spostamento orizzontale w non ci sono limitazioni.

24.4. Strutture una volta iperstatiche. Ricordo che una struttura iperstatica – a vincoli tutti efficaci – costituisce un sistema staticamente indeterminato (sistema di tipo 3.2 secondo la classificazione del capitolo 14). Qui faccio vedere – con un esempio – che un sistema di questo tipo, ma provvisto di simmetria geometrica e con carico antisimmetrico, diventa una sistema staticamente determinato.



In base alle 24.3 abbiamo dobbiamo considerare delle reazioni vincolari anti-simmetriche, ciò che riduce il numero di incognite come si vede. Con queste posizioni il sistema della statica si scrive

$$\begin{cases} R = f \\ M_B = \frac{fl}{2} + \frac{fl}{2} - Rl - Rl - 2lV = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = f \\ f - 2R - 2V = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = f \\ V = -\frac{f}{2} \end{cases}$$



Interessante notare che se invece la struttura fosse caricata simmetricamente, allora resterebbe indeterminata, cioè in caso di carico simmetrico le condizioni 24.3 non consentono di ridurre sufficientemente il numero di incognite. Ecco cosa succede infatti in caso di carico simmetrico. Il sistema della statica si scrive

$$\begin{cases} R - R + f - f = 0 \\ 2V = 0 \\ M_B = -f \frac{l}{2} + f \frac{l}{2} - Rl + Rl + 2lV = 0 \end{cases}$$

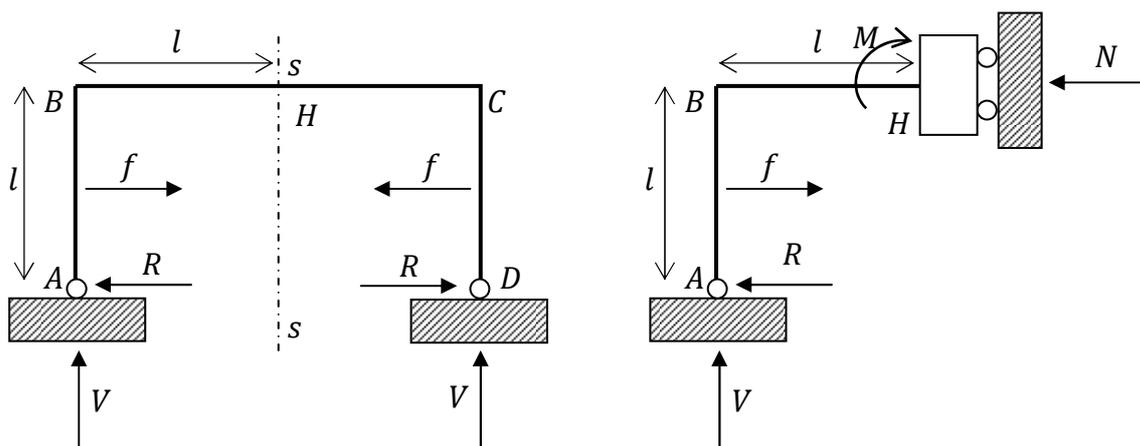
Il sistema qui sopra fornisce unicamente il valore di V , mentre resta indeterminata R .

24.5. Strutture più volte iperstatiche. Le considerazioni del paragrafo 24.3 permettono di sviluppare un metodo di analisi che semplifica lo studio delle strutture iperstatiche, anche più volte iperstatiche. Il metodo consiste nel

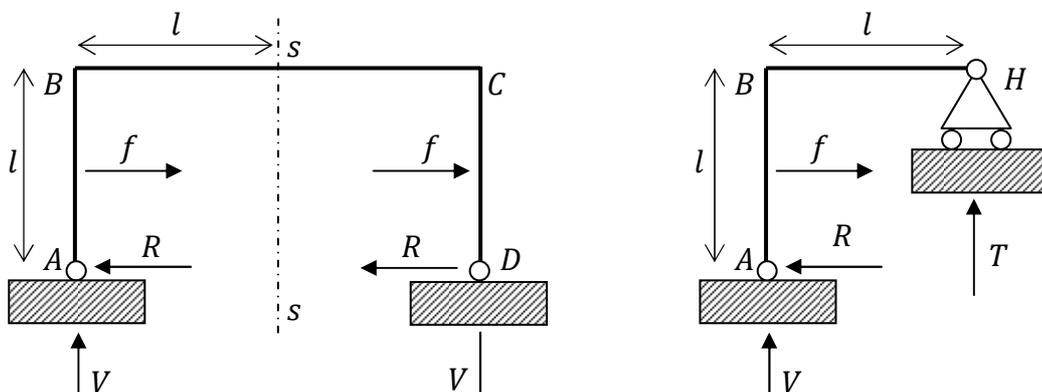
- tagliare la struttura lungo l'asse di simmetria e considerarne solo metà;
- introdurre in corrispondenza dell'asse di simmetria dei vincoli che siano compatibili con le deformazioni descritte nelle tabelle del paragrafo 24.3, ovvero un carrello nel caso di carico simmetrico e un incastro scorrevole nel caso di un carico antisimmetrico.

Questo sistema permette di ottenere strutture a minor grado di iperstaticità se non – a volte – strutture isostatiche.

Per esemplificare questo procedimento riconsideriamo la struttura studiata nel paragrafo precedente, sia nel caso di carico antisimmetrico, che in quello di carico simmetrico.



Nel caso di carico simmetrico l'unico parametro di deformazione possibile in H è lo spostamento verticale, dunque possiamo considerare l'emi-struttura introducendo in H un incastro mobile a scorrimento verticale.



Si ottiene così una struttura una volta iperstatica – a vincoli efficaci – la quale risulta staticamente indeterminata, come è immediato verificare.

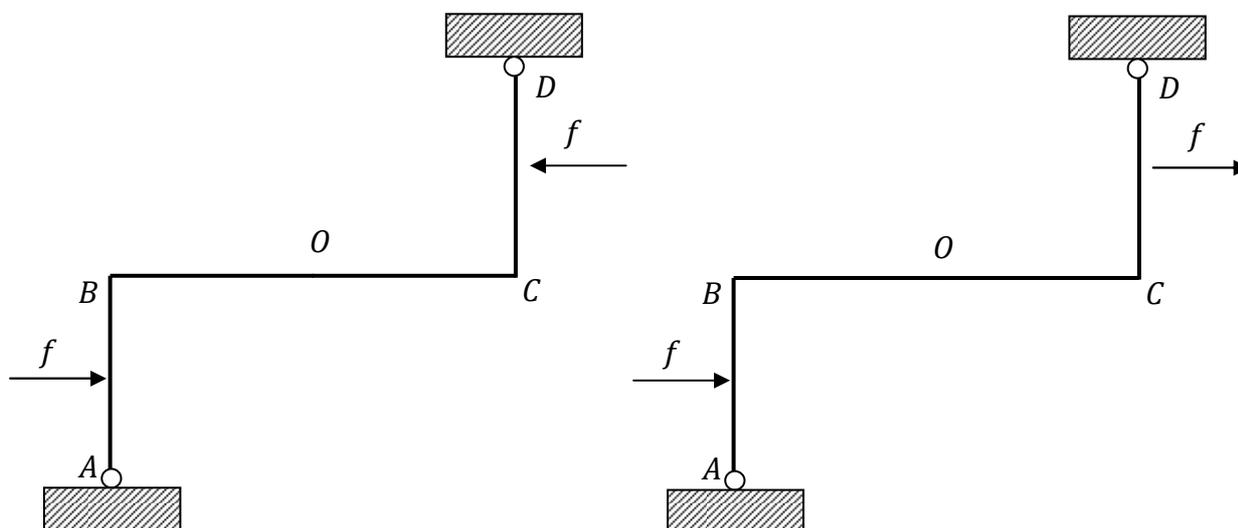
Nel caso di carico antisimmetrico i parametri di deformazioni possibili in H sono la rotazione e lo spostamento orizzontale, quindi possiamo considerare l'emi-struttura introducendo un carrello a scorrimento orizzontale. In questo caso allora – come si vede in figura – si ottiene una struttura isostatica il cui sistema della statica porge

$$\begin{cases} f - R = 0 \\ V + T = 0 \\ -\frac{fl}{2} + Tl = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = f \\ V = -\frac{f}{2} \\ T = \frac{f}{2} \end{cases}$$

Ritroviamo in questo modo i risultati del paragrafo precedente.

Capitolo 25. Simmetria polare

25.1. Simmetria polare. Una struttura presenta simmetria polare, rispetto a un polo O , se facendola ruotare di 180° intorno al polo, essa si sovrappone a se stessa. Si parla poi di carico simmetrico [antisimmetrico] rispetto a O , se la rotazione di 180° permette di sovrapporre la sollecitazione a se stessa [al suo opposto].



In figura abbiamo una struttura a simmetria polare rispetto al suo punto O , con carico a simmetria polare nell'esempio di sinistra, e ad anti-simmetria polare nell'esempio di destra.

25.2. Sul centro di simmetria. In questa sede ci chiediamo cosa succede in corrispondenza del centro di simmetria di strutture che siano caricate in modo simmetrico e antisimmetrico. Partiamo dai seguenti presupposti, che prendiamo in modo assiomatico:

$$25.1) \begin{cases} \text{struttura a simmetria polare} \\ \text{carico a simmetria polare} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{azioni interne a simmetria polare} \\ \text{deformazioni a simmetria polare} \end{cases}$$

$$25.2) \begin{cases} \text{struttura a simmetria polare} \\ \text{carico ad antisimmetria polare} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{azioni interne ad antisimmetria polare} \\ \text{deformazioni ad antisimmetria polare} \end{cases}$$

Effettuando un'analisi analoga a quella del paragrafo 24.3 consideriamo un conchio elementare in corrispondenza del centro di simmetria e esaminiamo le relative azioni interne e i parametri di spostamento.

carico simmetrico			
	$M = \mathcal{M}$	$T \neq 0$	$N \neq 0$
	$\varphi \neq 0$	$v = 0$	$w = 0$
			parametri di deformazione

Nel caso di carico a simmetria polare l'unica deformazione che sia a simmetria polare in O è la rotazione, mentre l'unica sollecitazione esterna che verifichi la simmetria polare è un momento. Si ha dunque la situazione indicata in tabella.

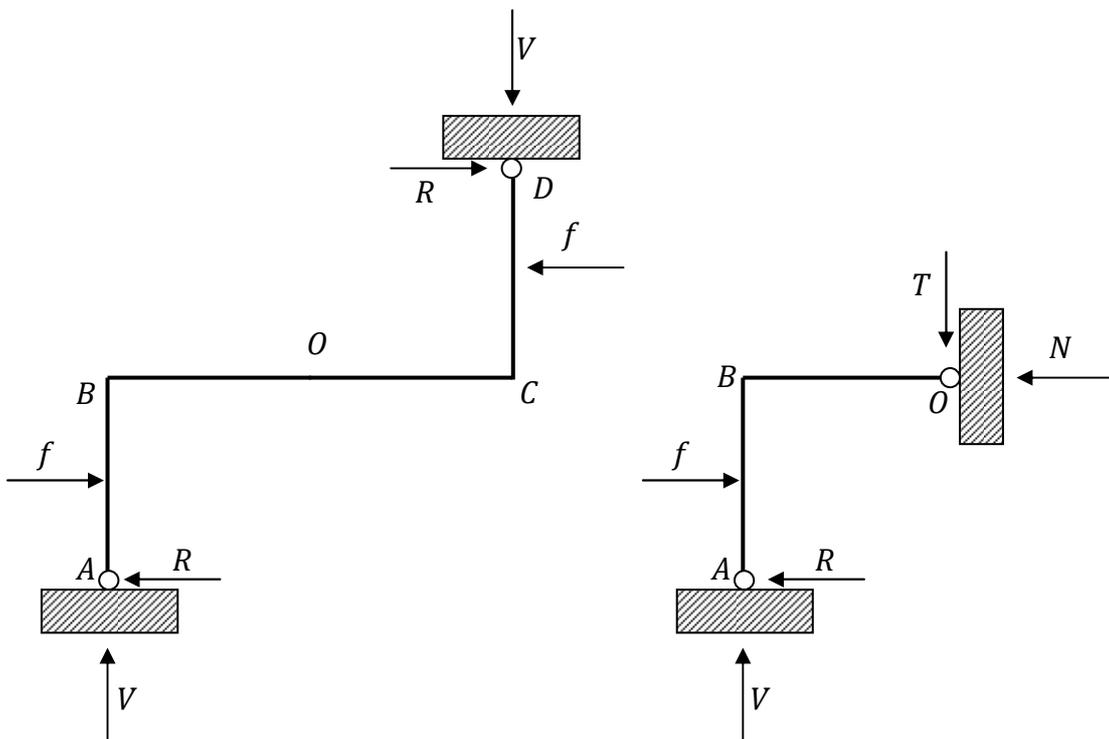
carico anti-simmetrico				
	$M \neq 0$	$T = \frac{F_V}{2}$	$N = \frac{F_O}{2}$	caratteristiche di sollecitazione
	$\varphi = 0$	$v \neq 0$	$w \neq 0$	parametri di deformazione

Nel caso invece di carico ad anti-simmetria polare la rotazione della sezione in O non è compatibile con l'anti-simmetria, mentre lo sono gli spostamenti v e w ; le sollecitazioni esterne che verificano l'anti-simmetria sono una forza verticale e una orizzontale, mentre la coppia non è antisimmetrica.

25.3. Strutture iperstatiche. Ora illustro un procedimento analogo a quello indicato nel paragrafo 24.5 per la soluzione di strutture iperstatiche a simmetria assiale. In questo caso l'algoritmo è il seguente

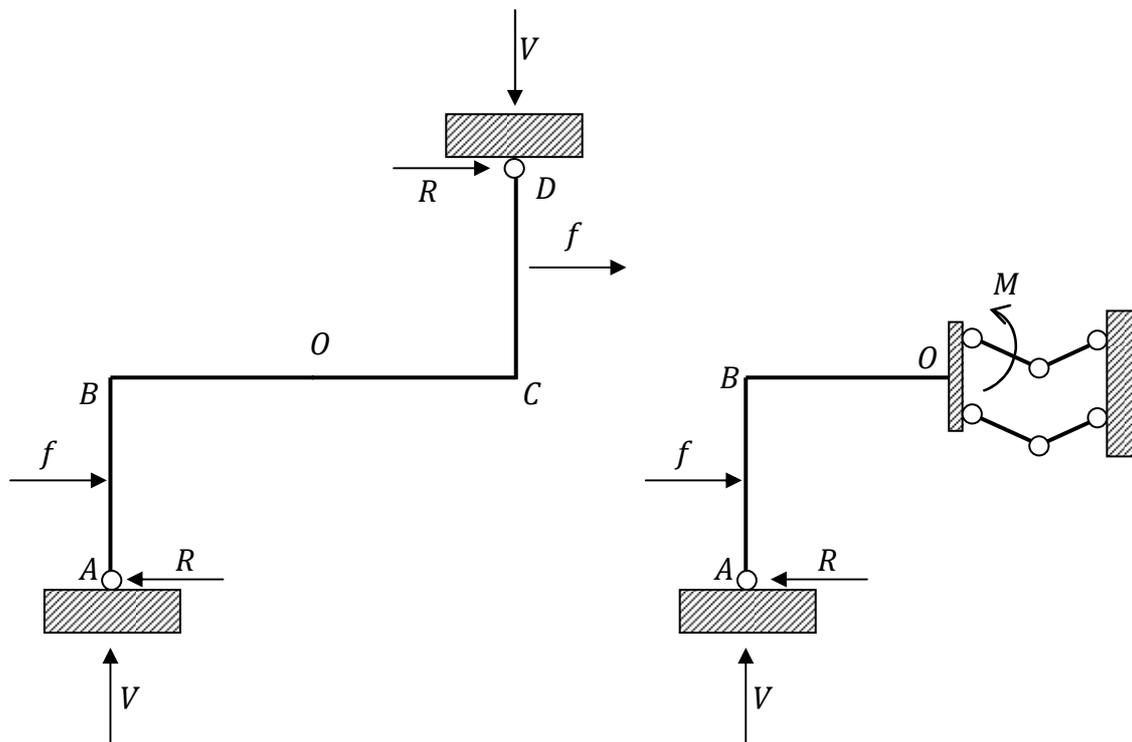
- si taglia la struttura in corrispondenza del suo centro O di simmetria polare e se ne considera solo una metà;
- si inserisce un vincolo in O che consenta solo i parametri di deformazione compatibili con il tipo di carico, ovvero – in base all'analisi del precedente paragrafo – una cerniera se si ha un carico simmetrico; un doppio-doppio pendolo se si ha un carico antisimmetrico.

In figura abbiamo una struttura a simmetria polare rispetto C , con carico a simmetria polare.



La struttura di partenza è una volta iperstatica e sebbene la condizione di simmetria polare per la reazione vincolare riduca il numero di incognite, tuttavia non è possibile determinarle con il sistema della statica, perché l'unica equazione che fornisca indicazioni è quella sull'annullamento del momento, mentre le incognite sono 2. Dividendo la struttura e introducendo la cerniera in O , abbiamo invece 4 incognite e 3 equazioni della statica, e analogamente non siamo in grado di risolvere il problema.

Consideriamo adesso la stessa struttura, ma rendiamo antisimmetrica – rispetto al polo O – la sollecitazione esterna (e basta cambiare verso a una forza).



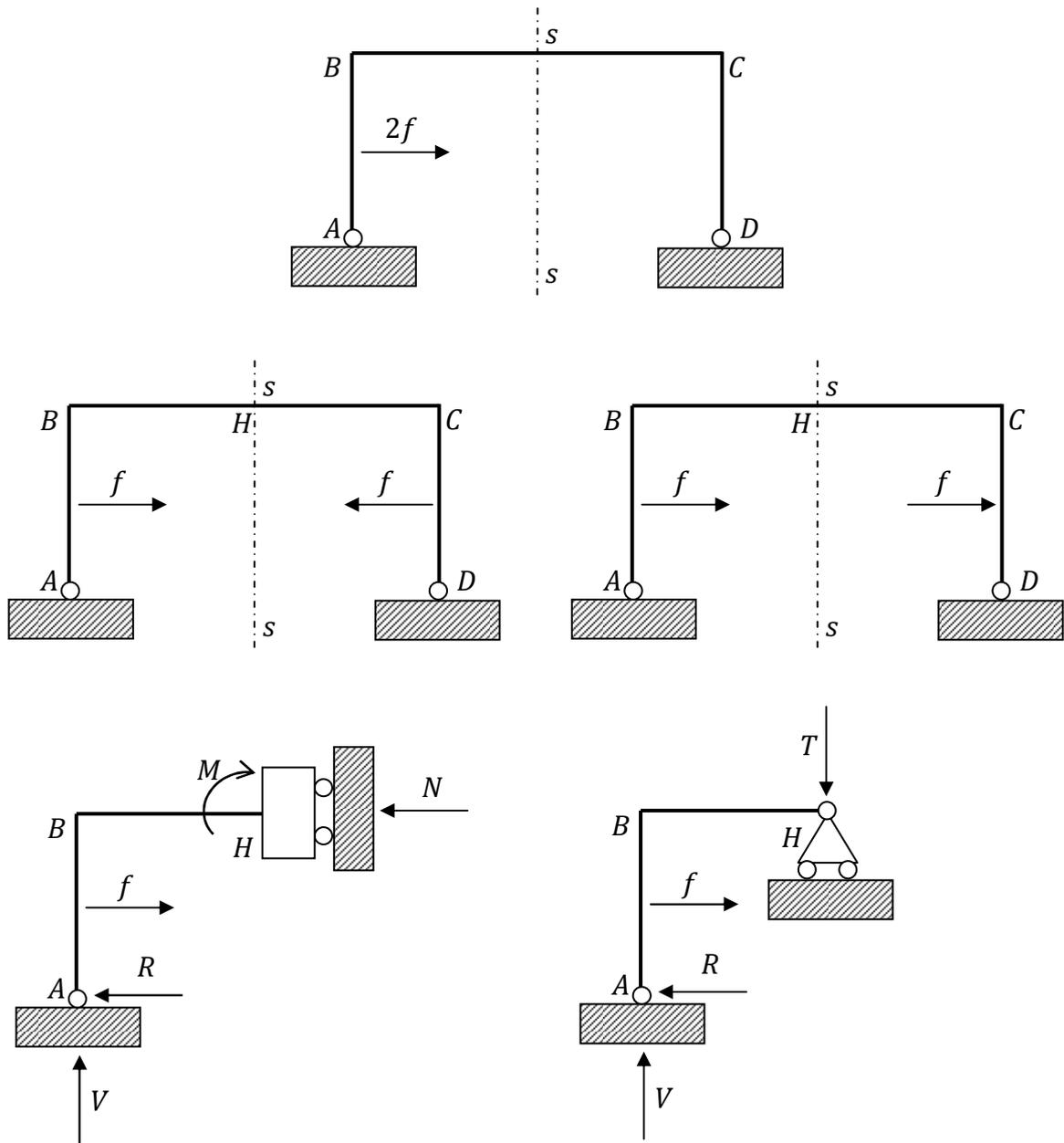
In questo caso il vincolo da inserire in O è un doppio-doppio pendolo, e la reazione è esclusivamente un momento M . Abbiamo allora un'emi-struttura isostatica per la quale si scrive il sistema della statica seguente

$$\begin{cases} V = 0 \\ f - R = 0 \\ M_A = -\frac{fl}{2} + M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = 0 \\ R = f \\ M = \frac{fl}{2} \end{cases}$$

Si vede dunque come – in presenza di simmetria polare per la struttura – l'anti-simmetria della sollecitazione consenta di ottenere sistemi staticamente determinati, come visto per altro anche nel caso della simmetria assiale (paragrafo 24.4).

25.5. Strutture simmetriche con carico qualunque. Data una struttura simmetrica (a simmetria assiale o polare), la sua sollecitazione può essere sempre considerata la somma di una sollecitazione simmetrica e di una anti-simmetrica. Allora si possono considerare separatamente le due sollecitazioni, ricavare le reazioni vincolari per ciascuna di esse, e poi sommarle per ottenere le reazioni vincolari complessive.

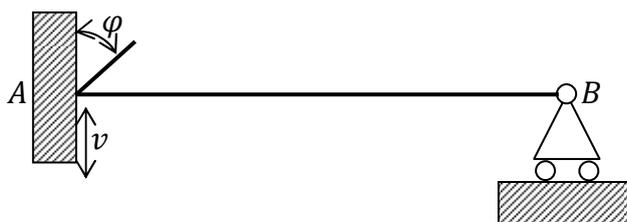
Come esempio si riprenda la struttura a simmetria assiale del paragrafo 24.5 con la sollecitazione indicata in figura, la quale non è né simmetrica né antisimmetrica. Allora si scompone la sollecitazione nella somma di una sollecitazione simmetrica (a sinistra) e di una antisimmetrica (a destra). Si ottengono in tal modo due sistemi per i quali può essere applicato il metodo introdotto nel paragrafo 24.5. Si osservi anzi che essi sono proprio i due sistemi discussi in quella sede, dove ho provato come la presenza del carico antisimmetrico permetta poi di ottenere un sistema staticamente determinato, sebbene iperstatico; mentre la presenza di carico simmetrico comporti l'indeterminazione statica della struttura.



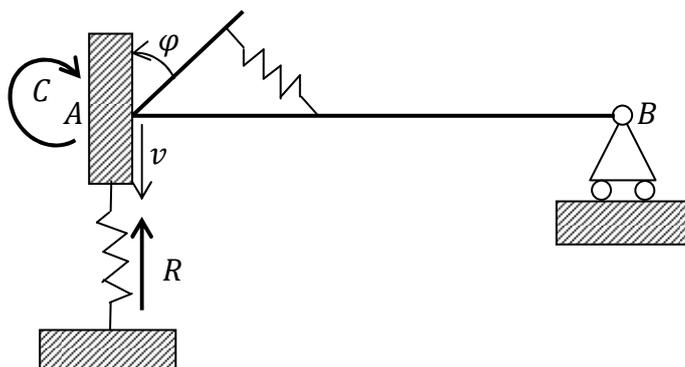
Capitolo 26. Vincoli cedevoli

26.1. Definizioni. Nella rassegna dei vincoli del piano condotta nel paragrafo 14.3 abbiamo definito perfetti quei vincoli i quali impediscono in modo completo lo spostamento a cui si oppongono: ad esempio un incastro perfetto impedirà completamente la rotazione e le due traslazioni.

Un incastro che invece consentisse anche parzialmente la rotazione (o una traslazione) si dirà cedevole. Più in generale si dice **vincolo cedevole** un vincolo che non è in grado di impedire completamente il movimento (spostamento e/o rotazione) a cui si oppone.



In figura abbiamo una trave con un incastro cedevole in A, cedevole in quanto consente uno spostamento verticale v e una rotazione φ . In particolare con la simbologia in figura si intende che i due **cedimenti** v, φ sono indipendenti dalla sollecitazione agente sulla trave, ovvero sono anelastici. In generale si chiama **vincolo anelastico** un vincolo cedevole i cui cedimenti sono indipendenti dalla sollecitazione agente su di esso.



Si parla invece di **vincoli elastici** nel caso in cui l'entità del cedimento è proporzionale alla reazione vincolare che si oppone al cedimento stesso. Per i vincoli elastici si usa la simbologia indicata in figura, con delle molle che suggeriscono il tipo di relazione fra cedimento e reazione vincolare. In particolare si hanno relazioni del tipo

$$26.1) \quad R = -Kv = -\frac{1}{\epsilon} v$$

$$26.2) \quad M = -\varphi = -\frac{1}{\epsilon} \varphi$$

dove la **26.1** vale per cedimenti che si presentino come spostamenti e la seconda per cedimenti che si manifestino come rotazione di sezione. Il segno meno è giustificato dalla convenzione di assumere

positivi i cedimenti che avvengono nel verso opposto al verso positivo delle relative reazioni vincolari.

Si pongono poi le seguenti definizioni

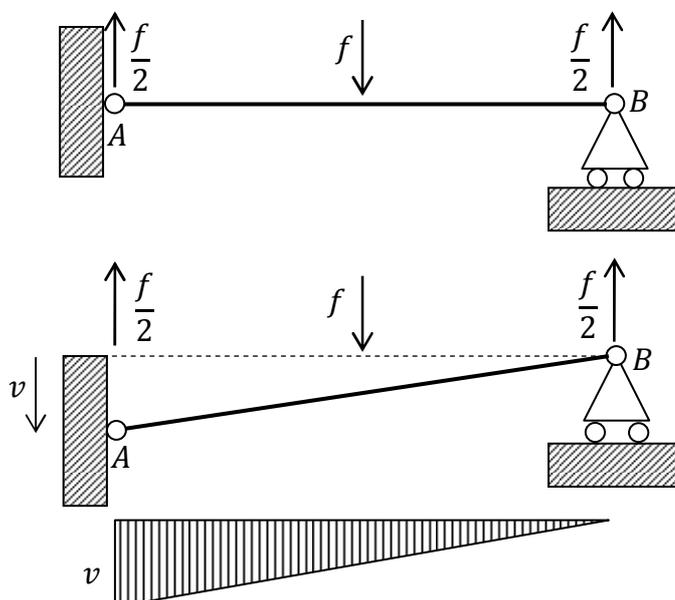
$$26.3) \begin{cases} K: \text{rigidezza del vincolo} \\ \epsilon: \text{cedibilità elastica} \\ \bar{K}: \text{rigidezza angolare} \\ \bar{\epsilon}: \text{cedibilità angolare} \end{cases}$$

26.2. Cedimenti e stato tensionale.

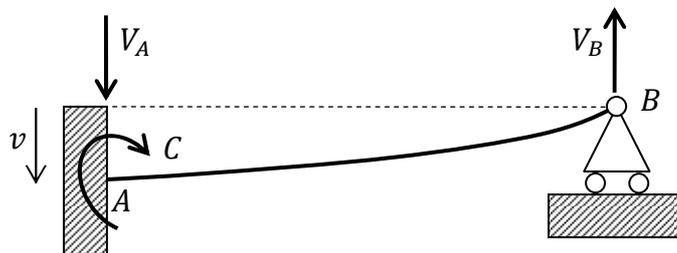
Provo ora – con due semplici esempi – che:

- 26.4) nelle strutture isostatiche i cedimenti anelastici inducono solo spostamenti rigidi e non interferiscono con i valori delle caratteristiche di sollecitazione e delle reazioni vincolari;
 26.5) nelle strutture iperstatiche i cedimenti anelastici inducono deformazioni, influenzando sul valore delle caratteristiche di sollecitazione e delle reazioni vincolari.

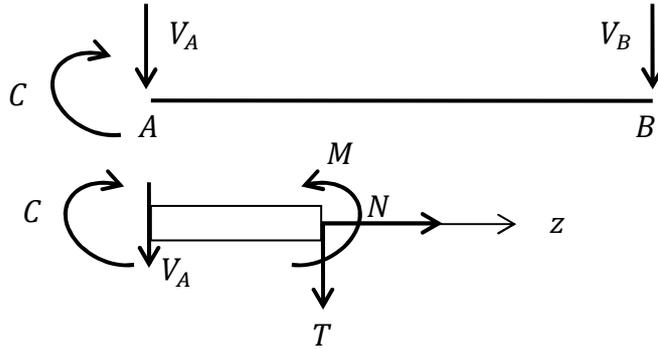
Si consideri ad esempio la seguente struttura isostatica a vincoli ben posti la quale presenti un cedimento verticale della cerniera in A . La conseguenza di questo cedimento è lo spostamento rigido indicato.



Si consideri ora invece la struttura iperstatica ottenuta dalla precedente aggiungendo in A un vincolo alla rotazione, ovvero sostituendo la cerniera con l'incastro. In questo caso il cedimento anelastico in A deforma la trave a causa della impossibilità per la sezione sede di incastro di ruotare.



La struttura è priva di sollecitazione esterna, quindi in assenza di cedimento le reazioni vincolari e le caratteristiche di sollecitazione sono tutte nulle, come è immediato verificare utilizzando le **22.12**. Vediamo ora invece cosa succede quando si verifica il cedimento vincolare. Si può procedere con il metodo delle forze sopprimendo in A un grado di vincolo con l'introduzione di una cerniera al posto dell'incastro. In tal caso l'incognita dinamica da introdurre è la coppia M , ottenendo il sistema isostatico equivalente in figura.



Per le caratteristiche di sollecitazione – inserito l'asse coordinato z – si ha

$$26.6) \begin{cases} N = 0 \\ T = -V_A \\ M - C + V_A z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T = -V_A \\ M = C - V_A z \end{cases}$$

In base alla seconda delle **21.7** si ha

$$\begin{aligned} v''(z)EI &= -M = -C + V_A z \Rightarrow v'(z)EI = -Cz + \frac{V_A z^2}{2} + K_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v(z)EI = -\frac{Cz^2}{2} + \frac{V_A z^3}{6} + K_1 z + K_2 \end{aligned}$$

Imponiamo ora la condizione di congruenza, ovvero la rotazione nulla in A :

$$v'(z=0)EI = 0 \Rightarrow K_1 = 0$$

Imponiamo altresì lo spostamento nullo in B ottenendo

$$26.7) v(l)EI = -\frac{Cl^2}{2} + \frac{V_A l^3}{6} + K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = \frac{Cl^2}{2} - \frac{V_A l^3}{6}$$

In fine si deve imporre il cedimento vincolare come spostamento in A :

$$26.8) v(z=0)EI = v \Rightarrow K_2 = v$$

Confrontando la **26.6** con la **26.7** abbiamo

$$26.9) \frac{Cl^2}{2} - \frac{V_A l^3}{6} = v$$

Il sistema della statica porge poi

$$26.10) \begin{cases} V_A = V_B \\ C = lV_B \end{cases}$$

Le **26.8** e **26.9** insieme porgono

$$26.11) \begin{cases} V_A = V_B \\ C = lV_B \\ \frac{V_A l^3}{2} - \frac{V_A l^3}{6} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = V_B \\ C = lV_B \\ \frac{V_A l^3}{2} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = V_B = \frac{2v}{l^3} \\ C = \frac{2v}{l^2} \end{cases}$$

E' evidente dalle **26.11** come il cedimento vincolare v incida sulle reazioni vincolari. Sostituendo poi le **26.11** nelle caratteristiche di sollecitazione **26.6** si ottiene

$$26.12) \begin{cases} N = 0 \\ T = -\frac{2v}{l^3} \\ M = \frac{2v}{l^2} - \frac{2v}{l^3} Z \end{cases}$$

da cui emerge l'influenza del cedimento vincolare sulle azioni interne.

Appendice. Geometria delle masse

A.1. Introduzione. Si descrivono qui tre enti matematici utili alla descrizione della forma di un corpo e della distribuzione della sua massa. Essi sono

- momenti statici (o momenti del primo ordine)
- centro di massa
- momenti di inerzia (o momenti del secondo ordine)

Per l'esatto significato fisico di queste entità si rimanda ad altre sezioni del testo.

A.2. Centro di massa. Consideriamo un sistema di n punti materiali, distribuiti nello spazio, aventi rispettivamente le masse¹ m_1, m_2, \dots, m_n , essendo (x_i, y_i, z_i) la posizione dell' i -mo punto materiale rispetto a un fissato sistema di riferimento cartesiano $RC(O; x, y, z)$. Definisco centro di massa (o baricentro o centro di gravità) del sistema il punto G di coordinate

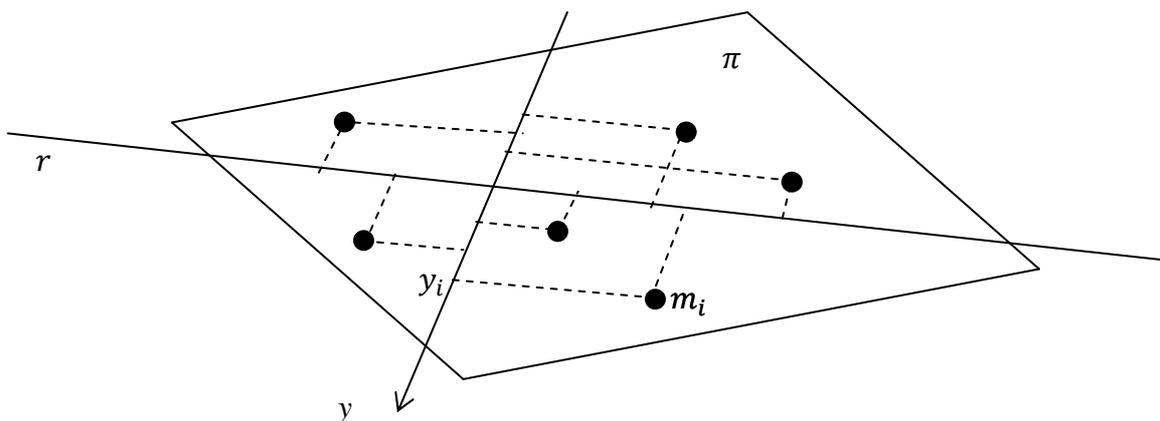
$$A.1) \quad x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\mathcal{M}} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\mathcal{M}} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\mathcal{M}}$$

essendo $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n m_i$ la massa totale del sistema. Nel caso di una distribuzione continua di massa la A.1 si scrive

$$A.2) \quad x_G = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\mathcal{M}} \quad y_G = \frac{\iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\mathcal{M}} \quad z_G = \frac{\iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dx dy dz}{\mathcal{M}}$$

essendo $\rho(x, y, z)$ la densità di massa del corpo nel punto (x, y, z) e Ω il dominio occupato dal corpo stesso.

A.3. Momenti statici. Dalle distribuzioni spaziali di massa passiamo a una distribuzione di massa nel piano. Sia r una retta non orientata del piano π e sia y una retta orientata, sempre di π , ad essa ortogonale.



Allora definisco momento statico del sistema di masse rispetto alla retta r la quantità

$$A.3) \quad S_r \triangleq \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

¹ Si tenga presente che si parla di momenti statici anche nel caso in cui si abbia a che fare con volumi o con aree, piuttosto che con masse. La definizione è la stessa, naturalmente cambiano le dimensioni del momento statico stesso.

Se la distribuzione delle masse è continua il momento statico **A.3** si scrive

$$a.7.4) S_r = \iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z) dx dy dz$$

Se introduciamo nel piano π un sistema di riferimento $RC(O; x, y)$ allora possiamo calcolare il momento statico del sistema di masse rispetto l'asse x , usando l'asse y per calcolare le distanze; analogamente possiamo calcolare il momento statico del sistema di masse rispetto l'asse y , usando l'asse x per calcolare le distanze. Abbiamo dunque i momenti statici

$$a.5) \begin{cases} S_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \\ S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \end{cases}$$

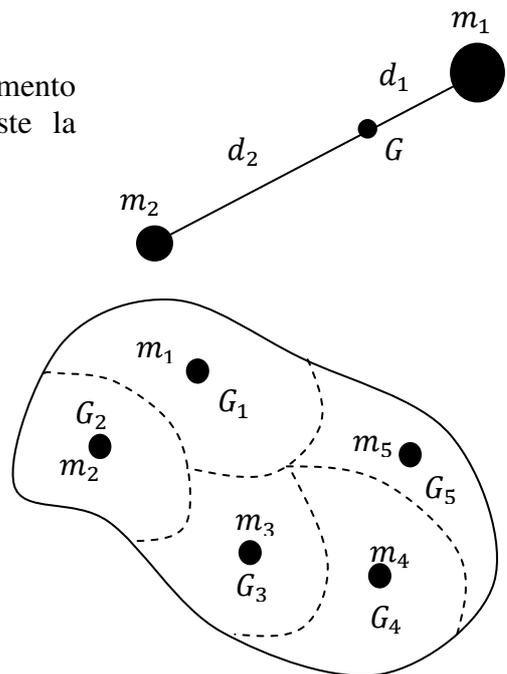
Ricordando allora la definizione **A.1** di centro di massa, nel piano si trova il seguente legame tra momenti statici e centro di massa

$$a.6) \begin{cases} x_G = \frac{S_y}{\mathcal{M}} \\ y_G = \frac{S_x}{\mathcal{M}} \end{cases}$$

A.4. Proprietà di ubicazione del centro di massa. Ecco delle regole che permettono in alcuni casi di determinare la posizione del centro di massa senza dover effettuare il calcolo indicato in **a.1** o **a.2**.

- 1) Il baricentro di due elementi materiali si trova sul segmento che li congiunge. Con riferimento alla figura sussiste la seguente relazione:

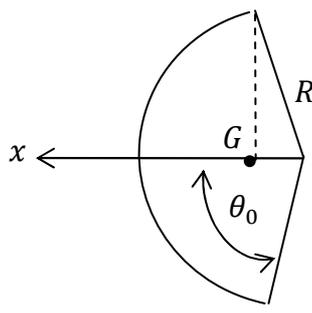
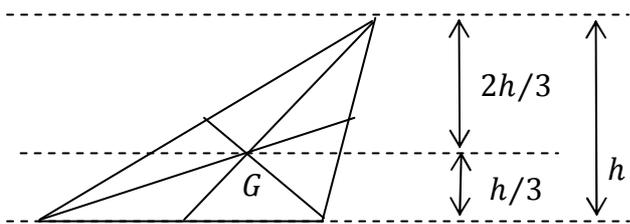
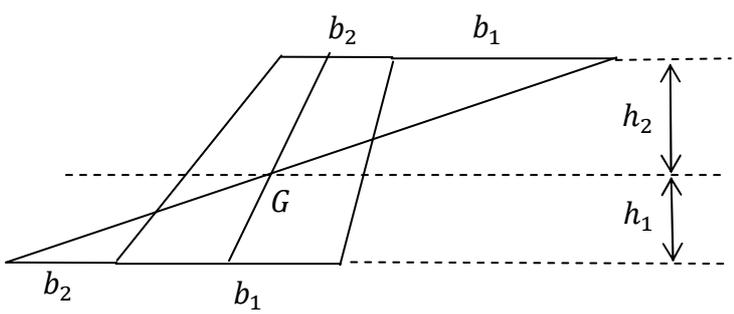
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2}{d_1}$$



- 2) Se si divide un corpo in n parti di massa $m_1, m_2 \dots m_n$ aventi rispettivamente i centri di massa $G_1, G_2 \dots G_n$, allora il baricentro del corpo coincide con il baricentro dello schema particellare che si ottiene concentrando la massa m_i nel punto G_i .
- 3) Se un corpo si trova tutto su una retta, allora il suo baricentro si trova su quella retta.
- 4) Se un corpo si trova tutto su un piano, allora il suo baricentro si trova su quel piano.
- 5) In presenza di un asse di simmetria, il baricentro si trova su tale asse; in presenza di un piano di simmetria, il baricentro si trova su tale piano.
- 6) Se la frontiera di un corpo è una figura convessa (cioè 'bombata') allora il baricentro cade dentro la frontiera stessa.
- 7) Se i punti di un corpo subiscono spostamenti tutti paralleli a una retta, allora la distanza del baricentro da tale retta non muta; stesso discorso nel caso di spostamenti tutti paralleli a un piano.

8) Se un corpo con densità costante ρ presenta una cavità

- si calcola prima il baricentro del corpo pensato senza cavità;
- si calcola il baricentro di un corpo avente la forma della cavità e densità $-\rho$;
- si calcola il baricentro del sistema particellare costituito dalle due masse (di cui una negativa) concentrate nei rispettivi baricentri.

Alcuni baricentri	
arco di circonferenza	
$x_G = \frac{R \sin \theta_0}{\theta_0}$	
Triangolo	
<p>Il baricentro coincide con l'intersezione delle mediane e dista da ciascuna base $1/3$ della rispettiva altezza.</p>	
Trapezio	
$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{b_1}{2} + b_2}{\frac{b_2}{2} + b_1}$	

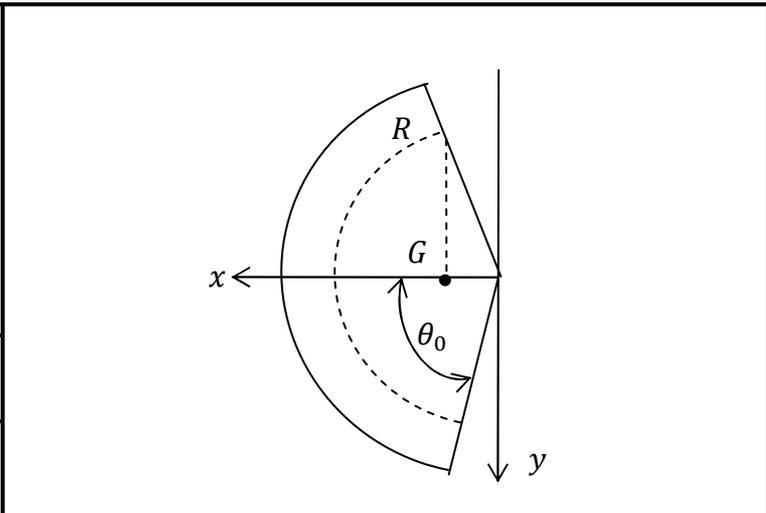
settore circolare

Il baricentro coincide con quello dell'arco di circonferenza avente stessa ampiezza e raggio pari a due terzi di quello del segmento circolare stesso.

$$x_G = \frac{2R \sin \theta_0}{3\theta_0}$$

$$A = \theta_0 R^2$$

$$S_y = \frac{2}{3} R^3 \sin \theta_0$$

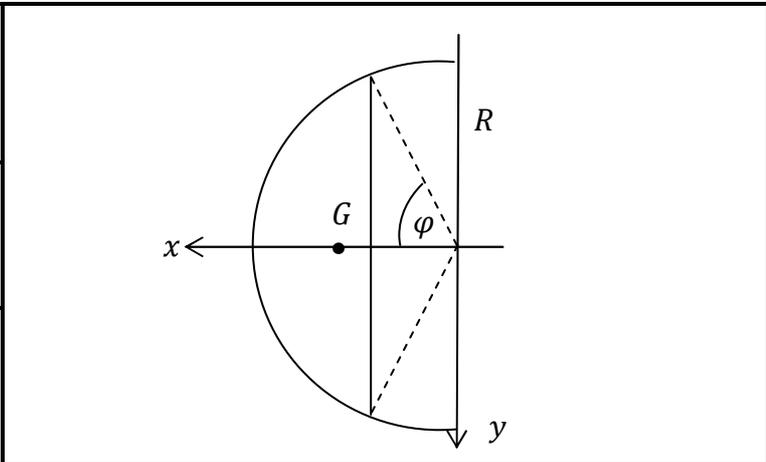


segmento circolare

$$x_G = \frac{2R \sin^3 \varphi}{3(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)}$$

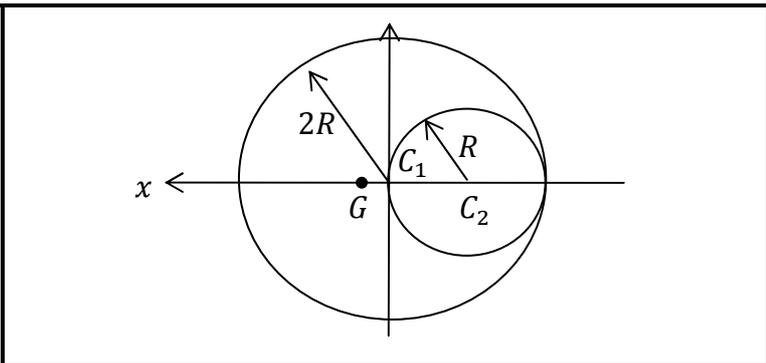
$$A = R^2(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$S_y = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \varphi$$



cerchio con foro circolare

$$x_G = \frac{R}{3}$$



prismi e cilindri

Il baricentro si trova sul punto medio del segmento che unisce i baricentri delle basi.

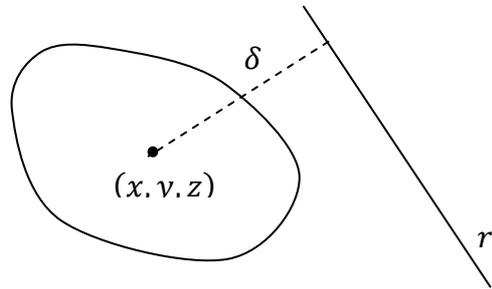
piramidi e coni

Il baricentro coincide con quello della sezione ottenuta con un piano parallelo alla base e distante da essa 1/4 dell'altezza

A.5. Momento di inerzia e raggio di girazione rispetto a una retta. Dato un corpo occupante un dominio Ω e una retta non orientata r , diciamo momento di inerzia del corpo rispetto a r l'integrale

$$a.7) \quad J_r \triangleq \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \delta^2(x, y, z) dx dy dz$$

dove $\rho = \rho(x, y, z)$ è la funzione che descrive la densità del corpo e $\delta = \delta(x, y, z)$ è la funzione che indica la distanza del punto (x, y, z) da r .



In base al teorema della media integrale esiste un valore ρ_r assunto da $\delta = \delta(x, y, z)$ tale per cui

$$a.8) \quad J_r = \mathcal{M} \rho_r^2$$

essendo $\mathcal{M} = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz$ la massa complessiva del corpo. Il valore ρ_r prende il nome di **raggio di girazione** del corpo rispetto alla retta r .

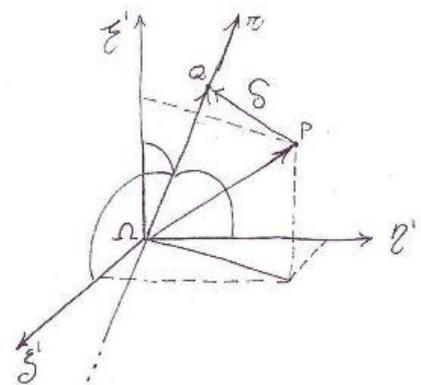
A.6. Momento di inerzia rispetto ad assi concorrenti in un medesimo punto. Sia r la generica retta solidale al corpo rigido e passante per Ω . Fissato il sistema di riferimento $R\Gamma^1(\Omega; \xi^1, \eta^1, \zeta^1)$ solidale al corpo rigido, siano $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1$ i coseni direttori di r rispetto, nell'ordine, agli assi ξ^1, η^1, ζ^1 . Si dimostra allora che

$$a.9) \quad J_r = J_{\xi^1} \alpha^1{}^2 + J_{\eta^1} \beta^1{}^2 + J_{\zeta^1} \gamma^1{}^2 - 2J_{\xi^1 \eta^1} \alpha^1 \beta^1 - 2J_{\xi^1 \zeta^1} \alpha^1 \gamma^1 - 2J_{\eta^1 \zeta^1} \beta^1 \gamma^1$$

dove si è posto

$$a.10) \quad \begin{cases} J_{\xi^1 \eta^1} \triangleq \iiint_{\Omega} \rho(\xi^1, \eta^1, \zeta^1) \xi^1 \eta^1 d\xi^1 d\eta^1 d\zeta^1 \\ J_{\xi^1 \zeta^1} \triangleq \iiint_{\Omega} \rho(\xi^1, \eta^1, \zeta^1) \xi^1 \zeta^1 d\xi^1 d\eta^1 d\zeta^1 \\ J_{\eta^1 \zeta^1} \triangleq \iiint_{\Omega} \rho(\xi^1, \eta^1, \zeta^1) \eta^1 \zeta^1 d\xi^1 d\eta^1 d\zeta^1 \end{cases}$$

L'integrale $J_{\xi^1 \eta^1}$ è definito **prodotto d'inerzia** del corpo rispetto agli assi ξ^1, η^1 e analogamente si definiscono gli altri due integrali. Per definire i coseni direttori $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1$ è necessario attribuire un verso a r ; tuttavia è facile rilevare che J_r non dipende da tale verso: se infatti si cambia verso a r , nessuno degli addendi cambia di segno.



Per dimostrare la **a.8** si parte dalla definizione **a.7**, che con questo sistema di riferimento si scrive

$$a.11) \quad J_r = \iiint_{\Omega} \rho(\xi^1, \eta^1, \zeta^1) \delta^2(\xi^1, \eta^1, \zeta^1) d\xi^1 d\eta^1 d\zeta^1$$

e si osserva che, aiutandoci con la figura, risulta $\delta(\xi^1, \eta^1, \zeta^1) = |\overline{PQ}|$, essendo P il punto di coordinate (ξ^1, η^1, ζ^1) e Q la proiezione del punto P su r . D'altra parte vale la relazione vettoriale

$$A.12) \quad \overline{\Omega P} + \overline{PQ} = \overline{\Omega Q} \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{\Omega Q} - \overline{\Omega P}$$

In questa equazione il vettore $\overline{\Omega P}$ è completamente noto e da esso è possibile ricavare anche il vettore $\overline{\Omega Q}$. Si ha infatti che

$$\overline{\Omega Q} = \left(\overline{\Omega P} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \xi^l \\ \eta^l \\ \zeta^l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix} = (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix}$$

Sostituendo quanto ottenuto nella **A.12** abbiamo

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \begin{pmatrix} \alpha^l \\ \beta^l \\ \gamma^l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi^l \\ \eta^l \\ \zeta^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \alpha^l - \xi^l \\ (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \beta^l - \eta^l \\ (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \gamma^l - \zeta^l \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta^2(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) &= |\overline{PQ}|^2 = (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l)^2 \alpha^l{}^2 + \xi^l{}^2 - 2(\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \alpha^l \xi^l + \\ &+ (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l)^2 \beta^l{}^2 + \eta^l{}^2 - 2(\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \beta^l \eta^l + \\ &+ (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l)^2 \gamma^l{}^2 + \zeta^l{}^2 - 2(\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) \gamma^l \zeta^l = \\ &= (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l)^2 (\alpha^l{}^2 + \beta^l{}^2 + \gamma^l{}^2) + (\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2) - \\ &- 2(\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l) (\alpha^l \xi^l + \beta^l \eta^l + \gamma^l \zeta^l) \end{aligned}$$

Si osservi ora che nel primo addendo compare, come secondo termine, il modulo del versore di r , che dunque pari a uno. Dunque, sommando poi il primo e il terzo addendo, abbiamo

$$\begin{aligned} \delta^2(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) &= (\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2) - (\xi^l \alpha^l + \eta^l \beta^l + \zeta^l \gamma^l)^2 = \\ &= \xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2 - \xi^l{}^2 \alpha^l{}^2 - \eta^l{}^2 \beta^l{}^2 - \zeta^l{}^2 \gamma^l{}^2 - 2\xi^l \alpha^l \eta^l \beta^l - 2\xi^l \alpha^l \zeta^l \gamma^l - 2\eta^l \beta^l \zeta^l \gamma^l = \\ &= \xi^l{}^2 (\beta^l{}^2 + \gamma^l{}^2) + \eta^l{}^2 (\alpha^l{}^2 + \gamma^l{}^2) + \zeta^l{}^2 (\alpha^l{}^2 + \beta^l{}^2) - 2\xi^l \alpha^l \eta^l \beta^l - 2\xi^l \alpha^l \zeta^l \gamma^l - 2\eta^l \beta^l \zeta^l \gamma^l = \\ &= \alpha^l{}^2 (\eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2) + \beta^l{}^2 (\xi^l{}^2 + \zeta^l{}^2) + \gamma^l{}^2 (\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2) - 2\xi^l \eta^l \alpha^l \beta^l - 2\xi^l \zeta^l \alpha^l \gamma^l - 2\eta^l \zeta^l \beta^l \gamma^l \end{aligned}$$

Sostituendo quanto ottenuto nella **A.11** abbiamo

$$\begin{aligned} J_r &= \alpha^l{}^2 \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) (\eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2) d\xi^l d\eta^l d\zeta^l + \beta^l{}^2 \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) (\xi^l{}^2 + \zeta^l{}^2) d\xi^l d\eta^l d\zeta^l + \\ &+ \gamma^l{}^2 \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) (\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2) d\xi^l d\eta^l d\zeta^l - 2\alpha^l \beta^l \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) \xi^l \eta^l d\xi^l d\eta^l d\zeta^l - \\ &- 2\alpha^l \gamma^l \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) \xi^l \zeta^l d\xi^l d\eta^l d\zeta^l - 2\eta^l \zeta^l \iiint_{\Omega} \rho(\xi^l, \eta^l, \zeta^l) \eta^l \zeta^l d\xi^l d\eta^l d\zeta^l \end{aligned}$$

Tenendo presente le definizioni **A.10** e **A.11** abbiamo la tesi.

A.6. Teorema di Huyghens. Sia r la generica retta solidale al corpo e r_G la retta a essa parallela passante per il centro di massa. Allora se d è la distanza fra le due rette e \mathcal{M} è la massa complessiva del corpo, risulta

$$\text{A.12) } J_r = J_{r_G} + \mathcal{M}d^2$$

Per dimostrare questa proprietà indichiamo P il generico punto del corpo, Q la sua proiezione su r_G e R quella su r . Poiché i tre punti P, Q, R si trovano sullo stesso piano e questo è ortogonale a entrambe le rette, segue che R è anche la proiezione di Q su r , e dunque $\overline{QR} = d$. Ma consideriamo il triangolo QRP : per il teorema del coseno abbiamo

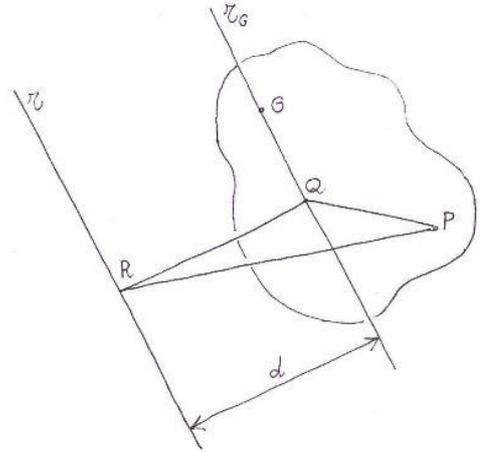
$$\begin{aligned}\overline{PR}^2 &= \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{PQ}\overline{QR} \cos \widehat{RQP} \\ &= \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{QP} \cdot \overline{QR} \\ &= \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{QP} \cdot \overline{QR}\end{aligned}$$

Considerando allora che

$$J_r = \iiint_{\Omega} \rho(P) \overline{PR}^2 dV$$

abbiamo

$$\begin{aligned}J_r &= \iiint_{\Omega} \rho(P) (\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{QP} \cdot \overline{QR}) dV = \\ &= \iiint_{\Omega} \rho(P) \overline{PQ}^2 dV + d^2 \iiint_{\Omega} \rho(P) dV - 2\overline{QR} \cdot \iiint_{\Omega} \rho(P) \overline{QP} dV\end{aligned}$$



Si osservi che il vettore \overline{QR} può essere portato fuori dall'operatore integrale, nel terzo addendo, perché in realtà non varia al variare di P . Ricordando le definizioni **A.7** e **A.2** abbiamo allora

$$J_r = J_{r_G} + d^2 \mathcal{M} - 2\overline{QR} \cdot \overline{QG}$$

Ma essendo $\overline{QR} \perp \overline{QG}$ si ha la tesi.

A.7. Ellissoide di inerzia. Sia Ω un punto qualunque dello spazio solidale al corpo rigido; sia r la generica retta passante per Ω e solidale al corpo rigido; sia Λ il punto generico della retta r . Data allora un'arbitraria costante positiva χ , definisco ellissoide d'inerzia del corpo rispetto al punto Ω il luogo² dei punti Λ che soddisfano la condizione

$$\text{a.13) } |\overline{\Omega\Lambda}| = \sqrt{\frac{\chi}{J_r}}$$

Fissando un sistema di riferimento $R\Gamma^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l)$ è possibile scrivere la **A.13** nella forma

$$\text{a.14) } J_{\xi^l} \xi^{l2} + J_{\eta^l} \eta^{l2} + J_{\zeta^l} \zeta^{l2} - 2J_{\xi^l \eta^l} \xi^l \eta^l - 2J_{\xi^l \zeta^l} \xi^l \zeta^l - 2J_{\eta^l \zeta^l} \eta^l \zeta^l = \chi$$

ovvero nella forma

$$\text{a.15) } (\xi^l \quad \eta^l \quad \zeta^l) \begin{pmatrix} J_{\xi^l} & -J_{\xi^l \eta^l} & -J_{\xi^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \eta^l} & J_{\eta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \zeta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} & J_{\zeta^l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^l \\ \eta^l \\ \zeta^l \end{pmatrix} = \chi$$

² Si deve pensare che la retta r ruota attorno al punto Ω mentre il punto Λ è libero di scorrere su di essa; al variare dell'orientamento spaziale di r poi varierà il valore di J_r .

Questa superficie risulta essere effettivamente un ellissoide centrato in Ω e con assi, in generale, non coincidenti con quelli del sistema di riferimento, che per altro è stato orientato in modo arbitrario.

Seguono i passaggi che permettono di ottenere la **A.14** dalla **A.13**. Posto $\Lambda \equiv (\xi^l, \eta^l, \zeta^l)$ e ricordando la **A.9**, abbiamo

$$\text{a.16) } \sqrt{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2} = \sqrt{\frac{\chi}{J_{\xi^l} \alpha^l{}^2 + J_{\eta^l} \beta^l{}^2 + J_{\zeta^l} \gamma^l{}^2 - 2J_{\xi^l \eta^l} \alpha^l \beta^l - 2J_{\xi^l \zeta^l} \alpha^l \gamma^l - 2J_{\eta^l \zeta^l} \beta^l \gamma^l}}$$

Si consideri ora che, detto \hat{r} il versore della retta r , risulta

$$\xi^l = \overline{\Omega\Lambda} \cdot \hat{r} = |\overline{\Omega\Lambda}| \alpha^l = \sqrt{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2} \alpha^l \Rightarrow \alpha^l{}^2 = \frac{\xi^l{}^2}{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2}$$

Analogamente si ha

$$\beta^l{}^2 = \frac{\eta^l{}^2}{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2} \quad \gamma^l{}^2 = \frac{\zeta^l{}^2}{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2}$$

Sostituendo queste tre relazioni nella **A.16** abbiamo

$$\sqrt{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2} = \sqrt{\chi \frac{\xi^l{}^2 + \eta^l{}^2 + \zeta^l{}^2}{J_{\xi^l} \xi^l{}^2 + J_{\eta^l} \eta^l{}^2 + J_{\zeta^l} \zeta^l{}^2 - 2J_{\xi^l \eta^l} \xi^l \eta^l - 2J_{\xi^l \zeta^l} \xi^l \zeta^l - 2J_{\eta^l \zeta^l} \eta^l \zeta^l}}$$

Semplificando e elevando al quadrato otteniamo la **A.14**.

A.8. Assi principali e assi centrali di inerzia. Sia Ω il generico punto solidale al corpo. Allora si pongono le seguenti definizioni.

Asse principale di inerzia relativo al punto Ω	ognuno degli assi di simmetria dell'ellissoide di inerzia con centro nel punto Ω
Piano principale di inerzia relativo al punto Ω	ognuno dei piani individuati da due degli assi principali di inerzia relativi al punto Ω
Terna principale di inerzia relativa al punto Ω	ogni terna cartesiana ortogonale che sia centrata in Ω e che abbia gli assi sovrapposti a tre degli assi ³ di simmetria dell'ellissoide relativo al punto Ω ; in questo teso le terne principali di inerzia sono indicate $R\Gamma(\Omega; \xi, \eta, \zeta) = R\Gamma(\Omega; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
Momento principale di inerzia relativo al punto Ω	ogni momento di inerzia del corpo che sia calcolato rispetto a un asse principale di inerzia relativo al punto Ω

³ Un ellissoide ha sempre almeno tre assi di simmetria: se i tre semiassi sono diversi fra loro, gli assi di simmetria sono solo tre; se ve ne sono due uguali, allora gli assi di simmetria sono infiniti a uno; se sono tutti e tre uguali, allora gli assi di simmetria sono infiniti a due.

Se in particolare il punto Ω coincide con il baricentro G del corpo, allora si fanno le definizioni seguenti.

Ellissoide centrale di inerzia	è l'ellissoide di inerzia relativo al baricentro
Asse centrale di inerzia	ognuno degli assi di simmetria dell'ellissoide centrale di inerzia
Piano centrale di inerzia	ogni piano passante per il baricentro che contenga almeno due assi centrali di inerzia
Terna centrale di inerzia	ogni terna cartesiana ortogonale avente centro nel baricentro e assi sovrapposti a tre assi centrali di inerzia; in questo testo ci riferiamo alla terna centrale di inerzia con la simbologia $R\Gamma(G; \xi, \eta, \zeta) = R\Gamma(G; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
Momento centrale di inerzia	ogni momento di inerzia che sia calcolato rispetto a un asse centrale di inerzia

È possibile dimostrare (ma per questo rimando al manoscritto di Meccanica Razionale) le seguenti due proposizioni:

Un asse centrale di inerzia è anche asse principale rispetto a ogni suo punto
Un piano centrale di inerzia è anche piano principale di inerzia rispetto a ogni suo punto

A.9. Ricerca degli assi principali di inerzia: metodo matematico. Dato il generico sistema di riferimento $R\Gamma^l(\Omega; \xi^l, \eta^l, \zeta^l) = R\Gamma^l(\Omega; \hat{e}_1^l, \hat{e}_2^l, \hat{e}_3^l)$, l'ellissoide di inerzia centrato in Ω , come abbiamo visto ha equazione

$$a.17) \quad (\xi^l \quad \eta^l \quad \zeta^l) \begin{pmatrix} J_{\xi^l} & -J_{\xi^l \eta^l} & -J_{\xi^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \eta^l} & J_{\eta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \zeta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} & J_{\zeta^l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^l \\ \eta^l \\ \zeta^l \end{pmatrix} = \chi$$

Stante allora la definizione di terna principale di inerzia, segue che la seconda terna $R\Gamma(\Omega; \xi, \eta, \zeta) = R\Gamma(G; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ è terna principale se e solo se rispetto a essa l'equazione dell'ellissoide di inerzia si riconduce alla forma canonica

$$a.18) \quad (\xi \quad \eta \quad \zeta) \begin{pmatrix} J_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \chi$$

La ricerca degli assi principali dunque non è altro che la ricerca di quegli assi di riferimento rispetto ai quali

Richiamo allora alcune nozioni di algebra lineare. Sia Λ un punto dell'ellissoide le cui coordinate rispetto a $R\Gamma$ siano date dal vettore colonna X , mentre quelle rispetto a $R\Gamma^l$ siano date dal vettore Y . Ma il punto è lo stesso, dunque deve risultare

$$(\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3)X = (\hat{\varepsilon}_1^l \quad \hat{\varepsilon}_2^l \quad \hat{\varepsilon}_3^l)Y$$

Se ora indico P la matrice 3×3 le cui colonne sono le coordinate dei versori di $R\Gamma^l$ rispetto a quelli di $R\Gamma$, posso anche scrivere

$$\text{a.19) } (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3)P = (\hat{\varepsilon}_1^l \quad \hat{\varepsilon}_2^l \quad \hat{\varepsilon}_3^l) \Leftrightarrow (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3) = (\hat{\varepsilon}_1^l \quad \hat{\varepsilon}_2^l \quad \hat{\varepsilon}_3^l)P^T$$

e dunque, sostituendo questa in quella precedente, si ha

$$(\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3)X = (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3)PY \Leftrightarrow (\hat{\varepsilon}_1 \quad \hat{\varepsilon}_2 \quad \hat{\varepsilon}_3)(X - PY) = 0$$

Poiché i versori di un sistema di riferimento ortogonale sono L.I. la equazione indicata è soddisfatta se e solo se $(X - PY) = 0$ ovvero se e solo se

$$\text{a.20) } X = PY \Leftrightarrow P^T X = Y$$

Nelle **a.20** e **a.19** si è tenuto conto che la matrice P , in quanto matrice di passaggio di base fra due basi ortogonali, è tale per cui la trasposta coincide con l'inversa.

Vediamo allora come si esprime la equazione **a.17** quando si effettua un cambio del sistema di riferimento.

$$Y^T \begin{pmatrix} J_{\xi^l} & -J_{\xi^l \eta^l} & -J_{\xi^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \eta^l} & J_{\eta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \zeta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} & J_{\zeta^l} \end{pmatrix} Y = \chi \Leftrightarrow (P^T X)^T \begin{pmatrix} J_{\xi^l} & -J_{\xi^l \eta^l} & -J_{\xi^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \eta^l} & J_{\eta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} \\ -J_{\xi^l \zeta^l} & -J_{\eta^l \zeta^l} & J_{\zeta^l} \end{pmatrix} P^T X = \chi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X^T P M P^T X = \chi$$

avendo indicato M la matrice dei momenti di inerzia. D'altra parte questa stessa equazione si scrive anche $X^T \tilde{M} X = \chi$, dove \tilde{M} è la matrice dei momenti di inerzia calcolati rispetto ai nuovi assi di riferimento. Confrontando le due equazioni dell'ellissoide abbiamo $X^T P M P^T X = X^T \tilde{M} X$ da cui

$$X^T P M P^T X - X^T \tilde{M} X = 0 \Leftrightarrow (X^T P M P^T - X^T \tilde{M}) X = 0$$

Dovendo questa relazione valere comunque si scelga X , deve essere necessariamente

$$X^T P M P^T - X^T \tilde{M} = 0 \Leftrightarrow X^T (P M P^T - \tilde{M}) = 0$$

e ragionando come sopra si conclude che

$$\text{a.21) } P M P^T = \tilde{M} \Leftrightarrow M = P^T \tilde{M} P$$

Ora diciamo che la matrice \tilde{M} sia una la matrice diagonale della **A.18**. Allora si ha

$$M = P^T \tilde{M} P = P^T \begin{pmatrix} J_{\xi} P_1 \\ J_{\eta} P_2 \\ J_{\zeta} P_3 \end{pmatrix} = (P^1 \quad P^2 \quad P^3) \begin{pmatrix} J_{\xi} P_1 \\ J_{\eta} P_2 \\ J_{\zeta} P_3 \end{pmatrix} = (J_{\xi} P^1 P_1 \quad J_{\eta} P^2 P_2 \quad J_{\zeta} P^3 P_3)$$

dove si è indicato con P^1 la prima colonna di P , con P_1 la prima riga, e così via. Moltiplicando ora a destra per P^1 si ha

$$\mathbb{M}P^1 = J_\xi P^1 P_1 P^1 + J_\eta P^2 P_2 P^1 + J_\zeta P^3 P_3 P^1$$

Ma in una matrice ortogonale la trasposta coincide con l'inversa e dunque si ha

$$\mathbb{M}P^1 = J_\xi P^1$$

Analogamente si ricavano le relazioni $\mathbb{M}P^2 = J_\eta P^2$ e $\mathbb{M}P^3 = J_\zeta P^3$. Tutto questo per concludere che per avere il sistema di riferimento rispetto al quale l'ellissoide ha equazione nella forma canonica **a.18**, ovvero per avere un sistema di riferimento con assi sovrapposti agli assi principali di inerzia, dobbiamo cercare quegli assi i cui vettori direttori abbiano coordinate Y , rispetto al sistema di riferimento di partenza, tali per cui

$$\text{a.22) } \mathbb{M}Y = \lambda Y \Leftrightarrow (\mathbb{M} - \lambda I)Y = 0$$

Se Y soddisfa questa relazione allora il vettore coordinate di un vettore direttore di un asse principale di inerzia il cui momento di inerzia relativo è λ . Ma il sistema lineare **a.22** è omogeneo, dunque affinché vi sia almeno una soluzione oltre quella nulla, si deve richiedere che il determinante della matrice dei coefficienti sia nullo. In conclusione la ricerca degli assi principali di inerzia si riconduce alla soluzione della equazione di terzo grado in λ

$$\text{a.23) } \det(\mathbb{M} - \lambda I) = 0$$

le cui soluzioni sono i momenti principali di inerzia, che sostituiti nel sistema lineare **a.22** forniscono i vettori direttori delle relative direzioni principali di inerzia. Riepilogo il procedimento nella tabella seguente.

Ricerca degli assi centrali di inerzia e dei relativi momenti di inerzia	
prima fase	<p style="text-align: center;">Si risolve l'equazione</p> $\det(\mathbb{M} - \lambda I) = 0$ <p style="text-align: center;">di terzo grado in λ, dove \mathbb{M} è la matrice</p> $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} J_{\xi^1} & -J_{\xi^1\eta^1} & -J_{\xi^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\eta^1} & J_{\eta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} \\ -J_{\xi^1\zeta^1} & -J_{\eta^1\zeta^1} & J_{\zeta^1} \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">essendo $R\Gamma^1(\Omega; \xi^1, \eta^1, \zeta^1)$ il sistema di riferimento di partenza.</p>
seconda fase	<p style="text-align: center;">Le soluzioni della prima fase sono i momenti principali di inerzia che sostituiti nel sistema lineare</p> $(\mathbb{M} - \lambda I)Y = 0$ <p style="text-align: center;">permettono di ricavare le coordinate, rispetto $R\Gamma^1(\Omega; \xi^1, \eta^1, \zeta^1)$, dei vettori direttori dei relativi assi principali di inerzia.</p>

A.10. Ricerca degli assi principali di inerzia: metodo semplificato. Se conosciamo già una direzione principale di inerzia (e dunque un piano principale di inerzia), come succede ad esempio nel caso di figure piane, le quali giacciono su un loro piano centrale di inerzia, conviene disporre il sistema di riferimento $R\Gamma^1(\Omega; \xi^1, \eta^1, \zeta^1)$ in modo che un asse, diciamo l'asse ζ^1 , sia già sovrapposto all'asse principale noto.

Si fissi dunque l'anomalia θ (angolo con verso positivo assegnato) con il verso positivo indicato in figura. Allora il momento di inerzia rispetto all'asse r risulta dato, in base alla **a.9**, da

$$J_r = J_{\xi^1}\alpha^2 + J_{\eta^1}\beta^2 - 2J_{\xi^1\eta^1}\alpha\beta = J_{\xi^1}\cos^2\theta + J_{\eta^1}\sin^2\theta - 2J_{\xi^1\eta^1}\cos\theta\sin\theta$$

ovvero da

$$\text{a.24) } J_r = J_{\xi^1}\cos^2\theta + J_{\eta^1}\sin^2\theta - J_{\xi^1\eta^1}\sin 2\theta$$

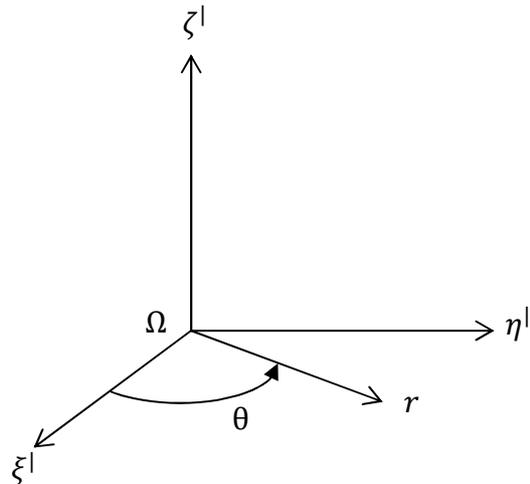
Per ricavare le direzioni principali del piano $\xi^1\eta^1$ (che possono essere o due, o infinite) è sufficiente, se si pensa alla forma dell'ellissoide, cercare i punti estremali della funzione trigonometrica ottenuta, cioè i valori di θ per i quali si annulla la derivata. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{dJ_r(\theta)}{d\theta} &= -J_{\xi^1}2\cos\theta\sin\theta + J_{\eta^1}2\sin\theta\cos\theta - J_{\xi^1\eta^1}2\cos 2\theta = \\ &= (-J_{\xi^1} + J_{\eta^1})\sin 2\theta - J_{\xi^1\eta^1}2\cos 2\theta = 0 \end{aligned}$$

A questo punto escludendo il caso in cui sia $J_{\xi^1} = J_{\eta^1} \Leftrightarrow -J_{\xi^1} + J_{\eta^1} = 0$ (nel quale, considerando che l'ellissoide ha allora due semiassi uguali, segue che tutte le direzioni del piano sono principali), si trova l'equazione

$$\text{A.25) } \tan 2\theta = \frac{2J_{\xi^1\eta^1}}{J_{\eta^1} - J_{\xi^1}}$$

la quale fornisce due direzioni ortogonali (visto che il periodo della funzione tangente è pari a un angolo piatto), come ci si aspetta. Sostituendo poi questi due valori dell'anomalia nella **A.24** si ottengono i relativi momenti di inerzia. Riassumo in questa tabella.



Ricerca degli assi centrali di inerzia e dei relativi momenti di inerzia nota una direzione principale	
1	Orientiamo il sistema di riferimento $R\Gamma^1(\Omega; \xi^1, \eta^1, \zeta^1)$ in modo che l'asse ζ^1 sia sovrapposto alla direzione principale nota
2	Si introduce l'anomalia θ con verso positivo che da ξ^1 va a η^1 (ad esempio)
3	Se $J_{\eta^1} = J_{\xi^1}$ ogni valore di θ individua una direzione principale (caso dell'ellissoide rotondo)
4	Se $J_{\eta^1} \neq J_{\xi^1}$ le due soluzioni θ_1, θ_2 della equazione $\tan 2\theta = \frac{2J_{\xi^1\eta^1}}{J_{\eta^1} - J_{\xi^1}}$ forniscono le due direzioni principali di inerzia (ortogonali fra loro)
5	Sostituendo θ_1, θ_2 nella equazione $J_r = J_{\xi^1} \cos^2 \theta + J_{\eta^1} \sin^2 \theta - J_{\xi^1\eta^1} \sin 2\theta$ si ricavano i momenti principali relativi alle due direzioni principali trovate.

A.11. Ricerca degli assi principali di inerzia: criteri geometrici. È possibile semplificare la ricerca degli assi principali di inerzia utilizzando, se possibile, le seguenti proprietà legate alla geometria del corpo, per la cui dimostrazione si rimanda al Bordoni.

Se un corpo possiede un **piano di simmetria ortogonale**, allora tale piano è piano centrale di inerzia e dunque è anche piano principale di inerzia rispetto ad ogni suo punto. La retta ortogonale a tale piano e passante per il baricentro è asse centrale di inerzia e dunque è anche asse principale di inerzia rispetto a ogni suo punto.

Se un corpo possiede **due piani di simmetria ortogonale**, allora la loro intersezione è asse centrale di inerzia e dunque anche asse principale di inerzia rispetto a ogni suo punto.

Nel caso di **figura piana** il piano della stessa è piano centrale di inerzia. Inoltre si ha

$$J_{\zeta^l} = J_{\xi^l} + J_{\eta^l}$$

dove si intende che l'asse ζ^l è quello ortogonale al piano della figura.

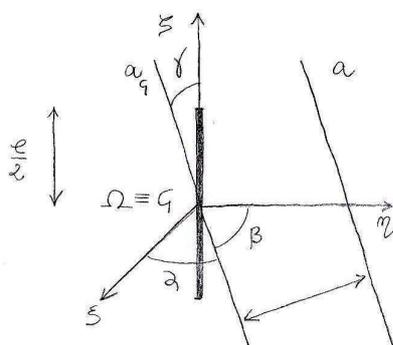
Nel caso di una figura piana [tridimensionale] il momento di inerzia rispetto a un asse a non cambia se si divide la figura in strisce [fette] parallele a r , e le si trasla parallelamente ad r .

Nel caso di una figura piana se si moltiplicano le strisce di cui sopra tutte per il medesimo fattore, il momento di inerzia rispetto a r risulta moltiplicato per lo stesso fattore.

Seguono i momenti di inerzia di alcune figure geometriche e di alcuni solidi. Si osservi che questi enti sono privi di massa e dunque, nelle applicazioni pratiche, questi momenti di inerzia andranno moltiplicati per la densità di massa del corpo (questa operazione è legittima solo nel caso in cui si abbia densità di massa costante).

Alcuni momenti di inerzia

segmento

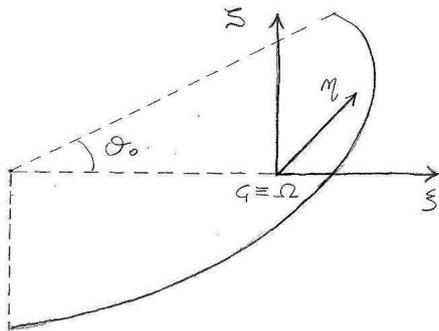


$$j_s = 0, \quad j_s = j_m = \frac{e^3}{12}$$

$$j_{a_g} = \frac{e^3}{12} (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$j_a = \frac{e^3}{12} (\alpha^2 + \beta^2) + e d^2$$

arco di circonferenza

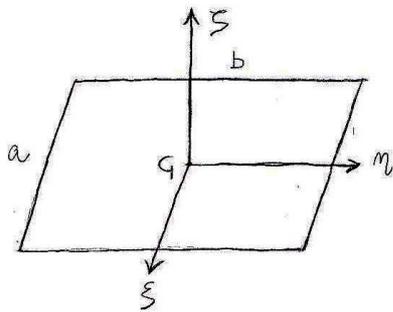


$$j_s = 2R\theta_0 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2 \sin^2 \theta_0}{4\theta_0} \right] = 2R\theta_0 \rho_s^2$$

$$j_s = 2R\theta_0 \left[R^2 - \frac{R^2 \sin^2 \theta_0}{\theta_0^2} \right] = 2R\theta_0 \rho_s^2$$

$$j_\eta = j_s - j_\xi$$

rettangolo



$$j_s = ab \frac{b^2}{12} = ab \rho_s^2$$

$$j_\eta = ab \frac{a^2}{12} = ab \rho_\eta^2$$

$$j_s = ab \frac{a^2 + b^2}{12} = ab \rho_s^2$$

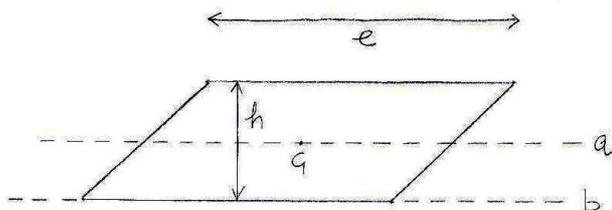
quadrato

$$j_s = j_\eta = a^2 \frac{a^2}{12} = a^2 \rho_s^2$$

$$j_s = a^2 \frac{a^2}{6} = a^2 \rho_s^2$$

L'asse s è una giza
semplice.

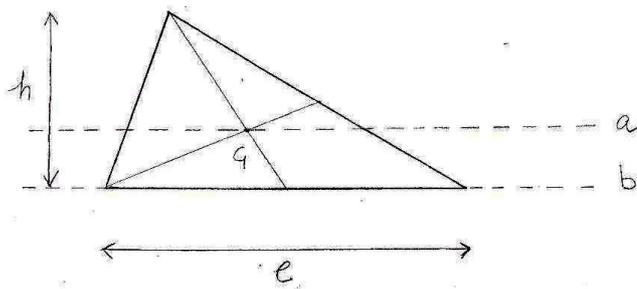
parallelogramma



$$j_a = h e \frac{h^2}{12} = h e \rho_a^2$$

$$j_b = h e \frac{h^2}{3} = h e \rho_b^2$$

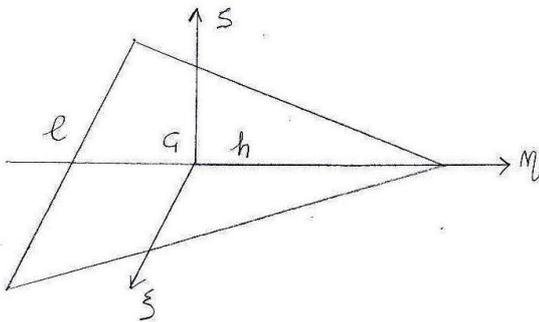
triangolo



$$j_a = \frac{he}{2} \frac{h^2}{18} = \frac{he}{2} s_a^2$$

$$j_b = \frac{he}{2} \frac{h^2}{6} = \frac{he}{2} s_b^2$$

triangolo isoscele



$$j_S = \frac{hl}{2} \frac{h^2}{18} = \frac{hl}{2} s_S^2$$

$$j_M = \frac{hl}{2} \frac{l^2}{24} = \frac{hl}{2} s_M^2$$

$$j_S = j_S + j_M$$

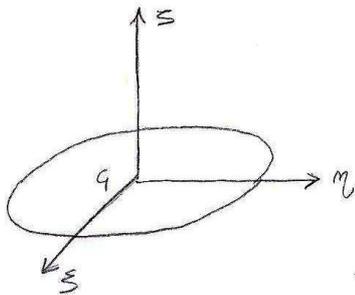
triangolo equilatero

$$j_S = j_M = \frac{\sqrt{3}e^2}{2} \frac{e^2}{24} = \frac{\sqrt{3}e^2}{2} s^2$$

d'axe S è axe giroscopico.

$$j_S = \frac{\sqrt{3}e^2}{2} \frac{e^2}{12} = \frac{\sqrt{3}e^2}{2} s_S^2$$

cerchio

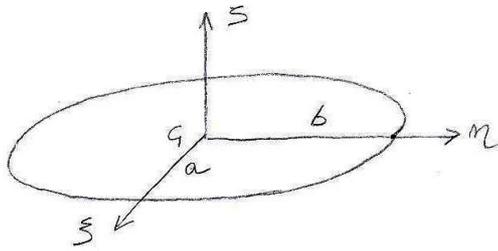


$$j_S = \pi R^2 \frac{R^2}{4} = \pi R^2 s^2 = j_M$$

$$j_S = \pi R^2 \frac{R^2}{2} = \pi R^2 s_S^2$$

d'axe S è axe giroscopico.

ellisse

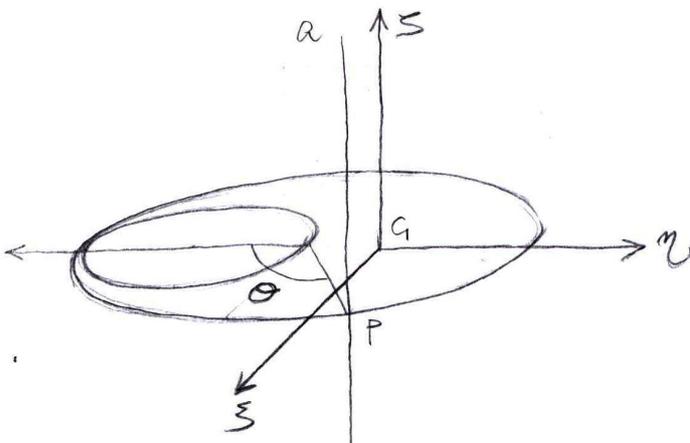


$$j_{\xi} = \pi ab \frac{b^2}{4} = \pi ab \rho_{\xi}$$

$$j_{\eta} = \pi ab \frac{a^2}{4} = \pi ab \rho_{\eta}$$

$$j_{\zeta} = j_{\xi} + j_{\eta}$$

cerchio con foro circolare



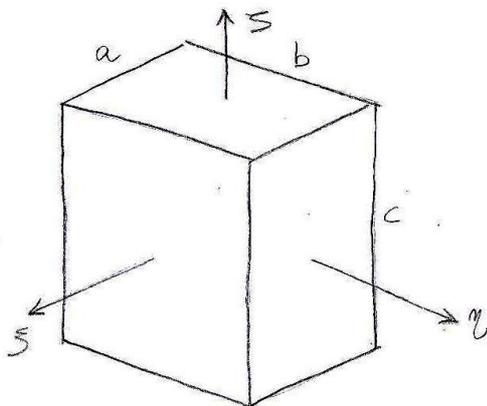
$$J_{\xi} = \frac{29}{30} MR^2$$

$$J_{\eta} = \frac{5}{4} MR^2$$

$$J_{\zeta} = \frac{37}{18} MR^2$$

$$J_a = \frac{37 + 8 \cos \theta}{6} MR^2$$

parallelepipedo retto

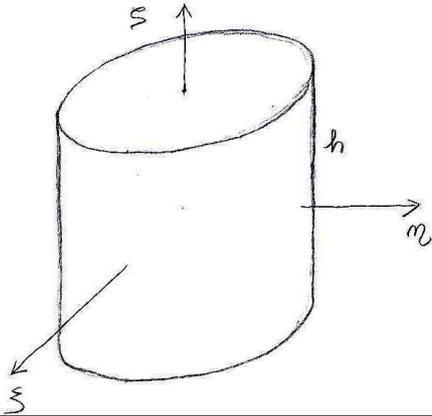


$$j_{\xi} = abc \frac{b^2 + c^2}{12}$$

$$j_{\eta} = abc \frac{a^2 + c^2}{12}$$

$$j_{\zeta} = abc \frac{a^2 + b^2}{12}$$

cilindro circolare



$$J_S = \pi R^2 h \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) = J_z$$

$$J_S = \pi R^2 h \frac{R^2}{2}$$

L'asse S è asse giroscopico
es.

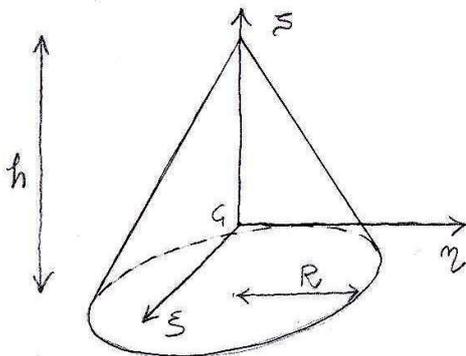
palla e sfera

Palla : $j = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\rho}{5} R^2$

Sfera : $j = 4 \pi R^2 \frac{\rho}{3} R^2$

Ogni asse baricentrale è asse centrale di inerzia
nonché asse giroscopico.

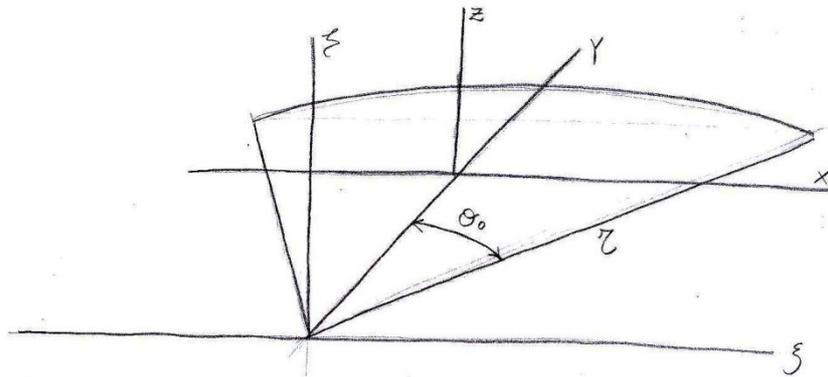
cono circolare



$$J_S = J_z = \frac{3M}{20} \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right)$$

$$J_S = \frac{3M}{10} R^2$$

settore circolare



$$I_{\xi} = \frac{\pi^4}{4} (\theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0)$$

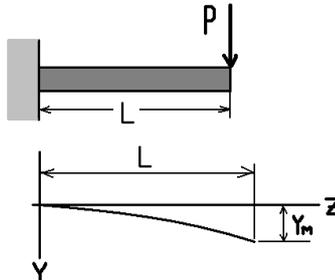
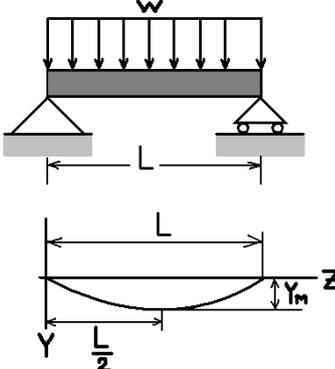
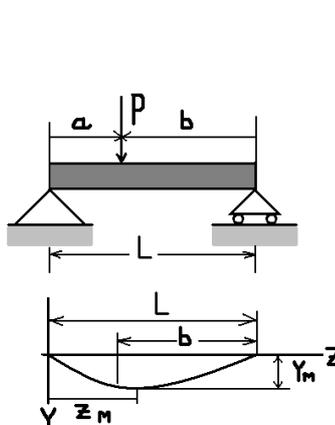
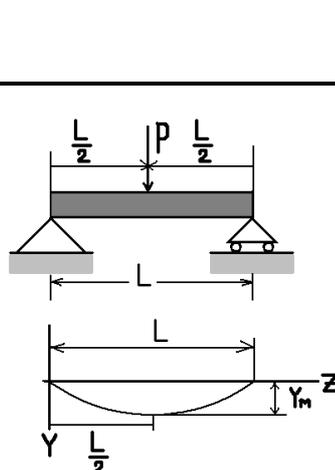
$$I_{\zeta} = \frac{\pi^4}{2} \theta_0$$

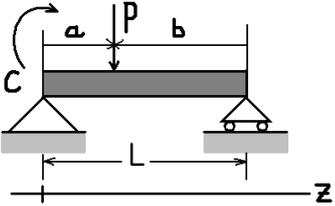
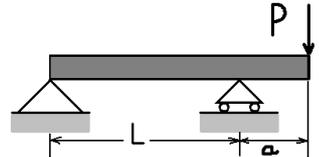
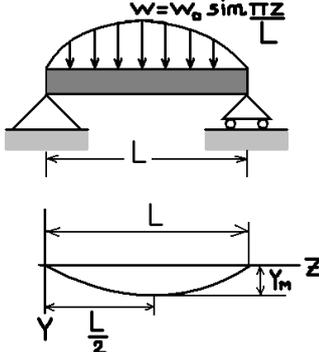
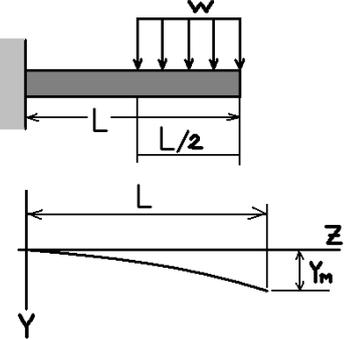
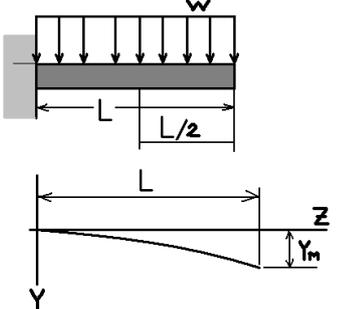
$$I_{\eta} = \frac{\pi^4}{4} (\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0)$$

$$I_x = \frac{\pi^4}{4} (\theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0) + \frac{2\pi^4 \sin^2 \theta_0}{3\theta_0}$$

$$I_z = \frac{\pi^4}{2} \theta_0 + \frac{2\pi^4 \sin^2 \theta_0}{3\theta_0}$$

Appendice. Travi piane notevoli

Travi isostatiche		
Trave, linea elastica e sistema di riferimento	Linea elastica e spostamento massimo	Rotazione della generica sezione e rotazione di estremità
	$y(z) = \frac{P}{6EI} (-z^3 + 3Lz^2)$ $y_M = y(L) = \frac{PL^3}{3EI}$	$\varphi(z) = \frac{P}{2EI} (z^2 - 2Lz)$ $\varphi(L) = -\frac{P}{2EI} L^2$
	$y(z) = \frac{w}{24EI} (z^4 - 2Lz^3 + L^3z)$ $y_M = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5wL^4}{384EI}$	$\varphi(z) = -\frac{w}{24EI} (4z^3 - 6Lz^2 + L^3)$ $\varphi(0) = -\frac{wL^3}{24EI}$ $\varphi(L) = \frac{wL^3}{24EI}$
	$z \leq a \rightarrow y(z) =$ $= \frac{Pb}{6LEI} (-z^3 + (L^2 - b^2)z)$ $z \geq a \rightarrow y(z) =$ $= \frac{Pa}{6LEI} (z^3 - 3Lz^2 + (2L^2 + a^2)z - La^2)$ $y(a) = \frac{a^2b^2P}{3EIL}$ $a > b \Rightarrow \begin{cases} y_M = \frac{Pb\sqrt{(a^2 + 2ab)^3}}{9\sqrt{3}EIL} \\ x_M = \sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{3}} \end{cases}$	$z \leq a \rightarrow \varphi(z) =$ $= \frac{Pb}{6LEI} (3z^2 - L^2 + b^2)$ $z \geq a \rightarrow \varphi(z) =$ $= -\frac{Pa}{6LEI} (3z^2 - 6Lz + 2L^2 + a^2)$ $\varphi(0) = -\frac{Pb}{6LEI} (L^2 - b^2)$ $\varphi(L) = -\frac{Pa}{6LEI} (L^2 - a^2)$ $\varphi(a) = \frac{Pba}{3LEI} (a - b)$
	$z \leq L/2 \rightarrow y(z) =$ $= \frac{P}{48EI} (-4z^3 + 3L^2z)$ $z \geq L/2 \rightarrow y(z) =$ $= \frac{P}{12EI} \left(z^3 - 3Lz^2 + \frac{9L^2}{4}z - La^2 \right)$ $y_M = \frac{L^3P}{48EI}$	$z \leq L/2 \rightarrow \varphi(z) =$ $= \frac{P}{48EI} (12z^2 - 3L^2)$ $z \geq L/2 \rightarrow \varphi(z) =$ $= -\frac{P}{12EI} \left(3z^2 - 6Lz + \frac{9L^2}{4} \right)$ $\varphi(0) = -\frac{PL^2}{16EI}$ $\varphi(L) = \frac{PL^2}{16EI}$

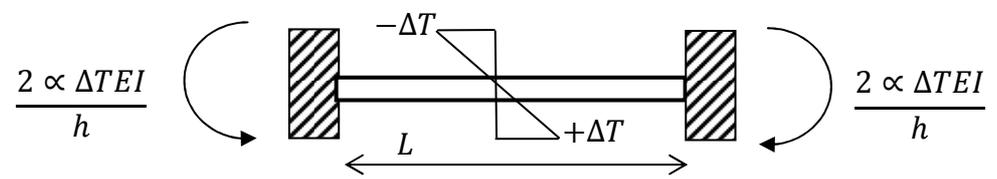
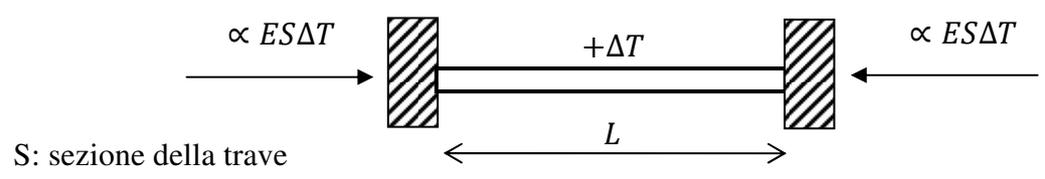
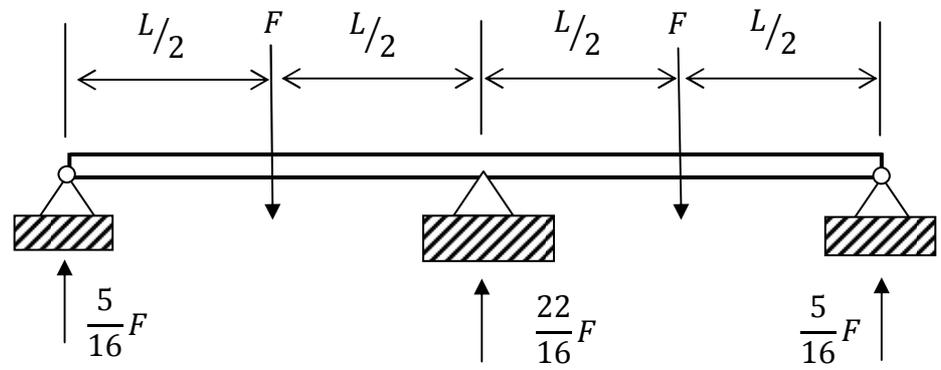
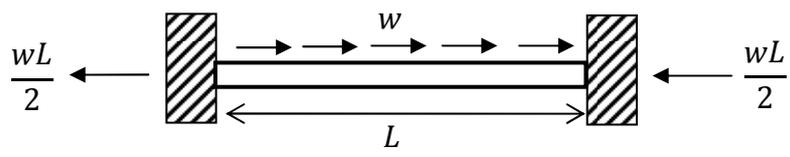
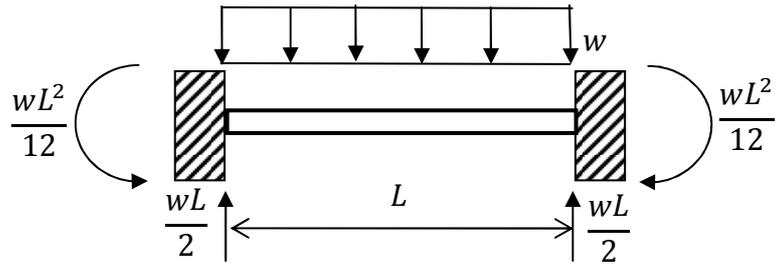
	$0 \leq z \leq a \rightarrow y(z) =$ $= -\frac{1}{EI} \left(\frac{C + bP}{6L} z^3 - \frac{C}{2} z^2 + \left(+ \frac{2CL^2 - (2ab + a^2)bP}{6L} z \right) \right)$ $a \leq z \leq L \rightarrow y(z) =$ $= -\frac{1}{EI} \left(\left(\frac{z^3}{6L} - \frac{z^2}{2} + \frac{L^2}{3} \right) (C - aP) + \left(+ \frac{2CL^2 - (2L^2 + a^2)aP}{6L} (z - L) \right) \right)$	$0 \leq z \leq a \rightarrow \varphi(z) =$ $= \frac{1}{EI} \left(\frac{C + bP}{2L} z^2 - Cz + \left(+ \frac{2CL^2 - (2ab + a^2)bP}{6L} \right) \right)$ $a \leq z \leq L \rightarrow \varphi(z) =$ $= \frac{1}{EI} \left(\left(\frac{z^2}{2L} - z \right) (C - aP) + \left(+ \frac{2CL^2 - (2L^2 + a^2)aP}{6L} \right) \right)$
	$z \leq L \rightarrow y(z) = \frac{aP}{6LEI} (z^3 - zL^2)$ $y_M = y\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{aPL^2}{9\sqrt{3}EI}$	$z \leq L \rightarrow \varphi(z) = -\frac{aP}{6LEI} (3z^2 - L^2)$ $\varphi(0) = \frac{aPL}{6EI}$ $\varphi(L) = -\frac{aPL}{3EI}$
	$y(z) = \frac{w_0 L^4}{\pi^4 EI} \sin \frac{z\pi}{L}$ $y_M = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{w_0 L^4}{\pi^4 EI}$	$\varphi(z) = -\frac{w_0 L^3}{\pi^3 EI} \cos \frac{z\pi}{L}$ $\varphi(0) = -\frac{w_0 L^3}{\pi^3 EI}$ $\varphi(L) = \frac{w_0 L^3}{\pi^3 EI}$
	$y(z) =$ $= \frac{w}{384EI} (16z^4 - 64z^3L + 96z^2L^2 - 8L^3z + L^4)$ $y_M = y(L) = \frac{41wL^4}{384EI}$	$\varphi(z) =$ $= -\frac{w}{48EI} (8z^3 - 24z^2L + 24zL^2 - L^3)$ $\varphi(L) = -\frac{7wL^3}{48EI}$
	$y(z) = \frac{w}{24EI} (z^4 - 4z^3L + 6z^2L^2)$ $y_M = y(L) = \frac{wL^4}{8EI}$	$\varphi(z) =$ $= -\frac{w}{48EI} (4z^3 - 12z^2L + 12zL^2)$ $\varphi(L) = -\frac{wL^3}{6EI}$

	$y = \frac{Mz^2}{2EI}$ $y_M = y(L) = \frac{ML^2}{2EI}$	$\varphi = -\frac{Mz}{EI}$ $\varphi(L) = -\frac{ML}{EI}$
	$y = \frac{M}{6LEI} (z^3 - zL^2)$ $y_M = y\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\varphi(z) = -\frac{M}{6LEI} (3z^2 - L^2)$ $\varphi(0) = \frac{ML}{6EI}$ $\varphi(L) = -\frac{ML}{3EI}$
	$\varphi_C = \frac{2ML}{3EI}$ $\delta = \frac{ML^2}{3EI}$	

Travi iperstatiche

Trave, linea elastica, sistema di riferimento e reazioni vincolari	Linea elastica e spostamento massimo	Rotazione della generica sezione e rotazione di estremità
	$y(z) = \frac{w}{48EI} (2z^4 - 5Lz^3 + 3L^2z^2)$ $y_M = y(0,57L) = 0,0054 \frac{wL^4}{EI}$	$\varphi(z) = -\frac{w}{48EI} (8z^3 - 15Lz^2 + 6L^2z)$ $\varphi(L) = \frac{wL^3}{48EI}$
	$y(z) = \frac{w_0}{120LEI} (z^5 - 2z^3L^2 + L^4z)$ $y_M = y\left(\frac{L}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2w_0L^4}{375\sqrt{5}EI}$	$\varphi(z) = -\frac{w_0}{120LEI} (5z^4 - 6z^2L^2 + L^4)$ $\varphi(0) = -\frac{w_0L^3}{120EI}$

	$\varphi_c = \frac{CL}{4EI}$	
	$0 \leq z \leq a \rightarrow y(z) = -\frac{bP}{4EIL^2} \left(\frac{3a^2 + 2b^2 + 6ab}{3L} z^3 - (a+2b)az^2 \right)$ $a \leq z \leq L \rightarrow y(z) = -\frac{aP}{12EIL} \left(\left(-\frac{z^3}{L^2} + 3\frac{z^2}{L} - 2L \right) (2a^2 + 3ab) - (-6(a^2 + ab)(z-l)) \right)$	$0 \leq z \leq a \rightarrow \varphi(z) = \frac{bP}{4EIL^2} \left(\frac{3a^2 + 2b^2 + 6ab}{L} z^2 - 2(a+2b)az \right)$ $a \leq z \leq L \rightarrow \varphi(z) = \frac{aP}{12EIL} \left(\left(-3\frac{z^2}{L^2} + 6\frac{z}{L} \right) (2a^2 + 3ab) - (-6(a^2 + ab)) \right)$
$R_A = \frac{3a^2 + 2b^2 + 6ab}{2L^3} bP \quad R_B = \frac{2a + 3b}{2L^3} a^2 P$ $C = -\frac{a + 2b}{2L^2} abP \quad R_o = 0$		
	$0 \leq z \leq a \rightarrow y(z) = -\frac{P}{32EI} \left(\frac{11}{3} z^3 - 3Lz^2 \right)$ $a \leq z \leq L \rightarrow y(z) = -\frac{P}{96EI} (-5z^3 + 15Lz^2 - 12L^2z + 2L^3)$	$0 \leq z \leq a \rightarrow \varphi(z) = \frac{P}{32EI} (11z - 6Lz)$ $a \leq z \leq L \rightarrow \varphi(z) = \frac{P}{32EI} (-5z^2 + 10Lz - 4L^2)$
$R_A = \frac{11}{16} P \quad R_B = \frac{5}{16} P$ $C = \frac{3}{16} PL$		
	<p>Deformazione assiale</p> $w(z) = -\frac{bF}{SEL} z \quad z \in [0, a]$ $w(z) = \frac{aF}{SEL} z - \frac{aF}{SE} \quad z \in [a, b]$ <p>S: sezione della trave</p>	



Cedimenti vincolari anelastici in travi iperstatiche

